

境界要素法によるクラック群の進展解析

CRACK GROWING ANALYSIS OF A SYSTEM OF MANY CRACKS
BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

福井卓雄*, 持田哲郎**, 井上耕一***

Takuo FUKUI, Tetsuro MOCHIDA and Koichi INOUE

* 工修 福井大学講師 工学部環境設計工学科 (〒910 福井市文京 3-9-1)

** 福井大学大学院 工学研究科環境設計工学専攻 (〒910 福井市文京 3-9-1)

*** 福井大学大学院 工学研究科環境設計工学専攻 (〒910 福井市文京 3-9-1)

A crack growing analysis method of a system of many cracks is proposed using the boundary element method. A boundary element method is formulated to analyze many cracks, where a crack tip element is introduced to improve the accuracy of crack solution. To track crack extension we follow the method of Erdogan & Sih, where the stress intensity factor is directly calculated from the crack tip element. To analyze a number of cracks a huge size linear equation with a dense coefficient matrix must be solved. To avoid the big memory requirement and the long computing time the fast multipole method is applied to the boundary element method. Some numerical examples shows the applicability and validity of this method.

Key Words : Crack growing analysis, Boundary element method, Crack tip element, Fast multipole method, Many cracks

1. はじめに

この研究の目的は、多数のクラックの同時進展の挙動を正確に追跡するための手法を開発することにある。この論文では、目標とする手法を開発するための第一段階として、手法のアウトラインの確立を目的とした研究の結果を示す。

多数のクラックの同時進展の挙動を追跡する問題は、岩質材料のような初期状態からたくさんのクラックが内在するぜい性材料の圧縮破壊挙動を理解する上でもっとも基本的な問題である。従来、このような問題を解釈する方法としては、連続転位論¹⁾、均質化法、マイクロメカニクスに基づく方法²⁾など、クラックの分布する場を何らかの連続場としてモデル化する方法が多くとられてきた。これらの方法はクラックの存在する場をマクロに評価する目的に有効に利用されている。一方、クラックの集合の場を多自由度の複雑系としてとらえる解釈もまた必要である。たとえば、破壊過程の進行とクラック先端点の集合のフラクタル次元との関係という基本的な問題がある。無限領域の中にクラックが分布するとする。クラック先端による応力場は距離 r に対して $r^{-1/2}$ で伝播するので、先端点集合の次元がある値を越えれば、無限のクラック先端からの影響は応力爆発を起こしてしまう。したがって、クラックが存在するが安定な場においてはクラック先端点集合の次元はある値以下になっているはずである (Mandelbrot³⁾に銀河の次元に関する記述があるので参照)。このような場を解析するためには、多数のクラックの同時進展の挙

動を正確に追跡することが是非必要である。現在のところ、複数クラックの進展解析についてはごく少数(多くの場合 2 個)のクラックの進展解析が行なわれているに過ぎない(たとえば, Sumi & Wang⁴⁾)。また、折れ曲がりクラックの解析解を使って数 100 個のクラックを解いた例⁵⁾もあるが、クラックの相互作用による進展経路の変化は追跡されていない。そこで、この論文では数 100~数 1000 個のクラックの進展を正確に追跡する手法の開発を目標として、その基本モデルを構成することを試みる。

多数クラックの同時進展解析を実行するためには、まず、個々のクラックの進展解析を効率良く行なえなければならない。クラック解析に広く利用されている境界要素法を用いる(最近の研究については *Computational Mechanics* (Springer) に多くの成果が掲載されている)。クラックの存在する場の特徴はクラック先端の特異性 $r^{-1/2}$ の存在である。この特異性は通常の集中力による特異性よりもはるかに遠達性大きい。そこで、この特異性を模擬したクラック先端要素を導入し、クラックが多数存在する場の特性を適切に表現する。さて、境界要素法を用いる上での問題点は離散化した方程式が密行列の係数を持つことである。したがって、 N 要素の問題を解くためには少なくとも $O(N^2)$ の計算量が必要となる。最近になって、福井ら^{6),7)}は高速多重極法^{8),9)}を利用してこの計算量を $O(N)$ にすることに成功しており、通常のワークステーションを使って数 10 万要素の問題を解析している。多数のクラックの解析を行なうために高速多重極法を利用することにする。ま

た、高速多重極法の利用によって、分子動力学で利用されているように¹⁰⁾、基本領域の繰り返しからなる無限領域の解析も可能となる。これらの手法の組み合わせは、種々の問題への適用性・拡張性もあり、多数クラックの同時進展解析のためには必然の選択であろう。本論文では、この基本方針に基づいて、2次元等方弾性体中のクラック群の解析を行ない、手法開発の方向の妥当性を検証する。

本論文では、等方等質の2次元弾性体中のクラック群の同時進展解析を行なう。解析手法開発の方向を見極めることが目的であるので、問題はできるだけ単純化している。対象とするクラックは数学クラックである。クラックに厚さはなく、クラック面の摩擦は考慮しない。また、圧縮クラックの場合には、現実には起こり得ない「めりこみ」変位が生じることになるが、接触問題としての補正はしない。クラック先端の応力拡大係数は先端要素の性質を利用して直接に算出する。また、クラックの進展の方向は Erdogan と Sih の方法¹¹⁾を用いて決定する。多数のクラックが同時に進展する場合には、クラックどうしが結合する可能性が大きく、結合後のクラックは星型のクラックとして進展を継続するが、ここでは、クラックの結合前までを解析の範囲とする。以下では、解析手法全体について少し詳しく解説し、最後にいくつかの解析例をあげる。

2. 境界要素法によるクラック進展解析

2.1 クラックを含む領域の境界値問題

等方等質の線形弾性体の平面問題をあつかう。ここでは、物体力は考慮しない。物体 B の内部に複数のクラック $S_1, S_2, \dots, S_M$ が含まれているとする。クラックに厚さはないものとする。ここであつかう境界値問題は、領域 B の内部で Navier の方程式¹²⁾

$$G \left(u_{i,jj} + \frac{2}{\kappa-1} u_{j,ji} \right) = 0 \quad (1)$$

を満足し、物体の境界 $\partial B = \partial B_1 + \partial B_2$ の上で、与えられた境界条件

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \partial B_1, \quad s_i = n_j \sigma_{ji} = \hat{s}_i \quad \text{on } \partial B_2 \quad (2)$$

