

2次元粒状体モデルプローブ試験による 弾塑性挙動の考察

STUDY ON ELASTOPLASTIC BEHAVIOR OF
TWO DIMENSIONAL GRANULAR MODEL IN TERMS OF PROBE TESTS

武 建勲*, 岸野佑次**, 京谷孝史***
Jianxun WU, Yuji KISHINO, Takasi KYOYA

*工修 東北大学院生 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

***工博 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

This paper discusses the applicability of elasto-plastic model to granular materials in terms of numerical simulation of element tests under stress control. The numerical simulation, which is carried out by the granular element method proposed by one of the authors, consists of two parts; monotonic loading tests along several loading directions and probe tests to study incremental behavior at several loading steps. In the test result of monotonic loading, the extent of elasticity and plasticity is verified in terms of elastic and dissipative energies and the heterogeneity of the displacement field in the granular assembly is evaluated in terms of the deformation covariance tensor. The results of probe tests before the transition point, at which the strain increases suddenly, supports the elasto-plastic model which describes the incremental behavior in terms of the elastic compliance and the flow rule. However the non-associated flow and the non-coaxiality between stress and incremental strain are observed. Further it is found from the comparison with the elastic compliance given by a microstructure theory that the nominal elastic strain which takes usually non-infinitesimal value should include the dissipative character.

Key words : granular materials, granular element method, probe test, elastoplasticity

1. まえがき

土や砂のような地盤材料の構成則を合理的に定めるためにはマイクロメカニックス的なアプローチが必要であると考えられるが、実際の材料において様々な素因の影響を受けるために、このようなアプローチを実施することは非常に困難なことである。そこで、まず単純化された粒状体モデルによって構成則の定式化を行う方法が考えられる。Newland & Alley¹⁾やRowe²⁾らのモデルは限定された条件下においては有用なモデルとなっているが、より一般的な力学特性を抽出するためには、数値シミュレーションによるモデル実験を行うことが有効であると考えられる。

Bardet⁴⁾は種々の構成則理論の粒状体への適応性の検討を、Cundall³⁾によって提案された個別要素法 (DEM) によるシミュレーションにより行い、弾塑性理論は有用であるという一応の結論を得た。しかし、このシミュレーションにおいては応力制御が必ずしも十分な精度をもって行われていないため、流動則にばらつきが見られ、より精度の高い検証が望まれるところである。一方、著者ら⁹⁾は改良粒状要素法を応用して、Bardetの行った検討と同様の検討を行い、前者より精度良く粒状体の弾塑性挙動を考察できることを確認した。

本文においては、この研究をさらに発展させ、粒状体

の弾塑性挙動に関する様々な考察を行った。まず、弾性および塑性を巨視的に把握するために、せん断載荷試験のシミュレーション結果に基づき、外部仕事と内部仕事の収支の検討や、粒状集合体の変形における幾何学的不均一性を表わす統計量の検討を行った。また、弾塑性構成則をあてはめるための弾性コンプライアンスや流動則に関して、プローブ試験シミュレーションを用いた詳細な検討を行った。とくに異方性の発達、流動則における非関連性、応力主軸とひずみ増分主軸のずれ、コンプライアンスによるひずみ増分の予測の妥当性、流動則をもたらす粒状集合体内部の変形の不均一性の変化、みかけの弾性ひずみに含まれる散逸過程の検証などについて考察を行った。

2. 粒状要素法の概要

本研究において用いる解析方法の詳細についてはすでに発表している⁹⁾ので、ここでは概要を簡単に説明する。

2次元粒状体モデルは図-1に示すような円粒子の集合体とし、これを載荷試験シミュレーションの供試体と見なす。この集合体周辺に配置された粒子を境界粒子、その内側に配置された粒子を内部粒子と呼ぶ。

境界粒子は集合体の面積の計算や、応力またはひずみ

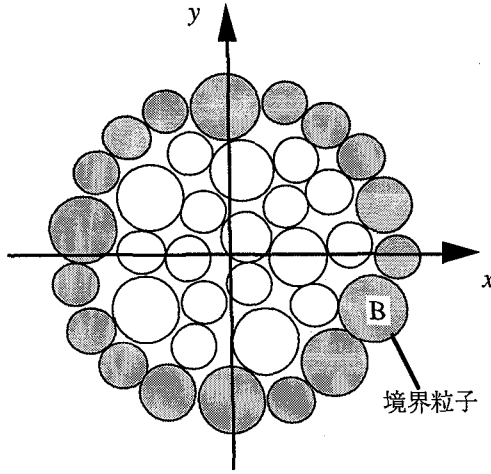


図-1 要素試験概念図

を制御するために用いられるので、境界粒子同士の力学的な相互作用は無視する。

粒状体モデルに対称な変位勾配を与えれば、各境界粒子は次式で定められる位置に移動することになる。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (1)$$

