

応力関数の構成とプロセスゾーンの推定法について

Constitution of stress function and estimation of the process zone length

藤井康寿*・中川建治**

Kouju Fujii and Kenji Nakagawa

* 工博 岐阜大学助手 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸 1-1)

** 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸 1-1)

Based on the Westergaard's solution, four kinds of fundamental solutions with the fracture process zone for external crack problems which are subject to tension, shear, bending around the x-axis or expansion are yielded. From these solutions, we will derive a curve of $\partial u / \partial b$ (or $\partial v / \partial b$) that is to differentiate the displacement with respect to the length of process zone, and present a method to estimate the length of process zone from $\partial u / \partial b$. Furthermore, it shows that it is impossible to obtain the length of process zone from the experimental measurement of load and displacement reversely.

Key Words: external crack, fracture process zone, stress function, $\partial u / \partial b$ curve

1. まえがき

土木工学の分野における構造物の主要材料であるコンクリートや構造物の基礎に関連する岩盤のクラックに関する研究では、金属材料に対して発展されてきた線形破壊力学を適用することは不都合であることが判明してきた。その原因はクラック先端部分の特性にある。鋼材のような延性材料では、クラック開口部の引張り応力とせん断応力は0であり、その先端部には塑性領域が広がってクラック線上で連続的な塑性の伸びが現れる。他方、コンクリート等の混成材料においては、巨視的なクラック開口部の応力は0であることは同じであるが、その先端部には連続的な塑性伸びではなく不連続な微小ひびわれ(マイクロ・クラック)から成る領域(フラクチャープロセスゾーン)が生成される。したがって応力の連続的な変化は乱されて巨視的な把握しか望めなくなり、いわゆる応力の軟化現象が現れると考えるのが妥当なものとなる。したがって、コンクリートなどの材料に対して破壊現象をシミュレーション(あるいは予測する)するには、プロセスゾーンを主体とする破壊力学モデルを構成することが基本となり、今日研究者の中心的課題の一つと考えられている。

プロセスゾーンはマイクロクラック等が集中する部分であって、変位やひずみは必ずしも連続的ではないので、マクロ的な表現でしか把握され得ない領域である。この問題に対して、種々の力学モデルが提案されて優れた研究成果が報告されている[1],[2]が、著者等もプロセス

ゾーンに相当する力学モデルとして解析関数を基礎にした理論解を提案している。この領域に滑らかな開口変位と有限な応力集中が共存する区間(遷移区間あるいはフラクチャープロセスゾーン)を設定して、弾性解でありながらコンクリート系のクラックの実験結果として報告されている応力集中を十分に近似し得る応力分布形状を構成する解析解を提案した[3]~[8]。

応力と開口変位が共存する区間を設定することは結果的には、Dugdale[9]によって既にモデルが提案されている。しかし、それはクラック先端において応力が降伏応力(σ_{yd})へ直立して非線形領域においても一定値 σ_{yd} となる応力分布を構成することを目的としたモデルであり、緩やかな勾配で立ち上がる応力集中を実現するモデルではない。

クラック先端にプロセスゾーンを設定する解析法は、コンクリートを主体とした引張軟化曲線を導入した数値解析手法(有限要素法が主体)のみである。著者等の提案し活用している解は、クラック先端の応力および変位を直接論じることができる解析解であるため、最近の数値解析が主体の破壊力学モデルとは異なる。著者等の解析モデルは、Barenblatt[10]が概念的に提唱した考え方を実現させるものであり、スリット状クラックを有するWestergaard[11]およびDugdaleが与える解の不都合な部分をモディファイして、混成材料の破壊問題を表現するには都合の良い解析解と見なされる。

本研究では、はじめにWestergaardの解を基本にして、開口部で応力が0の境界条件を満足しながらも解の特

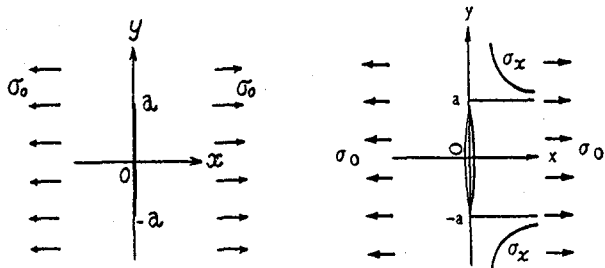


図-1 一様引張り応力を受け、直線状クラックを持つ無限板

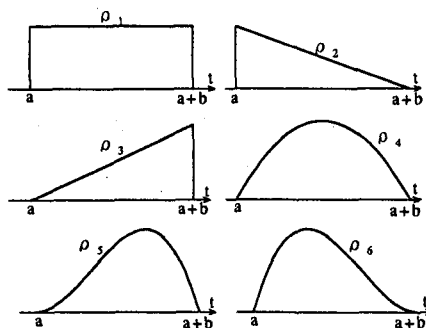


図-2 重み関数 $\rho_j(t)$

性を変更する操作[3]を施すことにより、4種類の外側クラック(有限連続板のクラック)の基本解を誘導する。次に提案した応力の平滑化手法を実用的なものにするキーポイントとなる「クラック先端のプロセスゾーンの長さを推定する計測点の選び方」を提示する。

2. 基礎式

2次元弾性問題の複素応力関数を F とすると、 $F(x, y)$ は任意の調和関数 $\psi(z), \phi(z)$ によって

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F(x, y) &= 0 \\ \nabla^2 &= \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \bar{z}\psi(z) + \phi(z) \\ z &= x + iy, \bar{z} = x - iy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

と与えられる。 $F(x, y)$ は複素関数で構成されるため応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ および変位 u, v は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &\equiv \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] \\ &= \operatorname{Re} [2\psi'(z) - \{\phi''(z) + \bar{z}\psi''(z)\}] \\ \sigma_y &\equiv \operatorname{Re} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] \\ &= \operatorname{Re} [2\psi'(z) + \{\phi''(z) + \bar{z}\psi''(z)\}] \\ \tau_{xy} &\equiv \operatorname{Re} \left[-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right] \\ &= \operatorname{Re} [-i\{\phi''(z) + \bar{z}\psi''(z)\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$2G(u - iv) = \kappa \bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{z}\psi'(z) - \phi'(z) \dots\dots\dots (4)$$

ただし複素変数 z は $z = x + iy$ (共役の場合 $\bar{z} = x - iy$) とし、式中の Re は実数記号である。 G は

せん断弾性係数、 κ はポアソン比 ν の関数で平面応力では $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ 、平面ひずみでは $\kappa = (3 - 4\nu)$ である。

従来から活用されている応力関数は式(3)に示されるように $\psi(z), \phi(z)$ の2つの関数で構成される。本研究では y 軸上にクラックがあって、この線上で $\sigma_x = 0$ あるいは $\tau_{xy} = 0$ の応力状態のみを対象にするので、関数 ϕ は ψ の従属関数なり、関数 ψ のみで応力と変位が与えられる。このような手法は Westergaard [11] により既に導かれている。本研究ではこの手法をさらに押し進めて簡単な代数関数 ψ を見つけだすことにより、中心クラックのみならず外側クラック(有限連続板のクラック)の問題に対しても、4種類の外力が個別に作用したときの基本解が有機的な関連づけにより一括して求められることを示す。さらに得られた変位関数を用いてプロセスゾーンの長さ b の推定法を検討する。

3. Westergaard 関数の平滑化

図-1に示すように y 軸上に長さ $2a$ のクラックを有する等方等質な弾性板に無限遠方で一様引張り応力 $\sigma_x = \sigma_0$ が作用するならば、クラック線上 ($|y| > a, x = 0$) の応力集中は、

$$\sigma_x = \sigma_0 \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \dots\dots\dots (5)$$