を、クラック $S_1, S_2, \dots, S_M$ の表面上で、応力ベクトル s_i が 0 となる条件

$$s_i = n_j \sigma_{ji} = 0 \quad \text{on } S_1, S_2, \dots, S_M \quad (3)$$

を満足する変位(あるいは応力)の場を決定する問題である。上の式において、 u_i は変位、 s_i は境界応力ベクトル、 G はせん断弾性係数である。 κ は Poisson 比 ν により決まるパラメータで、平面ひずみのとき $\kappa = 3 - 4\nu$ 、平面応力のとき $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ である。また、応力 σ_{ij} は変位により、次のように表される。

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ijk} u_k = G \left(u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{\kappa-3}{\kappa-1} \delta_{ij} u_{k,k} \right) \quad (4)$$

領域 B は無限領域であってもよい。この場合には、外部からクラック群に与える影響として、境界条件 (2) のかわりに、無限遠における一様応力 σ_{ij}^0 を与えるものとする。また、このときの応力は

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \Sigma_{ijk} u_k \quad (5)$$

となる。

2.2 境界要素法によるクラック解析

(1) 境界積分方程式

上の境界値問題の変位解は Somigliana の公式より、

$$u_i(x) = \int_{\partial B} [G_{ij}(x; y) s_j(y) - S_{ij}(x; y) u_j(y)] ds_y - \sum_{K=1}^M \int_{S_K} S_{ij}(x; y) [u_j](y) ds_y \quad (6)$$

で与えられる。ここに、 $[u_i]$ はクラック開口変位であり、クラック表面上に与えた単位法線ベクトル n_i と同じ向きの面上の変位を u_i^+ 、反対側の面上の変位を u_i^- とするとき、 $[u_i] = u_i^+ - u_i^-$ で定義する。

式 (6) において、積分核 $G_{ij}(x; y)$ と $S_{ij}(x; y) = n_l \Sigma_{ljk} G_{ki}(y; x)$ は基本特異解と第二基本特異解であり、

$$G_{ij}(x; y) = \frac{1}{2\pi(\kappa+1)G} \left[\kappa \delta_{ij} \left(\log \frac{1}{r} + c \right) + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (7)$$

$$S_{ij}(x; y) = \frac{1}{2\pi(\kappa+1)r} \{ [(\kappa-1)\delta_{ij} + 4r_{,i} r_{,j}] n_k r_{,k} + (\kappa-1)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \} \quad (8)$$

である。ここに、 r は x と y の距離 $r = |x - y|$ である。また、 $c = -(\kappa+1)/2\kappa$ は、あとで述べる基本解の複素関数表現と値を一致させるための定数である。

解 (6) に対応する応力は、(4) により

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\partial B} [\Sigma_{ijk} G_{kl}(x; y) s_l(y) - \Sigma_{ijk} S_{kl}(x; y) u_l(y)] ds_y - \sum_{K=1}^M \int_{S_K} \Sigma_{ijk} S_{kl}(x; y) [u_l](y) ds_y \quad (9)$$

となる。とくに、領域が無限であるときには、(5) により、上式の境界 ∂B 上の積分の項を σ_{ij}^0 でおきかえる。

式 (6)、(9) において、境界上の未知の u_i 、 s_i およびクラック開口変位 $[u_i]$ は境界条件 (2) およびクラック表面の応力の条件 (3) を満足するように決定しなければならない。このために、境界 ∂B では、(6) において点 x を境界 ∂B へ近付けたときの極限の式を条件式として使い、クラック表面上では、(9) において点 x をクラック表面に近付けたときの極限の式からクラック表面の応力ベクトルを決定する式を作り、その式を条件式として用いる。このようにして得られる境界積分方程式は、滑らかな境界およびクラック表面において、

$$\frac{1}{2} u_i(x) = \int_{\partial B} [G_{ij}(x; y) s_j(y) - S_{ij}(x; y) u_j(y)] ds_y$$

$$-\sum_{K=1}^M \int_{S_K} S_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) [u_j](\mathbf{y}) ds_y \quad (10)$$

$$0 = \int_{\partial B} \left[\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) s_j(\mathbf{y}) - U_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) \right] ds_y \\ - \sum_{K=1}^M \int_{S_K} U_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) [u_j](\mathbf{y}) ds_y \quad (11)$$

となる。(10) は $\mathbf{x} \in \partial B$ について、(11) は $\mathbf{x} \in S_1, S_2, \dots, S_M$ についての条件である。(11) において、積分核 $\tilde{S}_{ij} = n_l \Sigma_{lik} G_{kj}$ および $U_{ij} = n_l \Sigma_{lik} S_{kj}$ は基本特異解および第二基本特異解による応力ベクトルを表している。

(2) 積分方程式の離散化

積分方程式(10), (11) を数値的に解くために、境界上およびクラック面上に近似基底 $f_I(\mathbf{x})$ を導入し、境界上の関数 u_i, s_i を

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_I^{N_B} f_I(\mathbf{x}) u_i^I, \quad s_i(\mathbf{x}) = \sum_I^{N_B} f_I(\mathbf{x}) s_i^I \quad (12)$$

で、 K 番目のクラック開口変位 $[u_i]$ を

$$[u_i](\mathbf{x}) = \sum_I^{N_K} f_I(\mathbf{x}) [u_i]^I \quad (13)$$

で近似する。これらの近似により、(10), (11) の積分は離散化されて、

$$u_i(\mathbf{x}) \simeq \sum_I^{N_B} [A_{ij}^I(\mathbf{x}) s_j^I - B_{ij}^I(\mathbf{x}) u_j^I] \\ - \sum_{K=1}^M \sum_I^{N_K} B_{ij}^I(\mathbf{x}) [u_j]^I \quad (14)$$

$$0 \simeq \sum_I^{N_B} [C_{ij}^I(\mathbf{x}) s_j^I - D_{ij}^I(\mathbf{x}) u_j^I] \\ - \sum_{K=1}^M \sum_I^{N_K} D_{ij}^I(\mathbf{x}) [u_j]^I \quad (15)$$

となる。ここに、 $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ は影響関数で、近似基底 $f_I(\mathbf{x})$ の台 E_I 上の積分

$$A_{ij}^I(\mathbf{x}) = \int_{E_I} G_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) f_I(\mathbf{y}) ds_y \\ B_{ij}^I(\mathbf{x}) = \frac{\delta_{ij}}{2} f_I(\mathbf{x}) + \int_{E_I} S_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) f_I(\mathbf{y}) ds_y \\ C_{ij}^I(\mathbf{x}) = -\frac{\delta_{ij}}{2} f_I(\mathbf{x}) + \int_{E_I} \tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) f_I(\mathbf{y}) ds_y \\ D_{ij}^I(\mathbf{x}) = \int_{E_I} U_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) f_I(\mathbf{y}) ds_y \quad (16)$$