B: 境界粒子

X_0, Y_0 : 境界粒子の中心の変形前の座標

X, Y : 境界粒子の中心の変形後の座標

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$: モデルに与えるひずみ

図-1の粒子集合体に作用する応力は各境界粒子に内部粒子から作用する接触力を基に次式で計算される^{5,6,7}。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{A_0} \sum_B \begin{bmatrix} p_x X_0 & p_x Y_0 \\ p_y X_0 & p_y Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (2)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$: 粒子集合に作用する応力

p_x, p_y : 境界粒子と内部粒子の間の接触力

A_0 : 境界粒子重心を結んだ多角形に囲まれた面積

ここに、 $\sum_B$ は全ての境界粒子について和をとることを意味する。

粒子は円粒子とし、粒子間の重なりを許すことにより粒子の弾性変形を評価することとする。図-2において、着目する粒子Gとこれに接する別の粒子G'との接触点をCとし、両粒子の重心間距離の変化を相対変位と呼ぶ。相対変位の法線および接線方向成分を u_n, u_t 、G粒子に作用する接触力の法線および接線方向成分を p_n, p_t とおき、相対変位増分ベクトル $\Delta U_C = (\Delta u_n, \Delta u_t)_C^t$ および接触力増分ベクトル $\Delta P_C = (\Delta p_n, \Delta p_t)_C^t$ の間には次式が成立すると仮定する。

$$\Delta P_C = S_C \Delta U_C \quad (3)$$

$$S_C = \begin{bmatrix} c_n & 0 \\ 0 & c_t \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに S_C はC点における接触剛性行列であり、 c_n は接触点の法線方向の剛性定数、 c_t は接触点の接線方向の剛性定数である。

また、2粒子間にはCoulombの摩擦則(摩擦角 ϕ)が成り

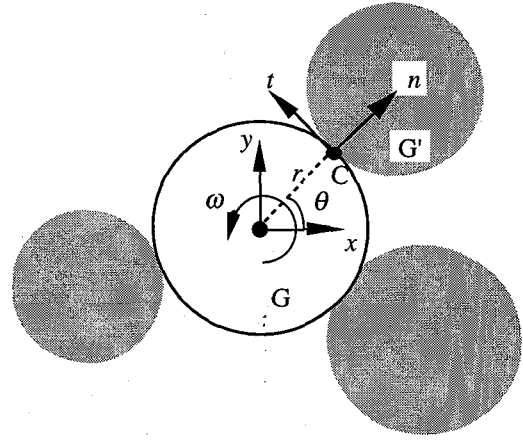


図-2 粒子接触点における局所座標系

立つと仮定し、 p_t がこれを越えた場合には強制的に p_t を限界値に修正する。さらに、粒子間力は圧縮を正とし、 p_n が負となった場合には強制的に0とおく。 p_t の修正には粒子間のすべり、 p_n の修正には接触粒子の離反が伴うことになる。

図-2のG粒子のみを移動させて、他の粒子を全て固定すれば、G粒子に加えるべき力とモーメントからなる付加力ベクトル ΔF_G と、G粒子重心の並行移動増分 $\Delta u_x, \Delta u_y$ と粒子回転増分 $\Delta \omega$ からなる変位増分ベクトル ΔU_G の間には次式が成立する。

$$\Delta F_G = S_G \Delta U_G \quad (5)$$

ここに、 S_G は要素剛性行列で、下式で与えられる。

$$S_G = \begin{bmatrix} \sum_C s_{11} & \sum_C s_{12} & \sum_C s_{13} \\ \sum_C s_{12} & \sum_C s_{22} & \sum_C s_{23} \\ \sum_C s_{13} & \sum_C s_{23} & \sum_C s_{33} \end{bmatrix}_G \quad (6)$$