となることが Westergaard [11] によって示されている。この応力分布は図-1に示すように y 軸上 $y = \pm a$ で無限大の応力集中となる。クラック先端の急変化の要因を平滑化する手法として、著者等が提案し [3] ~ [6] 四点曲げコンクリート梁の破壊過程のシミュレーションに活用 [7], [8] した重み積分法を用いる。

すなわち、クラックの長さを表すパラメータ a を積分変数 t として応力関数 $F(z, t = a)$ に適当な重み $\rho_j(t)$ を乗じつつ区間 $(a \leq t \leq a + b)$ にわたって積分する手法を適用するのである。

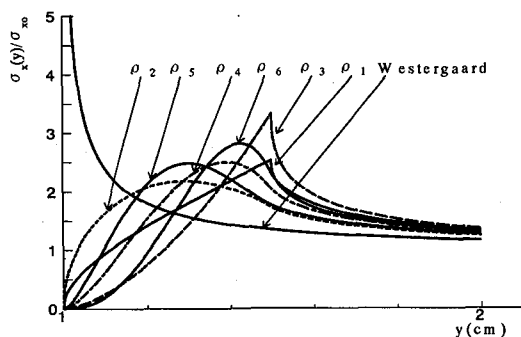


図-3 応力 $\sigma_x(y)$

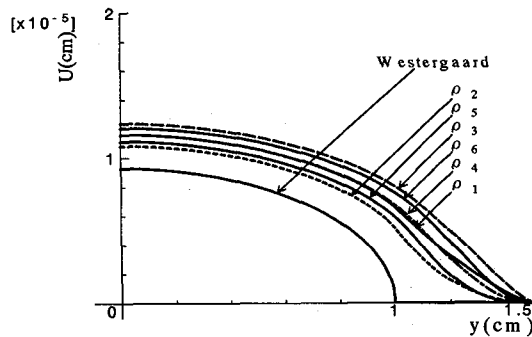


図-4 開口変位 $u(y)$

$$F_j(z, a, b) = \int_a^{a+b} \rho_j(t) F(z, t=a) dt \\ = z\psi(z, a, b) + \phi(z, a, b) \cdots (6)$$

ただし、重み関数 $\rho_j(t)$ は区間 $(a \leq t \leq a+b)$ で基準化した総面積 1 の関数で次のように定義される (図-2 参照) [3].

(a) 長方形: $\rho_1(t) = 1/b \cdots \cdots (7)$

(b) 一次式 その 1:

$$\rho_2(t) = 2(a+b-t)/b^2 \cdots \cdots (8)$$

(c) 一次式 その 2:

$$\rho_3(t) = 2(t-a)^2/b^2 \cdots \cdots (9)$$

(d) 二次式:

$$\rho_4(t) = -6\{t^2 - (2a+b)t + a(a+b)\}/b^3 \\ \cdots \cdots (10)$$

(e) 三次式 その 1:

$$\rho_5(t) = (12/b^4)\{t^3 - (3a+2b)t^2 \\ + (3a^2 + 4ab + b^2)t - a(a+b)^2\} \\ \cdots (11)$$

(f) 三次式 その 2:

$$\rho_6(t) = (-12/b^4)\{t^3 - (3a+b)t^2 \\ + (3a^2 + 2ab)t - a^2(a+b)\} \\ \cdots (12)$$

これらの $\rho_j(t)$ を式 (6) へ代入すると応力関数 $F_j(z, a, b)$ が求められる。

以上の手法で有限で滑らかな応力集中を生じる多くのクラックモデルを設定して応力関数を導いた著者等の報告は次のような内容である。

① Westergaard の解で示される等方性板の 2 次元問題のモード I と II に対する関数解 [3] およびクラックが主

軸に対して任意の傾きを有する直交異方性板の 2 次元問題の解析解 [4] を誘導して、いずれもクラック先端で有限な応力集中を構成する解を示し得た。

② 3 次元無限弾性体中に厚さ 0 の円盤状クラックが存在する場合を対象として、クラック面に垂直方向の一樣引張り (軸対称) あるいはクラック面に平行なせん断力が作用する場合の有限応力集中を構成する変位関数 [5], [6] をそれぞれ導いている。

③ クラックを有する梁の 4 点曲げ破壊時の荷重-変位の関係及びクラック進展に伴う応力分布と開口変位との関係 (いわゆる引張軟化曲線) をシミュレーションする応力関数解を誘導し、完全な弾性解でありながら、リガメント長さ a とフラクチャープロセスゾーンの長さ b を変化させることにより、材料の軟化特性と破壊過程という非線形問題を近似的に追跡することが可能であることを示している [7], [8]。

4. 重み積分法による計算例

(1) 計算例 1: $\rho_j(t)$ による中心クラックの応力 $\sigma_x(y)$ と開口変位 $u(y)$

著者等が提案した解析手法の特性を明示するために、図-1 に示す中心クラックモデルに対する y 軸上の応力 $\sigma_x(y)$ と変位 $u(y)$ を図-3 および図-4 に示す。重み $\rho_1(t) \sim \rho_4(t)$ によるものは既に報告したもの [3] であるが、重み $\rho_5(t), \rho_6(t)$ による結果を追加して再掲する (文献 3 参照)。

これらの図から次のような特徴が推察される。

重み積分の区間は $(a \leq t \leq a+b)$ であるため区間 $(-a \leq y \leq a)$ は完全な開口部であり、 $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ である。重み関数 $\rho_j(t)$ の形状の相違によって応力集中の形状には相違はあるものの、クラック先端で無限大の応力集中が生じる Westergaard の応力分布とは異なり、有限な応力集中が現れることがわかる。さらにこれらの解の開口変位は、Westergaard による開口変位 $u(y)$ は楕円形になるのに対して、クラック先端で緩やかな勾配で 0 へ収束して閉じ合わされているのが認識される。

図-2 に示す重み関数 $\rho_j(t)$ はクラックによる応力

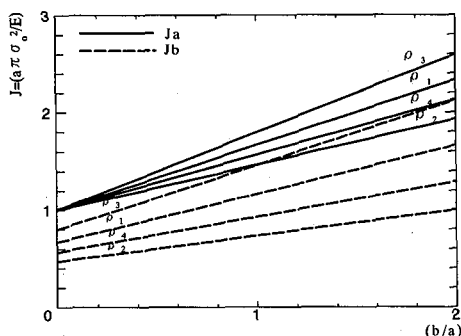


図-5 エネルギー解放率

集中の解析において必ずしも適当な形状であるわけではない。初歩的で簡単なものとして定義しただけであるが、このような重みによっても有限で滑らかな勾配を有する応力集中を構成する解析手法を提案することができた。図-3に示すように重み関数の相違により、種々異なった応力分布形状が得られることがわかる。これは応力集中の特異性を回避するために用いた重み関数の区間長 b と、関数の形状を変えることによって応力集中の形状を微妙に変更し得る自由度が存在しているということを意味している。すなわち、これだけでは確定的なことは決定し難いのである。この領域はコンクリート系複合材料においては、材料の崩壊実験で観測されるクラック先端のヘアークラックやマイクロクラックが発生しつつ応力の伝達もある軟化領域であり、鋼材等の延性材料においては塑性領域を構成して降伏が一様に現れている領域に相当する。本解析法による解はこのような領域を実現するために導かれた応力関数であり、 b の長さをどのように設定するのが適当であるのか、確定的なことを説明づけるものではない。視点を変えると重み関数の形状を変えることによって相当に任意性のある応力分布に対応し得ることが示されるのである。