である。ただし、 B_{ij}, C_{ij} における右辺第1項は、Cauchyの主値に関連して、 $\mathbf{x} \in E_I$ の場合にのみ現れる項である。

(14), (15) において、 $\mathbf{x}$ として、境界 ∂B 上に N_B 個、クラック面上に $N_1, N_2, \dots, N_M$ 個の選点を取り、それらの点において(14), (15) を満足させれば $2 \times (N_B + N_1 + N_2 + \dots + N_M)$ 元の連立一次方程式が得られる。

これを解けば、すべての $u_i, s_i, [u_i]$ を決定することができる。

ここでは、境界およびクラック面を直線区間の集合 $E_1, E_2, \dots$ で近似し、近似基底として、

$$f_I(\mathbf{x}) = 1 \quad \mathbf{x} \in E_I, \quad 0 \quad \mathbf{x} \notin E_I \quad (17)$$

すなわち、一定要素を使う。しかしながら、一定要素だけではクラック先端付近の応力・変形状態を十分に表現できないので、次に述べるクラック先端要素を導入する。また、クラック先端要素は進展解析に必要な応力拡大係数を簡便に決定するためにも使う。

(3) クラック先端要素

クラック先端要素を導入するにあたって、まず、クラック先端付近の変位と応力の様子を見よう。図-1 に示す半無限クラックを考える。よく知られているように、ク

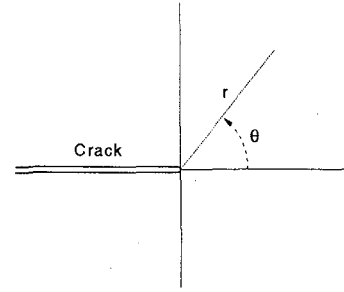


図-1 クラック先端の局所座標

ラックの先端付近の変位と応力の特異部分は、モード I, II の応力拡大係数を k_1, k_2 (Irwin の定義による) とすれば、図-1 に示した極座標系を用いて

$$u_r \sim \frac{\sqrt{r}}{4\sqrt{2}G} \left[k_1 \left((2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right. \\ \left. - k_2 \left((2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (18)$$

$$u_\theta \sim \frac{\sqrt{r}}{4\sqrt{2}G} \left[k_1 \left(-(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right. \\ \left. - k_2 \left((2\kappa + 1) \cos \frac{\theta}{2} - 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right]$$

$$\sigma_r \sim \frac{1}{2\sqrt{2r}} \left[k_1 (3 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ \left. + k_2 (3 \cos \theta - 1) \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (19)$$

$$\sigma_\theta \sim \frac{1}{2\sqrt{2r}} [k_1 (1 + \cos \theta) - 3k_2 \sin \theta] \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_{r\theta} \sim \frac{1}{2\sqrt{2r}} [k_1 \sin \theta + k_2 (3 \cos \theta - 1)] \cos \frac{\theta}{2}$$

と表される¹³⁾。

式(18)を見れば明らかなように、クラック面の変位はクラック先端付近で $\sqrt{r}$ に比例している。そこで、クラック先端の近似基底 $f_I(\mathbf{x})$ として $\sqrt{r}$ に比例する関数を導入することにする。クラック先端要素と他の一

定要素とを適合させるために、要素中点の変位が 1 となるように $f_I(x)$ を選ぶと、

$$f_I(x) = \sqrt{2s/a} \quad (20)$$

となる (図-2)。ここに、 s はクラック先端からとった長さであり、 a は要素の長さである。この式を (16)₂、

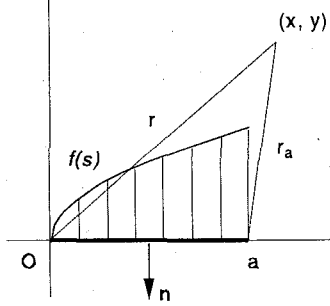


図-2 クラック先端要素

(16)₄ に代入して積分を実行すれば、影響関数が得られる。図-2 に示すクラックに沿った局所座標系を使うと、影響関数 B_{ij} は

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{\sqrt{2/a}}{2\pi(\kappa+1)} \{ \text{sign}(y) [(\kappa+1)f_1 + g_1] - h_1 \} \\ B_{22} &= \frac{\sqrt{2/a}}{2\pi(\kappa+1)} \{ \text{sign}(y) [(\kappa-1)f_1 + g_2] + h_1 \} \\ B_{12} &= \frac{\sqrt{2/a}}{2\pi(\kappa+1)} [(\kappa-1)f_2 + g_3 - h_2] \\ B_{21} &= \frac{\sqrt{2/a}}{2\pi(\kappa+1)} [-(\kappa-1)f_2 + g_3 - h_2] \end{aligned} \quad (21)$$

となる。ここに、関数 $f_1, f_2, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2$ は

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{\frac{r-x}{2}} Lg - \sqrt{\frac{r+x}{2}} \Theta \\ f_2 &= \sqrt{\frac{r+x}{2}} Lg + \sqrt{\frac{r-x}{2}} \Theta - 2\sqrt{a} \\ g_1 &= \frac{r+x}{r} \sqrt{\frac{r-x}{2}} Lg - \frac{r-x}{r} \sqrt{\frac{r+x}{2}} \Theta \\ g_2 &= \frac{r-x}{r} \sqrt{\frac{r-x}{2}} Lg - \frac{r+x}{r} \sqrt{\frac{r+x}{2}} \Theta \\ g_3 &= \frac{r-x}{r} \sqrt{\frac{r+x}{2}} Lg + \frac{r+x}{r} \sqrt{\frac{r-x}{2}} \Theta \\ h_1 &= \frac{2\sqrt{ay}(x-a)}{r_a^2}, \quad h_2 = \frac{2\sqrt{ay}^2}{r_a^2} \end{aligned} \quad (22)$$

であり、 Lg, Θ は

$$\begin{aligned} Lg &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{r+a+\sqrt{2a(r+x)}}{r+a-\sqrt{2a(r+x)}} \right| \\ \Theta &= \arctan \frac{\sqrt{2a(x-a)}}{r-a} \end{aligned} \quad (23)$$

である。また、 r, r_a は 図-2 に示すように、要素の両端点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_a = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ で

ある。対応する応力および影響関数 D_{ij} は (21) を x, y で微分することにより計算することができる¹⁴⁾。

2.3 クラック進展解析

ここでは、Erdogan と Sih の方法^{11), 15)}に従ってクラックの進展解析を行なった。以下にその概要を述べる。

(1) 応力拡大係数 k_1, k_2 の決定

クラック先端の変位場の特異部分は (18) で与えられるので、クラック先端要素を使えば、応力拡大係数 k_1, k_2 は容易に決定できる。クラック先端要素上の変位の特異部分は (21) より

$$[u_i] = \sqrt{2s/a} [u_i](a/2) \quad (24)$$

であるから、(18) と比較して、応力拡大係数 k_1, k_2 は

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{2G}{\sqrt{a}(\kappa+1)} n_i [u_i](a/2) \\ k_2 &= \frac{2G}{\sqrt{a}(\kappa+1)} t_i [u_i](a/2) \end{aligned} \quad (25)$$