$\sum_C$: 全ての内部粒子の接触点についての和

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= c_n \cos^2 \theta + c_t \sin^2 \theta \\ s_{12} &= (c_n - c_t) \sin \theta \cos \theta \\ s_{13} &= -c_t \sin \theta \\ s_{22} &= c_n \sin^2 \theta + c_t \cos^2 \theta \\ s_{23} &= c_t \cos \theta \\ s_{33} &= c_t \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

粒状集合体内の全ての粒子の全ての接触点に関する要素剛性関係及び式(1)、(2)を用いて全体剛性方程式が次式のように与えられる。

$$\Delta F = S \Delta U \quad (8)$$

ここに ΔF は応力増分ベクトルと内部粒子付加力ベクトル、 ΔU はひずみ増分ベクトルと内部粒子変位増分ベクトルより成り、次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= (\Delta \sigma^t, \Delta F_1^t)^t \\ \Delta U &= (\Delta \varepsilon^t, \Delta U_1^t)^t \\ \Delta \sigma &= (\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy})^t \\ \Delta \varepsilon &= (\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma_{xy})^t \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

また、 S の中第1~3行第1~3列の部分行列 D は

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= \sum_B s_{11} X_0^2 / A_0 \\ d_{12} &= \sum_B s_{12} X_0 Y_0 / A_0 \\ d_{13} &= \sum_B (s_{11} X_0 Y_0 + s_{12} X_0^2) / 2A_0 \\ d_{22} &= \sum_B s_{22} Y_0^2 / A_0 \\ d_{23} &= \sum_B (s_{12} Y_0^2 + s_{22} X_0 Y_0) / 2A_0 \\ d_{33} &= \sum_B (s_{11} Y_0^2 + 2s_{12} X_0 Y_0 + s_{22} X_0^2) / 4A_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

であり、応力とひずみに対応する部分の小行列である。

式(8)に基づく逐次計算により各載荷ステップの粒子移動、回転量が定まる。またこれより接触点における相対変位を定義することができるので、これをもとに次節における散逸エネルギーを定めることができる。すべりは接線成分の中から接触力に対応する弾性部分を除いたものとして定義することができる。

3. 種々の統計量の定義

3.1 散逸エネルギー

粒子集合体の載荷試験は等方応力状態から出発して、載荷方向に沿って一定の応力増分を与えて段階的に行う。1ステップの載荷過程においては近似的に線形性が成り立つと仮定して、第 s 載荷ステップまでの散逸エネルギーを次式で定義する。

$$W^p = W - W^e \quad (12)$$

W は第 s 載荷ステップまでの外力のする仕事であり、次式で与えられる。

$$W = \sum_{i=1}^s \Delta W^i \quad (13)$$

上式の ΔW^i は第 i ステップにおける外力のする仕事の増分であり、次式で与えられる。

$$\Delta W^i = \sum_B \left\{ (p_x^{i-1} + p_x^i) \Delta x^i + (p_y^{i-1} + p_y^i) \Delta y^i \right\} / 2 \quad (14)$$

ここに

$\sum_B$: 全ての境界粒子についての和

$\Delta x^i, \Delta y^i$: 第 i 載荷ステップにおける境界粒子中心の x, y 方向変位増分

p_x^i, p_y^i : 第 i 載荷ステップにおける境界粒子中心に作用する外力の x, y 成分

p_x^{i-1}, p_y^{i-1} : 第 $i-1$ 載荷ステップにおける境界粒子中心に作用する外力の x, y 成分

また、 W^e は第 s 載荷ステップまでのバネに蓄えられる弾性エネルギーを表し、次式で与えられる。

$$W^e = \sum_C (p_n^2 / c_n + p_t^2 / c_t) / 2 \quad (15)$$

式(12)で定義される散逸エネルギー W^p は後に述べる遷移点の前においては全ての接触点毎に算定される摩擦エネルギーの和と殆ど一致した。なお、接触点毎の摩擦

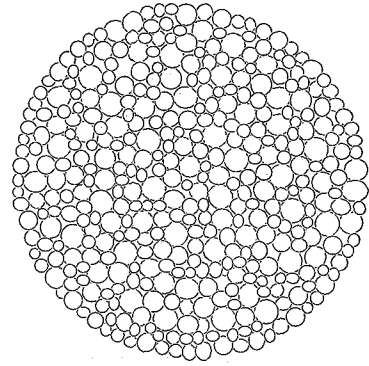


図3 粒状供試体モデル

エネルギーは次のように算定される。

ある載荷ステップにおいて接触点を①接触し続ける点、②接触が失われる点、③新しく接触する点の3種類に分ける。①に対しては載荷ステップ前後における p_t の平均値にすべり量を乗することにより摩擦エネルギーを計算する。②、③に対しては諸粒子の移動を直線的と仮定し、その接触点の分離や発生時点を定め、接触している間は p_t が直線的に変化するものと仮定した上で①と同様に摩擦エネルギーを計算する。