(2) 計算例2: $\rho_j(t)$ によるエネルギー解放率 J

図-3の計算例に示されるようにプロセスゾーン b を設定してクラック先端近傍の応力を平滑化(従来は無限大の応力)し得たが、応力と変位が与えられているので、クラック進展を検討する場合に活用される J 積分を直接導くことは可能となる。 J 積分は線形弾性限度内においては、外力の変化を伴わずにクラックを単位長さ進展させるために解放されるエネルギー(エネルギー解放率)であるが、著者等の従来の研究[6]において提案したように2種類のエネルギー解放率を定義することになる。一つのエネルギー解放率 J はクラック開口長さ a の変化(b は一定)に伴うエネルギーの変化率 J_a であり、他の一つはプロセスゾーンの長さのみの進展(a は一定、 b 変化)に対するもの J_b である。図-5は b/a を0~2まで変化させたときの重み関数 $\rho_1(t) \sim \rho_4(t)$ に対する2種類のエネルギー解放率を図示したものである。図中

の縦軸は従来の研究[12]によると、小規模降伏(塑性域がクラック先端近傍に限定される状態)の場合には、モードI 形クラックに対して $J_0 = \sigma_{x0}^2 a \pi / E$ (平面応力 $\nu = 0$)と得られるので J_0 の比率として表されている。また、図中の実線は b を一定にして a を変化させた J_a であり、点線は a を一定にして b を変化させた J_b である。

図-5の結果から次に挙げる事が判定される。

① $b/a = 0$ ではクラック先端部分で無限大の応力集中を与える Westergaard のエネルギー解放率(本研究ではプロセスゾーンが0すなわち、 $b = 0$ に相当する)と等しくなるので $J_a = 1$ は当然の結果である。

② J_a, J_b ともにほぼ直線的に変化するため b/a の一次式と見なし得る。このことはエネルギー論的に破壊を評価する限り導かれる結論の特性(傾向)は、安定したものとは推定される。

5. 外側クラックを構成する応力関数の基本解

中心クラックの計算例(図-3, 図-4参照)において著者等の手法により、クラック先端近傍の応力は Westergaard の解とは異なり有限な応力集中を示すことと変位が滑らかな開口を有することが認識できた。これで本解析法の有効性が示されたが、コンクリートの実験等においては主に計測される位置はノッチ先端部分あるいは載荷点であって、供試体の中央に発生するクラックを計測することは困難である。この観点から中心クラックのみならず外側クラックの解析解を導いて有効性を検討することは意義のあることと思われる。以下に基本となる解析解を簡単に示す。

(1) 中心クラックの基本解と $\rho_1(t)$ による $F_1(z, a, b)$

図-1に示す中心クラックを構成する応力関数の関数 $\psi(z)$ の基本解は z の一階微分で

$$\left. \begin{aligned} \psi'_a(z) &= \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \} \dots\dots\dots (13) \\ \phi''_a(z) &= z\psi''_a(z) \end{aligned} \right\}$$

と与えられていて、関数 $\phi_a(z)$ は $\phi''_a(z) = z\psi''_a(z)$ となっているが、この関係式が y 軸上(クラック線上)で $\tau_{xy} = 0$ を構成する関係式である[11]。 $\psi'_a(z)$ は代数関数であるため z を積分変数とする積分あるいは微分することは可能であり、得られた解を式(2), (3), (4)に代入して応力関数あるいは応力と変位を得ることは容易である。また、 $\psi'_a(z)$ に長方形重み $\rho_1(t)$ を乗じて得られる重み積分による解は、

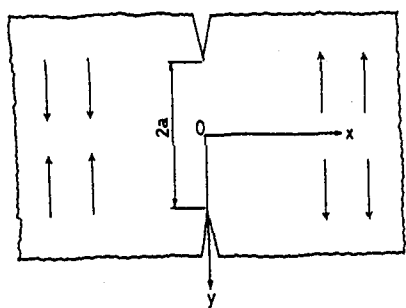


図-6 伸縮が作用する外側クラック

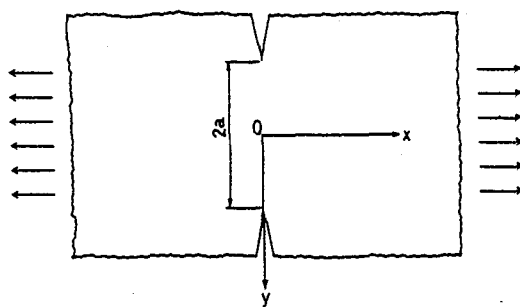


図-7 引張りが作用する外側クラックモデル

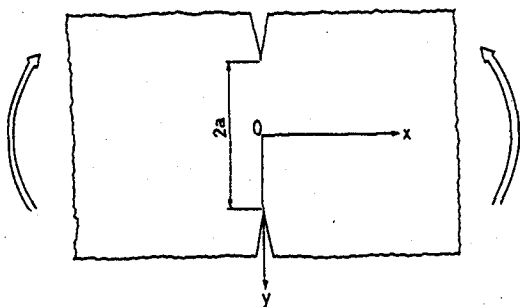


図-8 x軸曲げが作用する外側クラックモデル

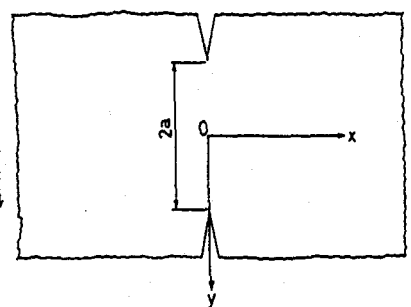


図-9 せん断が作用する外側クラックモデル

$$\begin{aligned}\Psi'_{\alpha}(z, a, b) &= \int_a^{a+b} \rho_1(t) \psi'_{\alpha}(z, t=a) dt \\ &= \frac{1}{b} [z \log \{t + \sqrt{z^2 + t^2}\}]_a^{a+b} \quad (14)\end{aligned}$$

となる。さてこのようにして導かれる中心クラックの応力関数の虚数部は複素関数の特性より基本的には外側クラックの解になるのである。中心クラックの基本解に対して、y軸に沿う関数の対称性と逆対称性(原点を中心)を互いに交代させるために複素変数 z を乗じる操作を施したり、あるいは応力表示式中の $(z + \bar{z})$ 項を交代させるために $\phi_{\alpha}(z)$ の構成式を変更することにより、簡便に4種類(引張り、せん断、面内曲げ、伸縮)の外力が個別に作用するときの外側クラック(有限連続板のクラック)に対する基本解が求められることを以下に示す。

(2) 外側クラックの基本解と $\rho_1(t)$ による
 $F_1(z, a, b)$

(a) 伸縮が作用する基本解 $\psi'_{oe}(z)$ と重み $\rho_1(t)$ による $\Psi'_{oe}(z, a, b)$

図-6に示すようにクラック線の左右で一方が膨張(y方向に引張り)他方が収縮している(y方向に圧縮)場合の応力状態を表す応力関数の基本解 $\psi'_{oe}(z)$ は式(13)を活用して、

$$\left. \begin{aligned}\psi'_{oe}(z) &= \psi'_{\alpha}(z) \\ \phi''_{oe}(z) &= z\psi''_{\alpha}(z) + 2\psi'_{\alpha}(z)\end{aligned} \right\} \cdots \cdots (15)$$

と表される。式(15)に示す ψ と ϕ の関係はクラック線上で $\sigma_x = 0$ を実現することになる。また、重み積分による解 $\Psi'_{oe}(z, a, b)$ は式(14)より、

$$\Psi'_{oe}(z, a, b) = \Psi'_{\alpha}(z, a, b) \cdots \cdots (16)$$

である。図-18(a)に変位 v の形状を示す。ただし、式(15)、(16)を式(3)に代入して得られる応力は紙面の都合上割愛する。

(b) 引張りが作用する基本解 $\psi'_{\alpha}(z)$ と $\rho_1(t)$ による $\Psi'_{\alpha}(z, a, b)$

式(13)、(14)を基にして次のように変形したものがx軸方向に引張りを受ける場合の解である(図-7参照)。図-19(a)に変位 u の形状を示す。応力 σ_x 分布図は紙面の都合で割愛しているが、この場合を代表として図-19(c)に示す。

$$\left. \begin{aligned}\psi'_{\alpha}(z) &= \frac{1}{z} \psi'_{\alpha}(z) \\ \phi''_{\alpha}(z) &= -\frac{1}{z} \psi''_{\alpha}(z)\end{aligned} \right\} \cdots \cdots (17)$$

$$\Psi'_{\alpha}(z, a, b) = \frac{1}{z} \Psi'_{\alpha}(z, a, b) \cdots \cdots (18)$$