で決定できる。ここに、 n_i, t_i はクラック先端要素の法線および接線方向の単位ベクトルである。

(2) 進展方向の決定

Erdogan と Sih に従って、クラックはその先端から進展し、その方向は、クラック開口応力成分 σ_θ (式 (19)₂) が最大となる方向になると仮定する。クラックの進展方向をクラック軸からの角度 θ で表すと、方向決定のための条件は、せん断応力成分 $\sigma_{r\theta}$ が 0 になることと同じであるから、(19)₃ より、 $\theta = \pm\pi$ の場合を除いて、

$$k_1 \sin \theta + k_2 (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (26)$$

となる。この方程式の解は

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8\gamma^2}}{4\gamma}, \quad \gamma = \frac{k_2}{k_1} \quad (27)$$

である。 θ としては、二根のうち、(19)₂ で与えられる σ_θ が大きくなる方の値を選ぶ。

(3) 進展条件

Erdogan と Sih¹¹⁾は k_1, k_2 の値が (k_1, k_2) 空間に設定した規準楕円の外部にあることをクラックの進展条件とした。実際の進展解析の過程においては $|k_2| \ll |k_1|$ となるので、 k_1 だけで進展条件を決めるのが簡便である。ここでは、いくつかの試行の結果により、安定に進展解析ができる条件として、 $k_T > 0, k_C < 0$ を定数として、進展条件を

$$k_1 \begin{cases} > k_T & (k_1 > 0) \\ < k_C & (k_1 < 0) \end{cases} \quad (28)$$

とした。圧縮側と引張側の閾値を変えて $k_T \leq |k_C|$ としている。このような条件を設けたのは、複数クラックの進展解析の場合には、一度停止したクラックが周辺条件の変化によって再び進展を開始することがあるからである。物理的な根拠は希薄であるが、圧縮応力下における進展解析の場合には、 $|k_C| = 10k_T$ 程度にとると解析の安定が良いようである。

進展の継続を別の立場から監視するために、クラックが新たに進展することにより発生するエネルギーを計算している。クラックが進展を継続するためには発生エネルギーが負でなければならない。クラック S_K の一段階の進展による発生エネルギーは、該当クラック以外の外部からの影響によるクラック表面の応力ベクトル T_i がクラック開口変位の増分 $\Delta[u_i]$ によって行なう仕事

$$\Delta U = \int_{S_K} T_i \Delta[u_i] ds \quad (29)$$

として評価できる。クラック表面では応力ベクトルの総和は0であるから、 T_i はクラック S_K 自身が S_K 面上に発生させる応力ベクトルの符号を逆転したもの

$$T_i = \int_{S_K} U_{ij}(x; y) [u_j](y) ds_y \quad (30)$$

に一致する。したがって、進展による発生エネルギー

$$\Delta U = \int_{S_K} \int_{S_K} U_{ij}(x; y) [u_i](x) \Delta[u_j](y) ds_x ds_y \quad (31)$$

はポテンシャル論で U_{ij} のエネルギー積分と呼ばれているものの変分の形となっている。

(4) 進展解析の手順

クラック進展の数値解析は以下のような手順で行なった：

1. 境界要素方程式 (14), (15) を解いて、境界値 u_i, s_i およびクラック開口変位 $[u_i]$ を求める。
2. それぞれのクラック先端ごとに、(25) から応力拡大係数 k_1, k_2 を求め、進展条件を満足する場合には、さらに、(27) から進展方向 θ を決定して、長さ Δl だけクラックを伸ばす。
3. (29) により ΔU を求めて、 $-\Delta U > \epsilon$ の場合には、クラックが伸び続けるとして、1. からの計算を繰り返し、そうでない場合にはクラックの伸びが止まったものとする。

進展長 Δl は、通常はクラック要素の平均長にとっているが、 $|k_1|$ がある値よりも小さい場合には $|k_1|$ に比例させて短くした。また、手順 3. において、クラックの両端が伸びる場合には、(29) のかわりに、簡略的に、

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= \int_{S_K} T_i \Delta[u_i] (s/l_{\text{crack}}) ds \\ \Delta U_2 &= \int_{S_K} T_i \Delta[u_i] (1 - s/l_{\text{crack}}) ds \end{aligned} \quad (32)$$

を用いて、両端それぞれのエネルギー増分とした。ここに、 l_{crack} はクラックの全長である。

3. クラック解析への高速多重極法の応用

境界要素法によりクラック解析を行なうためには、 $2 \times (N_B + N_1 + N_2 + \dots + N_M)$ 元の密行列の係数を持つ連立一次方程式を解かなければならない。クラック要素の数 $N_1 + N_2 + \dots + N_M$ はクラックの進展とともに増大するから、多数のクラックの進展解析を行な

うとすると、巨大な規模の方程式を解くことが必要となる。ここでは、大規模な境界要素方程式を解くために、高速多重極境界要素法⁷⁾をクラック解析に応用する。

3.1 高速多重極境界要素法

高速多重極法^{8),9)}は再帰的アルゴリズム (代表的なものにクイックソートやFFTがある) の一種であって、 N 個の質点 (電荷) 間の相互作用を高速に計算するための方法である。高速多重極法は多数の質点によるポテンシャル場を多重極展開とその局所展開によって表現することを計算の基礎としている。計算を再帰的に進めるために、質点の幾何学的な分布を木の構造で表現し、多重極展開および局所展開がそれぞれの展開中心の移動によって再展開できることを使う。

ポテンシャルの値は次の5段階の過程を経て計算される (図-3)：(a) 質点によるポテンシャル場をその近傍の点における多重極展開として表す (MP)。 (b) いくつかの多重極展開をグループ化して、新しい一つの点における多重極展開として表す (M2M)。質点集合の木の構造の上で、枝から根の方向にこれを繰り返せば、すべての階層の質点グループについて多重極展開が得られる。 (c) 多重極展開を多重極点から離れた点のまわりの局所展開に展開しなおす (M2L)。 (d) 局所展開をその収束半径内の部分要素グループの代表点まわりの局所展開に展開しなおす (L2L)。木の構造の上で根から枝の方向にこれを繰り返せば、より小さな質点グループについての局所展開が得られる。 (e) 局所展開を使ってポテンシャル値 (あるいは勾配) を計算する (LC)。なお、多重極展開を有限項で打ち切る場合には、ある程度離れた点においてしか必要精度が得られないので、計算点の近傍の質点からの影響は直接に計算する。この計算法による N 個の質点間の相互作用の計算量は $O(N)$ の程度となる。