3.2 変形分散テンソル

著者の一人¹⁰⁾は粒子個々の実際の変位量と巨視的なひずみ増分によって定められる平均的な移動量との差のばらつきを表現するために以下の変形分散テンソルを提案した。

$$T = \begin{bmatrix} \sum_i \Delta s_x \Delta s_x / m & \sum_i \Delta s_x \Delta s_y / m \\ \sum_i \Delta s_y \Delta s_x / m & \sum_i \Delta s_y \Delta s_y / m \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここに、

$\sum_i$: 全ての内部粒子についての和

m : 接触点数

$$\left. \begin{aligned} \Delta s_x &= \Delta r_x - \overline{\Delta r_x} \\ \Delta s_y &= \Delta r_y - \overline{\Delta r_y} \\ \Delta r_x &= \Delta x - \Delta X \\ \Delta r_y &= \Delta y - \Delta Y \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$\Delta x, \Delta y$: 内部粒子中心の1載荷ステップにおいて生じた実際の変位増分の x, y 成分

$\Delta X, \Delta Y$: ひずみ増分より式(1)によって求めた内部粒子中心の1載荷ステップにおける変位増分の x, y 成分

$\overline{\Delta r_x}, \overline{\Delta r_y}$: $\Delta r_x, \Delta r_y$ の平均

ここに、 $\overline{\Delta r_x}, \overline{\Delta r_y}$ は、式(1)の境界制御により期待される変位ベクトルと実際の変位ベクトルの差の全ての内部粒子についての平均値であるが、一般には零ではない微小な値となる。この理由は、式(1)により完全に制御される境界粒子についての平均値は零であるに対し、境界粒子に追従して移動する内部粒子についての平均値は零となるように強制できないためである。