(c) x軸が面内で曲げられるように面内力が作用する基本解 $\psi'_{\alpha}(z)$ と $\rho_1(t)$ による $\Psi'_{\alpha}(z, a, b)$ (図-8参照)：

$$\left. \begin{aligned} \psi'_{ox}(z) &= i\psi'_{ci}(z) \\ \phi''_{ox}(z) &= iz\psi''_{ci}(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\Psi'_{ox}(z, a, b) = i\Psi'_{ci}(z, a, b) \dots\dots\dots (20)$$

図-20 (a) に変位 u の形状を示す。

(d) せん断が作用する基本解 $\psi'_{os}(z)$ と $\rho_1(t)$ による $\Psi'_{os}(z, a, b)$ (図-9 参照) :

$$\left. \begin{aligned} \psi'_{os}(z) &= \frac{i}{z} \psi'_{ci}(z) \\ \phi''_{os}(z) &= \frac{i}{z} \{-\psi''_{ci}(z) + 2\psi'_{ci}(z)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\Psi'_{os}(z, a, b) = \frac{i}{z} \Psi'_{ci}(z, a, b) \dots\dots\dots (22)$$

図-21 (a) に変位 v の形状を示す。

6. 計測される変位とプロセスゾーンの長さ b の関連

ここでは上述の重み積分法で最も必要とされるクラック先端のプロセスゾーンに相当する b の長さを合理的に推定する手法を考案して検討する。 b の長さを推定することは、応力と開口変位が共存する区間を推定することに相当し、コンクリートの破壊現象を特徴づけると考えられている引張軟化曲線とプロセスゾーンとの対応関係を明確に調べる事が可能となる。実験手法あるいは数値解析(有限要素法や境界要素法)において、プロセスゾーンの長さを測定する計測手法や推定する解析手法は未完成な課題であり、実験の計測点の選び方でプロセスゾーン相当部分の長さ b を推定することが可能なら意義のあることと思われる。

実験計測においてクラック先端のプロセスゾーン b の長さを推定するための最も簡便な方法は変位を計測することであろう。たとえば、コンクリートの4点曲げ崩壊過程を追跡するために荷重載荷点の変位を頻繁に計測する。この載荷点変位からクラック先端でダイナミックに変動するプロセスゾーンの長さを推定することが可能ならば非常に有用な材料特性値を得ることに相当すると思われる。すなわち、「変位測定によってプロセスゾーンの長さを効率的に推定するには、供試体の如何なる点の変位を計測するのが合理的か」という問題を論証しよう。このためには式(15)から式(22)に示した外側クラック(有限連続板のクラック)の応力関数で引張り、せん断、

面内曲げ、伸縮の外力が個別に作用した時の4種類の場合に対する x 方向変位 u (あるいは y 方向変位 v) をプロセスゾーン b で一階微分した $|\partial u / \partial b|$ (あるいは $|\partial v / \partial b|$) を計測感度とみなして曲面を描画して検討するのが合理的であろう。

最初に図-1に示す y 軸上に長さ $2a$ のクラックを有するモデルを例に採り、変位測定の変位位置とプロセスゾーンの長さの逆推定効果を導く。これはプロセスゾーンの長さの変化に敏感でかつ計測し易い点の変位を選ぶべきであり、 b に対する変位の変化率が最大の点を探することで解決されよう。すなわち x 軸方向変位 u あるいは y 軸方向変位 v をプロセスゾーン長さ b で一階微分した $|\partial u / \partial b|$ (あるいは $|\partial v / \partial b|$) の値が最大となる位置を求めることである。何故なら $|\partial u / \partial b|$ が最大ということは、計測した変位 u は b の変化に対して最も敏感であるということの意味する。式(6)より、重み積分法による応力関数 $F(z, a, b)$ はクラックの長さ a 、プロセスゾーンの長さを b として解析関数で構成されている。

式(6)の右辺の被積分関数を

$$h_j(z, t, a, b) = \rho_j(t) \cdot F_j(z, t) \dots\dots\dots (23)$$

と置き換えて

$$F_j(z, a, b) = \int_a^{a+b} h_j(z, t, a, b) dt \dots\dots\dots (24)$$

として、両辺を b で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j(z, a, b)}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \left[\int_a^{a+b} h_j(z, t, a, b) dt \right] \\ &= \left\{ \frac{\partial(a+b)}{\partial b} \right\} h_j\{z, (a+b), a, b\} \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial(a)}{\partial b} \right\} h_j\{z, (a), a, b\} \\ &\quad + \int_a^{a+b} \frac{\partial}{\partial b} h_j\{z, t, a, b\} dt \\ &= h_j\{z, (a+b), a, b\} \\ &\quad + \int_a^{a+b} \frac{\partial}{\partial b} h_j\{z, t, a, b\} dt \\ &= \omega_j(z, a, b) \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