境界要素法は、境界上に分布させた密度によるポテ

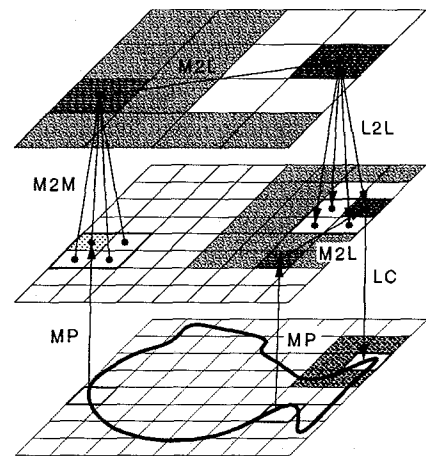


図-3 高速多重極法における計算手順

ンシャルとして場を表現しておいて、与えられた境界条件を使って未知の密度分布を決定する解法である。離散化により得られた連立一次方程式 (14), (15) の右辺を計算することは N 個の要素によるポテンシャル場を N 個の境界上の点で評価することにほかならない。したがって、質点を要素に読みかえれば、高速多重極法をそのまま (14), (15) の右辺の計算に利用することが可能である。境界要素法において、離散連立一次方程式を繰り返し解法を使って解き、もっとも計算負荷の大きい行列ベクトル積の計算に高速多重極法を利用して計算を高速化する方法が高速多重極境界要素法である^{6), 7)}。この方法は要素数が 1000 を越える問題において効果を発揮し、従来の方法では特殊な計算機を使わなければ解けない数 10 万要素程度の問題であっても容易に計算できる。巨大な問題においては、その計算効率は従来法の数 1000 倍に達する (外挿による比較)。

境界要素法に高速多重極法を適用するために必要な準備は、問題となる場の多重極展開および局所展開とそれらの間の変換関係、および、要素の影響関数の多重極展開である。以下では、平面弾性問題における多重極展開および局所展開について概説し、一定要素およびクラック先端要素の多重極展開を導く。

3.2 平面弾性問題における高速多重極法

(1) 複素弾性論における基本特異解の表現

平面静弾性問題における多重極展開とその変換の関係を表現するためには複素弾性論¹²⁾の知識を利用すると便利である。以下では、複素平面 $z = x_1 + ix_2$ における複素関数で式を記述する。

よく知られているように、つり合い条件を満足する 2 次元の応力場は重調和方程式を満足する Airy の応力関数 ψ により表される。さらに、複素平面において、重調和関数 ψ は二つの解析関数 $\phi(z)$, $\chi(z)$ により、

$$\psi = \bar{z}\phi(z) + z\bar{\phi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) \quad (33)$$

で表される。これらの解析関数を用いて、変位は

$$D = u_1 + iu_2 = \frac{1}{G} \left[\kappa\phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z}) \right] \quad (34)$$

応力は

$$\begin{aligned} \Theta &= \sigma_{11} + \sigma_{22} = 4 \left[\phi'(z) + \bar{\phi}'(\bar{z}) \right] \\ \Phi &= \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = -4 \left[z\bar{\phi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

と表される。多重極展開とその係数の変換関係を表現するために、これらの解析関数 $\phi(z)$, $\chi(z)$ を使おう。

基本特異解 (7) による変位 $u_i(x) = G_{ij}(x; y)P_j(y)$ に対応する解析関数 ϕ, χ は

$$\begin{aligned} \phi(z) &= -\frac{P}{4\pi(\kappa+1)} \log z \\ \chi(z) &= \frac{\kappa\bar{P}}{4\pi(\kappa+1)} z \log z \end{aligned} \quad (36)$$

である。ここに、 $P = P_1 + iP_2$ は点 y に作用する集中力を表す。また、ここでは、 y を原点とっている。同様に、第二基本特異解 (8) による変位 $u_i(x) = S_{ij}(x; y)U_j(y)$ に対応する解析関数 ϕ, χ は

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{GUn}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{z} \\ \chi(z) &= -\frac{G(U\bar{n} + \bar{U}n)}{2\pi(\kappa+1)} \log z \end{aligned} \quad (37)$$

である。ここに、 $U = U_1 + iU_2$ は点 y に作用する変位のくいちがい量、 $n = n_1 + in_2$ は点 y における単位方向ベクトルである。

式 (36) に原点の移動 $z = 0 \rightarrow z - z_0 = 0$ をほどこせば、多重極展開の形が得られる。このとき、(33) の式の形が保存されるためには、 $\phi(z)$, $\chi(z)$ は

$$\phi(z) \rightarrow \phi(z - z_0), \quad \chi(z) \rightarrow \chi(z - z_0) - \bar{z}_0\phi(z - z_0) \quad (38)$$

を満足するように変換されなければならない。原点移動の結果得られる多重極展開の一般形は

$$\begin{aligned} \phi(z) &= -M_0 \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{z^n} \\ \chi(z) &= N_{-1}z \log z - N_0 \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{z^n} + C \end{aligned} \quad (39)$$

となる。ここに、 M_n , N_n は多重極展開の係数であり、 C は変位および応力には関与しない定数である。

基本特異解の多重極展開 (MP) 基本特異解 (36) の多重極展開の係数は、

$$\begin{aligned} M_0 &= AP, \quad M_n = AP \frac{z_0^n}{n} \\ N_{-1} &= A\kappa\bar{P}, \quad N_0 = A(\kappa\bar{P}z_0 - P\bar{z}_0) \\ N_n &= A \left[\kappa\bar{P} \frac{z_0^{n+1}}{n(n+1)} - P \frac{\bar{z}_0^n}{n} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

第二基本特異解 (37) の多重極展開の係数は、

$$\begin{aligned} M_0 &= 0, \quad M_n = BU_n z_0^{n-1} \\ N_{-1} &= 0, \quad N_0 = B(U\bar{n} + \bar{U}n) \\ N_n &= B \left[(U\bar{n} + \bar{U}n) \frac{z_0^n}{n} - Un\bar{z}_0 z_0^{n-1} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

となる。ここに、係数 A, B をそれぞれ $A = 1/4\pi(\kappa+1)$, $B = G/2\pi(\kappa+1)$ で定義した。

(2) 多重極展開の変換と局所展開

多重極点の移動 (M2M) 多重極展開 (39) に原点移動 $z = 0 \rightarrow z - z_0 = 0$ をほどこせば、多重極点の移動に伴う係数の変換関係が得られる。新しい多重極係数を

$\tilde{M}_n, \tilde{N}_n$ とすれば、この関係は、

$$\begin{aligned}\tilde{M}_0 &= M_0 \\ \tilde{M}_n &= \frac{z_0^n}{n} M_0 + \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} z_0^{n-m} M_m \\ \tilde{N}_{-1} &= N_{-1}, \quad \tilde{N}_0 = z_0 N_{-1} + N_0 - \bar{z}_0 \tilde{M}_0 \\ \tilde{N}_n &= \frac{z_0^{n+1}}{n(n+1)} N_{-1} + \frac{z_0^n}{n} N_0 \\ &\quad + \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} z_0^{n-m} N_m - \bar{z}_0 \tilde{M}_n\end{aligned}\quad (42)$$

となる。

多重極展開から局所展開へ (M2L) 変位あるいは応力を求めるべき点が多重極点から十分にはなれている場合には、複素ポテンシャルの求めるべき点の近傍での Taylor 展開

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n, \quad \chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n z^n \quad (43)$$

を用いてこれらの量を計算することができる。多重極展開 (39) を z_0 のまわりに Taylor 展開して、この係数を求めると

$$\begin{aligned}K_0 &= -M_0 \log z_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_m}{z_0^m} \\ K_n &= \frac{(-1)^n}{z_0^n} \left[\frac{M_0}{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} \frac{M_m}{z_0^m} \right] \\ L_1 &= N_{-1}(\log z_0 + 1) - \frac{N_0}{z_0} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m N_m}{z_0^{m+1}} + \bar{z}_0 K_1 \\ L_n &= \frac{(-1)^n}{z_0^n} \left[\frac{z_0 N_{-1}}{n(n-1)} + \frac{N_0}{n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} \frac{N_m}{z_0^m} \right] + \bar{z}_0 K_n\end{aligned}\quad (44)$$

となる。

局所展開点の移動 (L2L) Taylor 展開 (43) の展開中心を $z = 0 \rightarrow z + z_0 = 0$ に移動すれば、新しい係数 $\tilde{K}_n, \tilde{L}_n$

$$\begin{aligned}\tilde{K}_n &= \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} z_0^{m-n} K_m \\ \tilde{L}_n &= \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} z_0^{m-n} L_m + \bar{z}_0 \tilde{K}_n\end{aligned}\quad (45)$$

が得られる。

局所展開による変位と応力 (LC) Taylor 展開 (43) を (34), (35) に代入すれば、変位は

$$GD = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n - z \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{K}_n \bar{z}^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{L}_n \bar{z}^{n-1} \quad (46)$$

応力は

$$\begin{aligned}\Theta &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} n [K_n z^{n-1} + \bar{K}_n \bar{z}^{n-1}] \\ \Phi &= -4 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) [\bar{K}_n z \bar{z}^{n-2} + \bar{L}_n \bar{z}^{n-2}]\end{aligned}\quad (47)$$

で表される。

3.3 影響関数の多重極展開

(1) 一定要素

図-4 に示すように、区間要素を $E_I = [-z_e, z_e]$ とし、多重極点を区間の中央にとる。影響関数の定義 (16) に

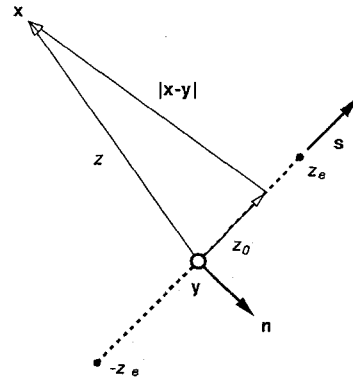


図-4 一定要素と多重極点

よると、影響関数は基本特異解の y に関する積分で表される。一方、基本特異解の多重極展開 (39), (40) では、 y は多重極点からの相対位置 z_0 で表される。多重極表現 (39) において点 z_0 は係数 M_n, N_n の中にしか現れないので、結局、多重極係数を要素上で直接積分すれば影響関数の多重極係数が得られることになる。要素の線素は $ds = (|z_e|/z_e) dz_0$ であるから、要素 E_I による多重極係数 $\tilde{M}_n$ は

$$\tilde{M}_n = \int_{E_I} M_n(z_0) ds_y = \frac{|z_e|}{z_e} \int_{-z_e}^{z_e} M_n(z_0) dz_0 \quad (48)$$

で計算される。

基本特異解の多重極係数 (40) についてこの積分を実行すれば、影響関数の多重極係数

$$\begin{aligned}\tilde{M}_0 &= 2AP|z_e|, \quad \tilde{M}_n = AP \frac{|z_e| z_e^n}{n(n+1)} \quad (\text{even}) \\ \tilde{N}_{-1} &= 2A\kappa \bar{P}|z_e|, \quad \tilde{N}_0 = 0\end{aligned}\quad (49)$$

$$\tilde{N}_n = 2A \frac{|z_e| z_e^n}{n(n+1)} \left[-P \bar{z}_e + \frac{\kappa \bar{P} z_e + P |z_e|}{n+2} \right] \quad (\text{odd})$$

が得られる。係数 A は (40) におけるものと同じである。また、 $\tilde{M}_n$ の奇数項、 $\tilde{N}_n$ の偶数項は 0 である。

第二基本特異解についても、要素の単位外向き法線が $n = -iz_e/|z_e|$ となることに注意して、多重極係数 (41)

を積分すれば、

$$\begin{aligned}\tilde{M}_0 &= 0, & \tilde{M}_n &= -2iBU \frac{z_e^n}{n} \quad (\text{odd}) \\ \tilde{N}_{-1} &= 0, & \tilde{N}_0 &= 2iB(U\bar{z}_e - \bar{U}z_e) \\ \tilde{N}_n &= 2iBz_e^n \left(\frac{U\bar{z}_e}{n} - \frac{\bar{U}z_e}{n+1} \right) \quad (\text{even})\end{aligned} \quad (50)$$

が得られる。係数 B は (41) におけるものと同じである。また、 $\tilde{M}_n$ の偶数項、 $\tilde{N}_n$ の奇数項は 0 である。

(2) クラック要素

クラック先端要素 $E_I = [O, z_e]$ について、クラック先端 O に多重極点をおく。近似基底 (20) を使って、(48) と同様に、第二基本特異解の多重極係数 (41) の積分を行なう。 $\sqrt{s/a} = (z_0/z_e)^{1/2}$ と書けるから、クラック先端要素 E_I による多重極係数 $\tilde{M}_n$ は

$$\tilde{M}_n = \frac{\sqrt{2}|z_e|}{z_e} \int_O^{z_e} M_n(z_0) \left(\frac{z_0}{z_e} \right)^{\frac{1}{2}} dz_0 \quad (51)$$