となる。式(23)の関係を式(25)へ代入すると b で一階微分した関数 $\omega_j(z, a, b)$ の一般解が次のように求められる。

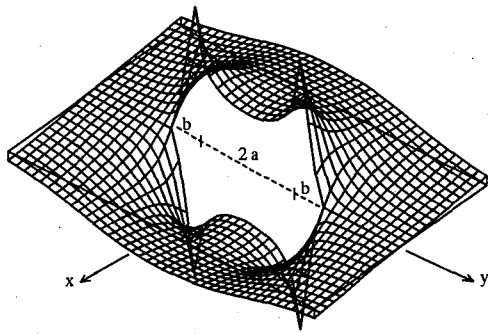


図-10 $\rho_j(t)$ による du/db

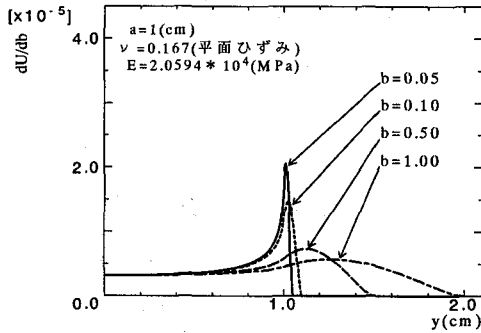


図-12 $\rho_2(t)$ による du/db

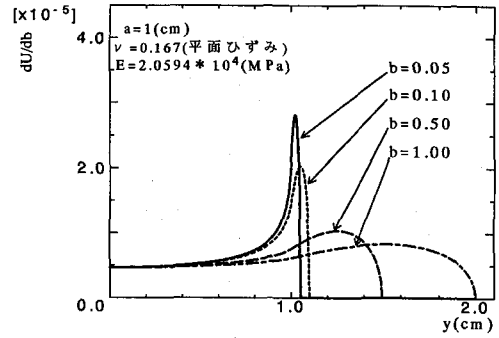


図-11 $\rho_1(t)$ による du/db

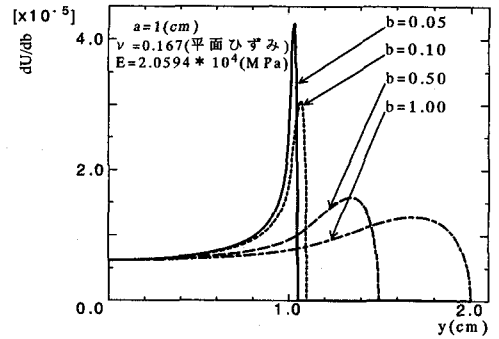


図-13 $\rho_3(t)$ による du/db

$$\begin{aligned} \omega_j(z, a, b) &= h_j \{z, (a+b), a, b\} \\ &+ \int_a^{a+b} \frac{\partial}{\partial b} \rho_j(t, a, b) F(z, t) dt \\ &= \rho_j(a+b, a, b) F(z, a+b) \\ &+ \int_a^{a+b} \frac{\partial}{\partial b} \rho_j(t, a, b) F(z, t) dt \\ &\dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ここに一般解 $\omega_j(z, a, b)$ は、重み関数 ρ と基本解 F の積 (第一項) および重み関数の b による一階微分と基本解の積を被積分関数として a から $a+b$ まで積分した式 (第二項) で構成される式である。ただし、基本解 F は中心クラックおよび外側クラック (式 (13) ~ 式 (22) 参照) で定義した関数 ψ と関数 ϕ で表されている。したがって $\omega_j(z, a, b)$ も ψ および ϕ で構成される解であり、さらに中心クラックおよび外側クラック関数に対しても有効である。一般解 $\omega_j(z, a, b)$ を式 (4) に代入することにより、 $|\partial u / \partial b|$ (あるいは $|\partial v / \partial b|$) を求めることが可能である。

7. 重み関数 $\rho_j(t, a, b)$ の相違による $\omega_j(z, a, b)$

各重み関数 $\rho_j(t)$ に対する $\omega_1(z, a, b)$ から $\omega_6(z, a, b)$ は次のように与えられる。

式 (7) ~ (12) で定義される重み関数 $\rho_j(t)$ において、積分変数 $t = a+b$ であるときの値と b による一階微分を求めて式 (26) に代入すると次のように求められ

る。

(1) $\rho_1(t)$ による $\omega_1(z, a, b)$:

$$\omega_1(z, a, b) = \frac{1}{b} \{F(z, a+b) - F_1(z, a, b)\} \dots (27)$$

(2) $\rho_2(t)$ による $\omega_2(z, a, b)$:

$$\omega_2(z, a, b) = \frac{2}{b} \{F_1(z, a, b) - F_2(z, a, b)\} \dots\dots\dots (28)$$

(3) $\rho_3(t)$ による $\omega_3(z, a, b)$:

$$\omega_3(z, a, b) = \frac{2}{b} \{F(z, a+b) - F_3(z, a, b)\} \dots (29)$$

(4) $\rho_4(t)$ による $\omega_4(z, a, b)$:

$$\omega_4(z, a, b) = \frac{3}{b} \{-F_4(z, a, b) + F_3(z, a, b)\} \dots\dots (30)$$

(5) $\rho_5(t)$ による $\omega_5(z, a, b)$:

$$\omega_5(z, a, b) = \frac{4}{b} \{-F_5(z, a, b) + F_4(z, a, b)\} \dots\dots (31)$$

(6) $\rho_6(t)$ による $\omega_6(z, a, b)$:

$$\begin{aligned} \omega_6(z, a, b) &= \left(-\frac{2}{b}\right) \{2F_6(z, a, b) + F_4(z, a, b) - 3F_3(z, a, b)\} \\ &\dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

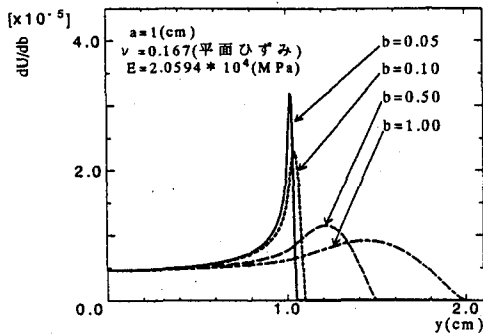


図-14 $\rho_4(t)$ による du/db

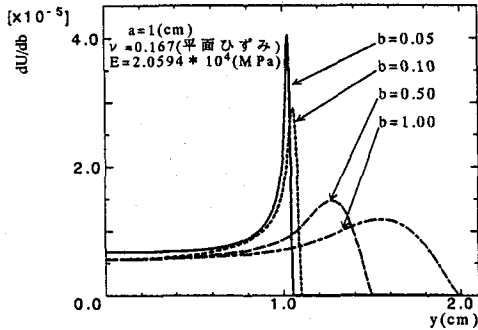


図-16 $\rho_6(t)$ による du/db

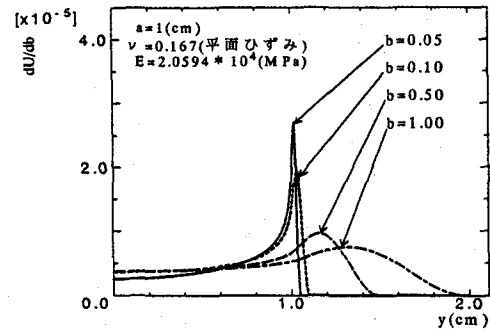


図-15 $\rho_5(t)$ による du/db

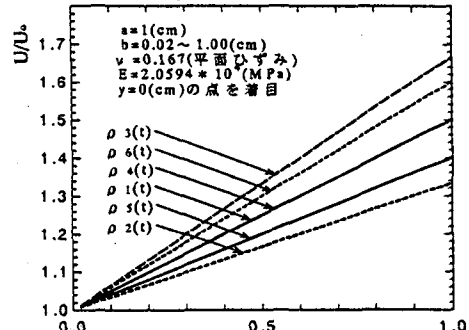


図-17 プロセスゾーン b の推定 b/a

これらの解を式(4)に代入することにより得られる $|\partial u / \partial b|$ (あるいは $|\partial v / \partial b|$) は紙面の都合上割愛する。

8. 計算例1 (中心クラックによる検討)

重み関数 $\rho_j(t, a, b)$ の相違による $\omega_j(z, a, b)$ は、式(27) ~ (32) に表されるように平滑化される被積分関数 $f(z, t)$ の積分変数 t に $a + b$ を代入して得られる値と平滑化された関数 $F_1(z, a, b) \sim F_6(z, a, b)$ に係数を掛けて組み合わせた関数である。したがって $\omega_j(z, a, b)$ を式(6)に代入して得られる $|\partial u / \partial b|$ (あるいは $|\partial v / \partial b|$) に関しても同様の計算により求められる。

計算例として、図-1で示されるモデルを解析対象として、クラック長さ a を $1(\text{cm})$ 、ヤング係数 $E = 2.0594 \times 10^4 (\text{MPa})$ 、ポアソン比 $\nu = 0.167$ (平面ひずみ)、プロセスゾーン $b = 0.5(\text{cm})$ とするときの $\rho_1(t)$ による $\partial u / \partial b$ を図-10に示す。また、図-10と同じ材料定数を用いてプロセスゾーン b を $0.05 \sim 1.00(\text{cm})$ まで変化させたときの各種重み $\rho_j(t)$ の変化による y 軸上 ($x = 0$) の $|\partial u / \partial b|$ を図-11から図-17に示す。

これらの図から次の結論が推察される。

1) xy 平面上に表された図-10の結果によると、変位 u を計測して b を逆推定するために最も効果の高い ($|\partial u / \partial b|_{\text{max}}$) のは開口部先端とプロセスゾーンの境界点近傍であることが分かる。しかし、この点近傍は計測するには困難な部分である。これに対して開口部中央は感度は下がるが変動の緩やかな部分で、安定かつ簡便に

計測することが可能であることが分かる。また、開口部中央における上記の特性から、中央点での変位計測の他に、中央点から x 軸方向に少し離れた点 [$x = |\varepsilon| (\varepsilon \geq 0)$] で計測しても有効であることが推察される。これは極めて常識的な結論ではあるが理論的に示し得たことに意義があろう。

2) $|\partial u / \partial b|$ は b の値により形状は変動するものの、重み関数が変わっても形状の特性には大差が生じない。

3) プロセスゾーンの長さ b が增大するにつれて、 $|\partial u / \partial b|$ の変化率が減少して滑らかな曲線形状を有する。

4) $|\partial u / \partial b|$ の値はクラックの中心 ($y = 0$) では b の変化には関係なく一定値に収束する。これは b を逆推定するには合理的な位置であることを意味している。

5) 一般にコンクリートの実験で報告されているプロセスゾーンの大きさについては、試験条件によって異なると考えられるが、数 cm から数十 cm という報告がある[13]。上記結論から推察して、コンクリートなどの混成材料における b の長さを逆推定するためには、もし供試体が中心クラックを持つような場合にはクラック中央部の変位を計測することが適当であろう。

図-17は b の変化 [$0.02(\text{cm}) \sim 1.00(\text{cm})$] に対するクラック中央部 [$y = 0(\text{cm})$] の変位をまとめた図である。縦軸は Westergaard 理論解によるクラック中央部の開口変位 u_0 の値で無次元化した値である。図から重み関数の相違による変位の大きさに変動があるが、近似的に一次式として表される。したがって、上記結論から図表を基にして、Westergaard の変位に対するクラック中央

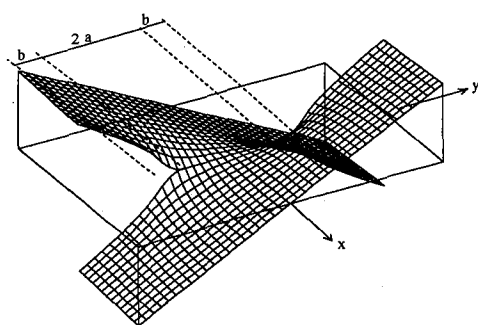


図-18(a) 伸縮による変位 v (長方形重み)

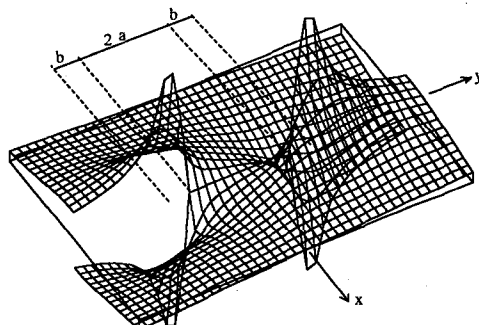


図-18(b) 伸縮による du/db 曲面

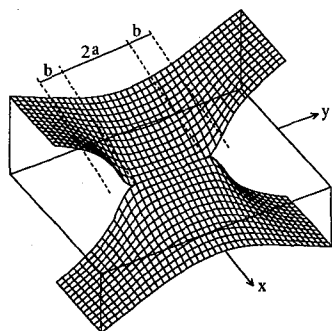


図-19(a) 引張りによる変位 u (長方形重み)

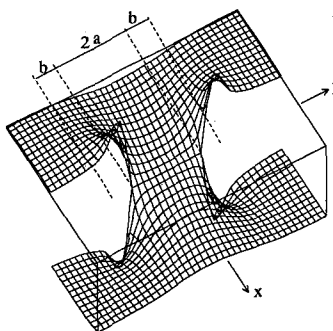


図-19(b) 引張りによる du/db 曲面

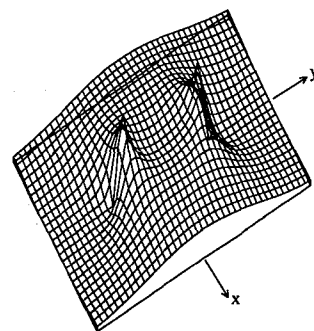


図-19(c) 引張りによる応力 σ_x

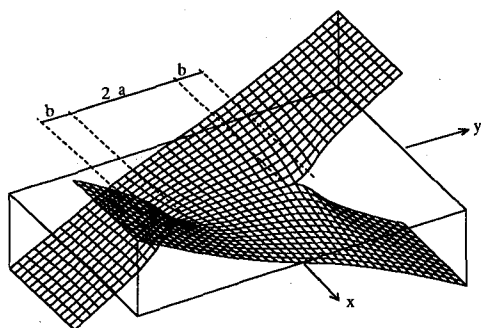


図-20(a) x 軸曲げによる変位 u (長方形重み)

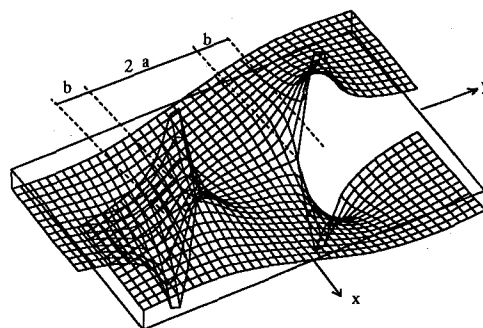


図-20(b) x 軸曲げによる du/db 曲面

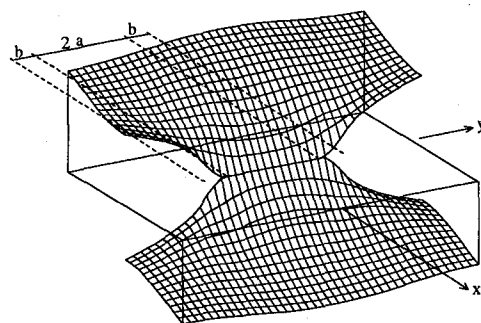


図-21(a) せん断による変位 v (長方形重み)

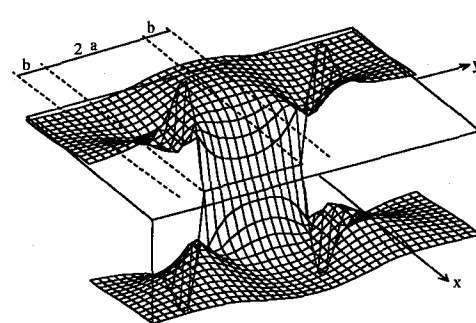


図-21(b) せん断による dv/db 曲面

部における変位 (開口変位) を計測することにより, 各種重み $\rho_j(t)$ (仮定が正しいとするなら) に対応するプロセスゾーン b の長さを逆推定することが可能である。

9. 計算例 2 (外側クラックによる検討)

計算例として, 重み積分 (式 (7) で表される長方形重みを採用) によって得られた外側クラックの基本解を式 (4) で表される変位を構成する式に代入して得られる

y 方向変位 v の曲面を図-18(a) に示す。ただし, 材料定数は中心クラックの場合と同様である [クラック半長さ $a = 1(\text{cm})$, プロセスゾーン長さ $b = 0.3(\text{cm})$ を採用]。これは $x > 0$ 領域を y 軸方向へ伸長させて $x < 0$ 領域を y 軸方向へ収縮させるように外力が作用した場合の変位であることが容易に推察されよう (変位 u と応力の図は省略)。図-19(a) に示すのは上記の外側クラックの板に x 軸方向に有限な引張り力が作用する場合の x 方向変位 u である。この例では σ_x 分布図も図-19(c) に