となる。この積分を実行すると、クラック先端要素の影響関数の多重極係数は

$$\begin{aligned}\tilde{M}_0 &= 0, & \tilde{M}_n &= -\sqrt{2}iBU \frac{z_e^n}{n+1/2} \\ \tilde{N}_{-1} &= 0, & \tilde{N}_0 &= \frac{2\sqrt{2}i}{3} B(U\bar{z}_e - \bar{U}z_e) \\ \tilde{N}_n &= \frac{\sqrt{2}iBz_e^n}{n+3/2} \left[U\bar{z}_e + \frac{U\bar{z}_e - \bar{U}z_e}{n} \right]\end{aligned} \quad (52)$$

となる。

4. 数値解析例

クラック進展解析の妥当性および多数クラックの同時進展解析の可能性を検証するために、いくつかの例について進展解析を行なった。以下の解析例においては、進展の経路と同時にクラックの開口変位のパターンを示す。図において、中心軸はクラック面であり、その上下の線はクラック面の変位を表している。上下方向の細線は変位方向であり、5要素ごとの変位を描いている（圧縮方向変位は破線）。それぞれの図において変位の尺度は一定にしてあるが、スケールは入っていない。変位の量については進展前のクラックについて正解との比較を行っており検証済みである。現状では、クラック先端における変位の丸みによる k_1 値の大小、進展程度による変位の相対的な増加、変位のパターン、複数クラックの場合におけるクラックごとの変位の差、変位の方向性などが読みとれれば十分である。

4.1 単一クラックの進展解析

クラック進展解析の妥当性を確認するために無限領域中の単一クラックの解析を行なった。図-5 は引張クラックの例であり、図-6 は圧縮クラックの例である。初期のクラックの傾きは水平から 30° であり、外部応力は上下方向の一軸応力である。

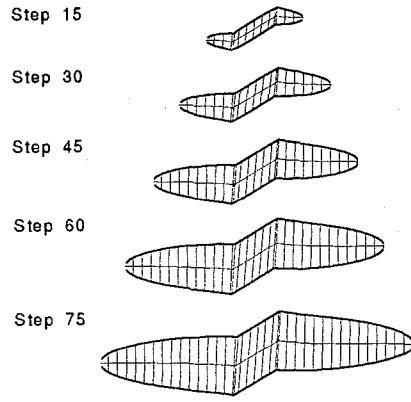


図-5 引張応力下の単一クラックの進展解析

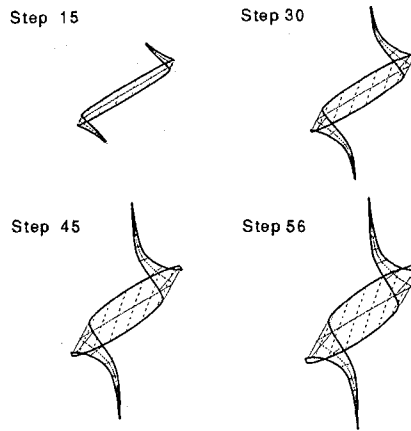


図-6 圧縮応力下の単一クラックの進展解析

クラックの進展経路は妥当なものである。引張クラックでは、解析ステップが進むほど応力拡大係数 k_1 の値が大きくなるので、クラックは無限に伸び続ける。解析ステップが進むほどクラック先端の変位が丸くなっているのは k_1 の増大を表している。圧縮クラックの場合には、初期クラックの部分では圧縮方向の変位が、進展部分では引張方向の変位が生じている。図では、初期クラック部分の下側の面の変位がクラックの上側に描かれていることに注意して欲しい。初期クラック面のせん断変位は解析ステップが進むほどより大きくなるが、このせん断変位は左ずれである。

図ではわかりにくいだが、圧縮クラックの場合にはクラックの進展が停止する前には、進展方向がジグザグになってくる。Erdogan と Sih の規準による進展方向決定に問題があるかもしれない。

4.2 少数クラックの進展解析

3 個のクラック群のクラック進展解析の例を挙げる。図-7 は引張クラックの例であり、図-8 は圧縮クラックの例である。いずれも、初期クラックの傾きは 30° で

あり、引張クラックの場合は水平に初期クラックの長さの2倍の中心間隔で、圧縮クラックの場合は鉛直に初期クラックの長さの1.5倍の中心間隔で並べている。クラックの配置は、クラックどうしが相互作用を及ぼしながら、かつ、結合を起こしにくいように配列してある。クラックの進展部分は、お互いに影響しあいながら、ほぼ平行に伸びる。最終段階では、引張クラックの進展部は他のクラックに平行に、圧縮クラックの進展部は折れ曲がり部に向かって伸びている。また、この段階で、引張クラックでは k_1 が減少していくのに対し、圧縮クラックでは逆に k_1 に増加の傾向が見られた。

Step 25



Step 45



図-7 引張応力下の水平に3つ並んだクラック

Step 25



Step 57



図-8 圧縮応力下の鉛直に3つ並んだクラック

4.3 多数クラックの進展解析

高速多重極境界要素法を使って多数クラックの同時進展解析を試みた。以下では、規則的に配列された25個のクラックとランダムに配置した10個のクラックの圧縮応力下における進展解析の例を示す。目標とする数100～数1000には遠く及ばないが、この程度の数のクラック群であれば、現在の手法でも解析可能である。ここではむしろ、これらの解析から得た多数クラックの同時進展解析における問題点について述べる。

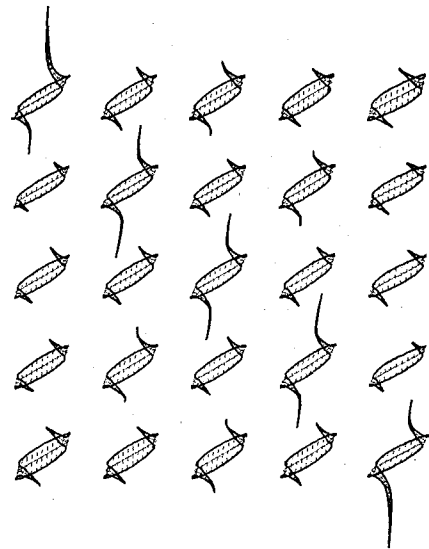


図-9 圧縮応力下の5×5に並んだクラック群

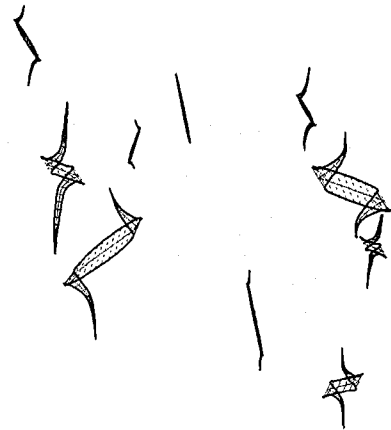


図-10 圧縮応力下におけるランダムに分布した10個のクラック

規則的分布の例 規則的に分布したクラック群の解析例として、傾きが 30° のクラックを5行5列に格子状に配列したものの圧縮応力下での進展解析結果を図-9に示す。クラックの中心間隔は初期クラック長の3倍である。初期要素数は $40 \times 25 = 1000$ であり、解析停止時の総要素数は2000程度であった。