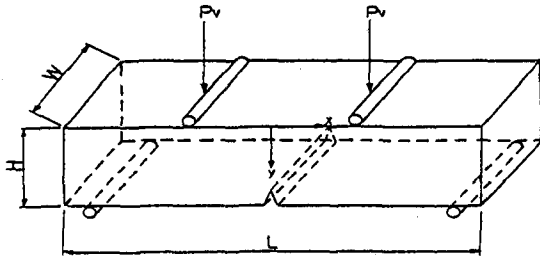


図-22 コンクリートの4点曲げ破壊試験の供試体

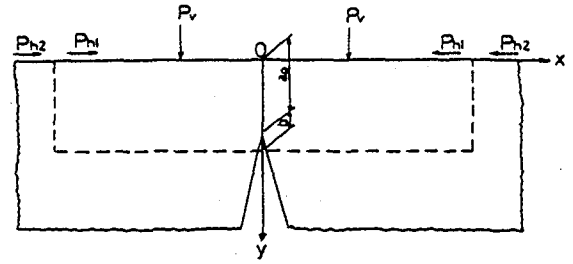


図-23 2次元問題へのモデル化

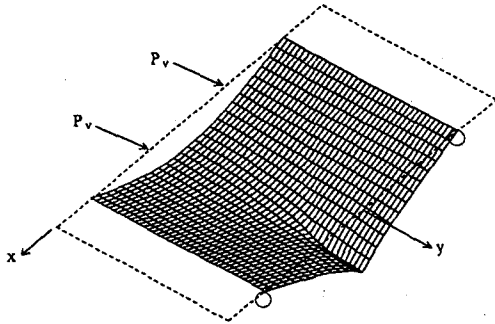


図-24 変位 v 曲面

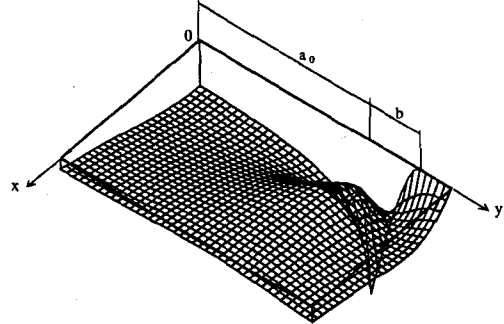


図-25 dv/db 曲面

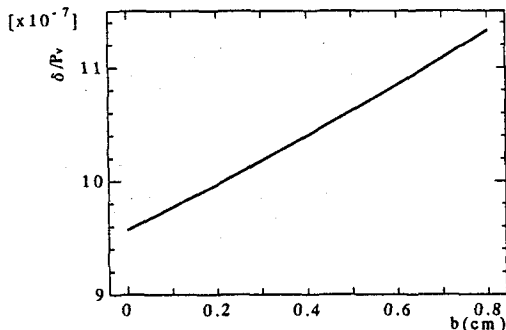


図-26 δ/P_v によるプロセスゾーン b の推移

示す。図-20 (a) は x 軸が面内曲げを受ける場合の u であり、図-21 (a) はクラック軸 (y 軸) 平行にせん断を受ける場合の v であることは明白である。これらの結果から著者等の簡便な構成法により、外力が作用する外側クラックの解析解を導き変位の基礎式に代入することにより、クラック先端で滑らかな変位が得られることが認識できよう。プロセスゾーンの長さを逆推定する感度に相当する $\partial u / \partial b$ あるいは $\partial v / \partial b$ をそれぞれの計算例で求めて図-18 (b) から図-21 (b) に示す。これらの $|\partial u / \partial b|$ (あるいは $|\partial v / \partial b|$) 曲面についても連続部分 ($2a$) の外側に位置するプロセスゾーン部分 (b) では中心クラックと同様に感度が極大となるが計測には不都合である。しかし、プロセスゾーンの外部 ($|y| > a + b$) では一定値に収束する傾向が見られる場所が存在して、中心クラックと同様の結論を推察することは可能である。

10. 計算例3 (数値実験例)

著者等は既にクラックを有する梁 (図-22) の4点曲げ破壊時の荷重-変位曲線の関係に関して、一つの数値モデルを想定して解析する手法を提案した [7] [8]。解析モデルはクラックを有する梁の近似的なモデルとして、クラックを有する半無限板 (図-23) の点線で示した部分を想定して、これをコンクリートの4点曲げ試験の供試体 (図-22) に相当するものとする (文献7と同じもの)。図-24 は二次元問題へモデル化した y 方向変位 v の曲面であり、梁の両支点に相当する部分の変位を0とするように平行移動させてある。 $\partial v / \partial b$ を求めて、 b の長さ変化に対する v の感度を示すのが図-25 である。図-24 および図-25 は、図-8 に示す面内の x 軸曲げが作用する外側クラック (有限連続板のクラック) において y 方向変位 (変位 v) の y 正軸 ($y > 0$) 領域を描いた曲面である。重み関数は長方形重み $\rho_1(t)$ を活用した。また、クラック半長さ $a = 1(\text{cm})$ 、プロセスゾーン $b = 0.3(\text{cm})$ として、材料特性はポアソン比 $\nu = 0.2$ 、ヤング係数 $E = 2.746 \times 10^4 (\text{MPa})$ として計算した。 y 軸上の形状を示すために $x > 0$ 領域のみを示す。プロセスゾーン先端で $|\partial v / \partial b|$ の値が最大であり、感度をもっとも敏感であると考えられるが、計測は困難である。他方、梁上面相当位置 (x 軸上) では単純梁であるから両支点で $v = 0$ となるよう調整しなければならないがスパン中央部に近づくほど $|\partial v / \partial b|$ は大きな値となることが示されている。これは梁上面の中心付近で垂直たわみ v を計測するのは b の逆推定としては感度が敏感な点であることを意味する。梁下面部分でも同様の結果が示されている。したがって、プロセスゾーン b の長さを逆推定するにはスパン中央付近が望ましい計測位置であるこ

とがわかる。

図-25 に示す曲面は鉛直変位 v を b で偏微分して感度を検討した曲面であって、供試体のノッチ先端の開口変位 (水平方向変位 u) を計測位置として活用するには、図-20 (a) に示した外側クラックで x 軸曲げが作用するときの変位 u をプロセスゾーン長さ b で偏微分した図-20 (b) の感度を検討することで解決されよう。

ここで対象とする梁の幾何学的形状は $H \times W \times L = 75 \times 75 \times 30(\text{cm})$ であり、水平力 (2カ所) が作用する点までの距離は $h_1 = 10(\text{cm})$, $h_2 = 15(\text{cm})$ である (数値シミュレーションで幾つかのモデル化を検討した結果、想定した梁の領域外に水平力を作用させて梁中央部の断面力つり合いを成立させるものを選んでい)。梁上面で鉛直荷重 P_v の作用する点 (梁下面で鉛直変位を計測する点) の原点からの距離を $h_d = 5(\text{cm})$ とする。材料特性はポアソン比 $\nu = 0.2$, ヤング係数 $E = 2.746 \times 10^4 (\text{MPa})$, 引張強度 f_t は破壊が進行しても常に一定で $5.688 (\text{MPa})$ と仮定する。

梁の崩壊過程において、引張強度 f_t を越えると実際には梁底面からヘアークラックあるいはマイクロクラックが発生して断面欠損が生じつつ、耐力は非線形的に増加する。一般の解析における応力分布は降伏応力を f_t として弾塑性法則で表現されていて、クラック先端部分 (プロセスゾーン) の大きな変位は伸びひずみとして扱われる。著者等のシミュレーションによる4点曲げ梁の解析法では、大きな変位はひずみではなく開口変位として扱われていて、引張りの最大応力は強度 f_t を保ちつつプロセスゾーン b が構成されるものとする。すなわち、シミュレーションの初期段階では、梁断面 H を構成するリガメント長さ a_0 とプロセスゾーンの長さ b は $a_0 + b = 75(\text{cm})$ (梁の高さ) で一定値のままであり、プロセスゾーンの長さ b が増加すれば相対的にリガメント長さ a_0 は減少することを意味して、プロセスゾーン b のみが梁の高さ方向 (y 軸上原点方向) に広がる状態を表している。 b が漸増して限界に達すると応力の解放された完全開口部が成長し始めて、 $a_0 + b$ が減少することになる。耐荷力曲線のシミュレーションの状態については既に報告している [7], [8] ので割愛するが、破壊進行過程で a_0, b の大きさによって計測点の変位 δ と荷重 P_v の関係は異なることは自明のことである。ここでは1例として、シミュレーション初期位置での荷重 P_v と載荷点変位 δ の比 δ / P_v (たわみ易さ) とプロセスゾーンの長さ b の推移を求めて図-26 に示す。さらに耐力と変位の関係 (荷重-変位曲線) を効果的に追跡するには、従来の混成材料に対して適用されてきた FEM (有限要素法) [14] や BEM (境界要素法) [15] の数値解析法とは異なり、リガメント長さ a_0 とプロセスゾーン b の和 $a_0 + b$ (図-26 の計算例では $75(\text{cm})$) であって初期値に相当する) を漸次変化させるだけで追跡可能であるが b の限界値を設定することは本研究では言及し得ない。

図-26 に示す結果は、梁の崩壊過程の初期段階で、巨視的に観測されるクラックは進展せずプロセスゾーン b のみが広がる状態 (巨視クラックが進展する直前の状態) を示している。すなわち、巨視的に観測されるクラックが進展して荷重-変位曲線が得られるような状態にはまだ進んでいない段階である。仮定に基づいた解析結果ではあるが δ / P_v と b はほぼ直線的に変化するので、たとえ縦軸の δ / P_v の値が微小増加 (10^{-7} のオーダー) であっても横軸のプロセスゾーンは数 mm 単位で増大することが示されている。

1.1. むすび

本研究で得られた見解を以下に示す。

- 1) Westergaard により定義されている中心クラックの基本解を基にして簡便な構成法により、外側クラックに対する4種類の基本解を導き得た。
- 2) 変位測定の変位位置とプロセスゾーンの長さの逆推定効果を導くために、変位をプロセスゾーン長さ b で一階微分した $\partial u / \partial b$ (あるいは $\partial v / \partial b$) の曲面を描いてクラック開口部中央点から x 軸方向に少し離れた点で計測しても有効であることを示し得た。
- 3) 本解析法で検討したプロセスゾーン計測位置に関する考察は、既に多くの実験で計測されている位置であって自明な結論であるが、理論的な裏付けを行ったことは大きな成果であろう。
- 4) クラック開口部中央の変位が計測可能ならば、クラック長さ a に対するプロセスゾーン長さ b を推定することは可能である。他方一般の梁の曲げ実験では載荷力と載荷点変位の計測の他に、ノッチ先端の開口変位を同時に計測することにより、プロセスゾーン長さを逆推定することは可能である。
- 5) 本解析手法は等方性問題に限らず直線状インターフェイスクラックの問題 [16], 円形インターフェイスクラック [17], 直交異方性板のクラック [18] にも適用可能である。
- 6) 本研究では手法の有用性を検討するために最も簡単な重み関数を採用したのであり、コンクリートの崩壊実験や岩盤の破壊に関連づけてより現状に即した合理的なものを追求するのは大きな課題であろう。
- 7) ここに示したことはプロセスゾーンの応力分布を推定する方法に言及したものではない。したがって、重み関数を逆推定することも未解決である。応力分布 (重み関数) の仮定のもとにプロセスゾーンを推定する効率的な変位測定点を論じたものである。
- 8) 本解析法では、完全開口部と連続部の条件を満足させた上でプロセスゾーンの応力分布と開口形状が決定されている。プロセスゾーン内の応力と開口変位の形状には予め確定的な条件を設定しなくても重み関数の形状の相違によってプロセスゾーン内に相応の応力と変位が生

じてそれぞれ少しずつ異なる解が生じ得ることを示している。すなわち、どのような材料定数や重みの形状にも一応対応可能な一般解を示したことになる。クラック先端近傍の厳密な計測は困難であるが、もし実験計測によってひずみや応力分布が実際に与えられたならば、この応力分布を実現する重み関数の形状を逆解析によって近似的に決定することは可能と推察される。プロセスゾーン推定の一つの検証例として、著者等は岩盤の無発破工法の一つであるくさび貫入による岩盤の破碎実験を行った[20]。くさび貫入によって破碎するのであるが自由面の強制変位を発生させることになるので、解析モデルは図-18 から図-21 に見られるような外側クラックに台形重み付けて重み積分を実施した関数を採用している。実施のくさび貫入による自由面上の着目点の強制変位の計測結果の1例が約5mmであった。これを基に、着目点(この場合、くさび貫入位置から75cm離れている)の変位が約5mmとなるようにプロセスゾーンを逆推定すると約55mmであることが判明した。このように岩盤破碎の1例で得られたプロセスゾーン長さが現実的な値であったので、変位計測を基にしてプロセスゾーン長さを逆推定する手法の確証を既に得ていることになる。

参考文献

- 1) Hillerborg, A.: Analysis of fracture by means of the fictitious crack model, particularly for fiber-reinforced concrete, Int. J. Cement Compos. 2, pp.177-184, 1980.
- 2) Bazant, Z.P. and Oh, B.H.: Crack band theory for fracture of concrete. Mater. Struct. 16, pp.155-177, 1983.
- 3) 段樹金, 児島弘行, 中川建治: 亀裂先端部分で有限な応力集中を与える応力関数, 土木学会論文集, No.374, I-6, pp.399-407, 1986.
- 4) Duan, S. and Nakagawa, K.: Stress functions for central straight cracked anisotropic plates, 応用数学和力学, Vol. 9, No.6, pp.491-498, 1988.
- 5) 段樹金, 中川建治: セン断を受ける円盤状亀裂の周辺で有限な応力集中を与える弾性解について, 土質工学論文報告集, Vol.28, No.1, pp.153-160, 1988.
- 6) Duan, S., Fujii, K. and Nakagawa, K.: Finite stress concentrations and J-integrals from normal loads on a penny-shaped crack, Eng. Fract. Mech., Vol.32, No.2, pp.167-176, 1989.
- 7) Fujii, K., Duan, S. and Nakagawa, K.: A mathematical model for fracture process of four point bending concrete beam, Eng. Fract. Mech. vol.40, No.1, pp.37-44, 1991.
- 8) Fujii, K., Duan, S. and Nakagawa, K.: A mathematical model of the strain-softening curve for crack extension, Eng. Fract. Mech. vol.48, No.4, pp.505-514, 1994.
- 9) Dugdale, D.S.: Yielding of steel sheets containing slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol.8, pp.100-104, 1960.
- 10) Barenblatt, G.I.: The formation of equilibrium cracks during brittle fracture, general ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, PPM.23, 3, pp.434-444, 1959.
- 11) Westergaard, H.M.: Bearing pressures and cracks, J. of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.33, A-49~53, 1939.
- 12) Rice, J.R.: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.35, pp.379-386, 1968.
- 13) Carpinteri, A.: Application of Fracture Mechanics to Concrete Structures, Journal of Structural Division, Proc. of ASCE, vol.108, No.ST4, pp.833-848, 1982.
- 14) Hillerborg, A., Modeer, M. and Petersson, P.E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, Cement and Concrete Research, Vol.6, pp.773-782, 1976.
- 15) 大津政康, 福永靖雄: 境界要素法によるコンクリートのひびわれ進展解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.9-2, pp.669-674, 1987.
- 16) 藤井康寿, 中川建治: 面内引張りを受ける境界面亀裂問題の応力関数, 土木学会論文集, No.502, V-25, pp.23-32, 1994.
- 17) 村瀬安彦, 中川建治: 円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析, 土木学会論文集, No.483, I-26, pp.41-49, 1994.
- 18) 長瀬裕信, 中川建治: 直交異方性体間の界面き裂周辺の応力解析に関する基礎的な研究, 土木学会論文集, No.507, I-30, pp.53-63, 1995.
- 19) 栖原秀郎, 中川建治: 亀裂先端で有限な応力集中を構成する応力関数に関する研究, 土木学会論文集, No.501, I-29, pp.65-74, 1994.
- 20) 栖原秀郎, 藤井康寿, 中川建治: くさび貫入による岩盤掘削工法の設計法に関する一提案, 土木学会論文集, No.528, VI-29, pp.167-177, 1995.

(1997年9月26日受付)