図から明らかなように、中央左上から右下の方向に並んだクラックの進展が著しい。これは無限領域中のこの部分にだけクラックが集合していることによる応力場の変状によるものであるが、このためにクラックごとの進展長が著しく異なってくる。その結果として、順調に進展を続けるクラックには問題が起こりにくいが、進展の停止・進行を繰り返すクラックでは単一クラックの解析にも現れた進展方向のジグザグ現象が現れて、クラックの進展方向が不安定になってしまう。図は進

展が不安定になりだす直前の結果である。解析をさらに進めるためには、進展方向が安定するような方向決定の規準が必要である。

ランダム分布の例 ランダムに分布したクラック群の解析例として、10個のクラックを乱数を使って配置したものを解析した。結果を図-10に示す。クラックを分布させた領域の大きさに対して、クラックの長さを $1/20 \sim 1/5$ として、クラックどうしの結合が起こりにくいような配置を選んで解析を行なっている。初期要素数は460で、図に示す65段階目の要素数は1235であった。

クラックの大きさとその傾きがバラバラなので、クラックの進展状況はそれぞれのクラックごとに異なる。したがって、この解析においても規則配列の場合と同様な進行方向の不安定が生じる。また、このようなランダムなクラックの場合においてはクラックどうしの結合が比較的早い段階で生じる。解析を継続させるためには、クラックどうしの結合のモデル化を導入することが必要である。

5. おわりに

多数のクラックの同時進展の挙動を正確に追跡するための手法を開発することを目的として、手法開発の基本方針をたて、それに基づいて、2次元等方弾性体中のクラック群の解析法を構築し、検証のための数値解析を行なった。手法の要点は

- 境界要素法を利用
- クラック先端要素を導入
- 高速多重極法による解析の効率化

である。数10個程度のクラックの進展解析を行なった結果、これらの手法の組み合わせが多数クラックの解析に有効であることが確認された。とくに、多数クラックの解析には計算容量の面からも高速多重極法の利用は必須であることがわかった。

おわりにあたって、本研究から得られた解析上の問題点と今後の研究の進展の方向について述べておく：

- 多数のクラックを安定に進展させること。とくに、ErdoganとSihの規準による解析では、圧縮クラックの進展方向が不安定になりやすい。クラックの折れ曲がりを考慮した進展方向の選択が必要であろう。
- クラックどうしの結合を実現すること。多数のクラックが存在する場合には、比較的早い段階でクラックどうしが結合してしまう。複雑な進展過程を追跡するためにはクラックどうしの結合モデルの導入が必要である。
- 解析の高精度化。以上の2点において、とくにクラック近傍の応力解の精度が解析の成否を左右する。解析の高精度化が必要である。

解析法の実用化にあたっては、クラック面の摩擦、圧縮クラックの適切な解析、界面上のクラック、あるいは、3次元問題への拡張などが必要である。しかしながら、これらの問題点への対応は境界要素法の枠内で解決できることがらであり、その対応の方法もすでに良く知られている。一方、上にあげた問題点は「多数のクラック」を扱う上で生じる問題であり、「多数クラックの進展解析」に本質的な問題である。したがって、これらの問題をまず解決することが今後もっとも必要な研究の方向となろう。これらの問題の解決の糸口となる解析精度の高精度化へ向けて現在研究を進めているところである。

参考文献

- 1) Bilby, B.A.: Continuous distributions of dislocations, in *Progress in Solid Mechanics* Vol. 1 (eds. I.N. Sneddon and R. Hill), Chapter VII, pp. 329-398, North-Holland, 1960.
- 2) 奥井義昭, 堀井秀之, 秋山成興: マイクロメカニクスに基づく連続体理論と変形の局所化現象の解析, 土木学会論文集 No.501/I-29, pp. 55-64, 1994.
- 3) マンデルブロ, B.B. (広中平祐 監訳): フラクタル幾何学, 日経サイエンス社, 1985.
- 4) Sumi, Y. and Z. Wang: Simulation of a system of growing cracks in a heterogeneous material, *Proc. Conf. on Computational Engineering and Science*, Vol.1, pp. 931-934, 1996.
- 5) Yang, G. and H. Hikosaka: Nominal strength size effect of brittle materials based on micromechanics, *J. Structural Engineering*, Vol.43A, pp. 485-492, 1997.
- 6) 福井卓雄, 持田哲郎: 高速多重極境界要素法の2次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, 13 pp. 131-136, 1996.
- 7) 福井卓雄, 服部純一, 土居野優: 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, 43A pp. 373-382, 1997.
- 8) Greengard, L. and V. Rokhlin: A fast algorithm for particle simulations, *J. Comp. Phys.*, 73, pp. 325-348, 1987.
- 9) Greengard, L.: A short course on fast multipole methods: *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July*, 1996.
- 10) Lambert, C.G. and J.A. Board, Jr.: A multipole-based algorithm for efficient calculation of forces and potentials in macroscopic periodic assemblies of particles, Technical Report 95-001, Department of Electrical Engineering, Duke University, 1995.
- 11) Erdogan, F. and G.C. Sih: On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Engng.*, 85, pp. 519-527, 1963.
- 12) Green, A.E. and W. Zerna: *Theoretical Elasticity*, 2nd ed. Oxford, 1968.
- 13) Shi, G.C. and H. Liebowitz: Mathematical theories of brittle fracture, in *Fracture II* (ed. H. Liebowitz), Academic Press, 1968.
- 14) 福井卓雄, 持田哲郎, 井上耕一: 高速多重極境界要素法によるクラック群の伸展解析, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 7 pp. 25-30, 1997.
- 15) 村上敬宣: き裂伝播径路の予知について, 日本機械学会論文集, A編, 46, pp. 729-738, 1980.

(1997年9月26日 受付)