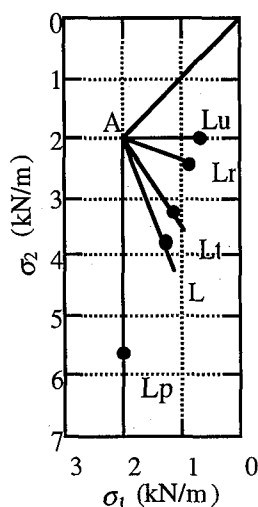


図4 主応力空間の5つの載荷経路と遷移点

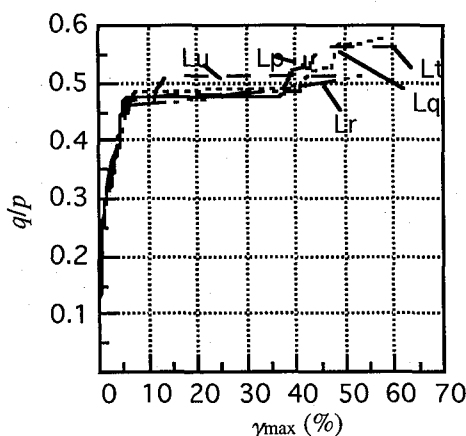


図5 5つの載荷経路上の応力ひずみ曲線

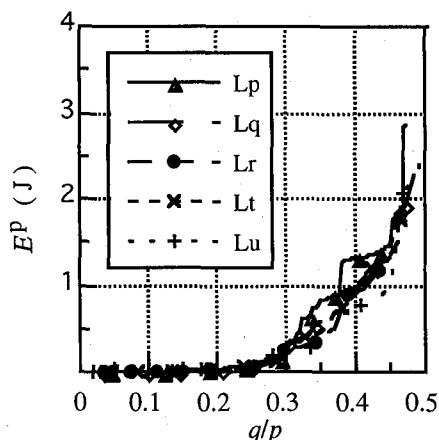


図6 5つの載荷経路上の散逸エネルギー

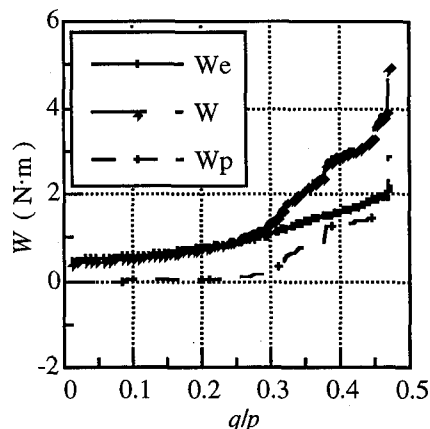


図7 Lp載荷経路上の弾塑性仕事

4. 粒状体モデルの載荷試験とプローブ試験

4.1 粒状体モデルと載荷経路

粒状供試体モデルを図-3に示す。領域全体の形状はほぼ円形で、この領域に395個の円形粒子がパッキングされている。境界粒子は72個で、粒子の半径は0.5cmから1cmまでの一様分布とした。また、接触点における法線および接線方向のバネ定数は、それぞれ、 $c_n=1000\text{kN/m}$ および $c_t=700\text{kN/m}$ 、摩擦角は $\phi=25^\circ$ とした。なお、バネ定数を変えることにより、弾性変形と塑性変形の大きさの割合が変わることが予想される。ただし極端に小さな値を用いない限り、弾塑性変形特性を定性的に明らかにする目的には充分であると考え、これらの値を用いることとした。

載荷試験は応力の主軸を x, y 方向に固定した応力制御により行った。図4に主応力空間上の載荷経路を示す。原点を右上に置き、軸の値は圧縮を正として示した。図のA点は原点から2 kN/mまで等方圧縮して得られた状態である。載荷試験はA点から出発して、5つの載荷経路Lp, Lq, Lt, Lr, Luに沿って行った。

4.2 各載荷経路の応力ひずみ曲線と統計量

図5に5つの載荷経路上の応力ひずみ曲線を示す。縦軸と横軸は、次の応力比と最大せん断ひずみを表す。

$$q/p = (\sigma_2 - \sigma_1) / (\sigma_2 + \sigma_1) \quad (18)$$

$$\gamma_{\max} = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} / 4 = 2\sqrt{J_2'} \quad (19)$$

図-5に示した全ての載荷経路において $q/p=0.47\sim0.52$ 付近で急に大きなひずみ ($>20\%$) が発生した。しかし、大変形後に再び安定した点が見られる。ここでは急激にひずみが生じる点を遷移点と名づけ、図-4に黒丸で表す。大変形後に再び安定する理由は粒子集合体の内部構造が変化し、初期とは別の安定した状態に到達したためである。ただし、本文においては第一のピーク以前の安定的な弾塑性挙動を主として考察することとする。

5つの異なる載荷経路の応力ひずみ曲線は図-5に示したように殆ど一致することが注目される。以下、種々の統計量と q/p との関連について検討することとする。

まず、集合体の5つの載荷経路上の遷移点以前の散逸エネルギー W^p と q/p の関係を図-6に示す。どの経路においても q/p が小さい時にはほぼ零で、 $q/p=0.5$ の付近で急増している。この傾向はどの載荷経路についても一致していると言える。

式(12)-(15)によって5つの載荷経路の外力仕事 W 、弾性エネルギー W^e 、散逸エネルギー W^p を計算した。図-7にLp載荷経路に沿って求めた W^e , W , W^p と q/p の関係を示した。なお、3.1の最後に述べた接触点における摩擦エネルギーを基に求めた W^p の値と図-7の W^p と

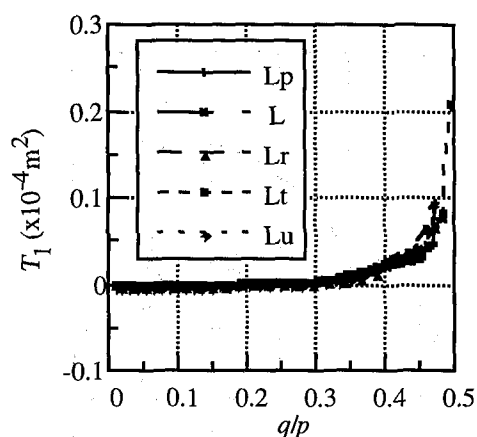


図8 5つの载荷経路上の第1主変形分散

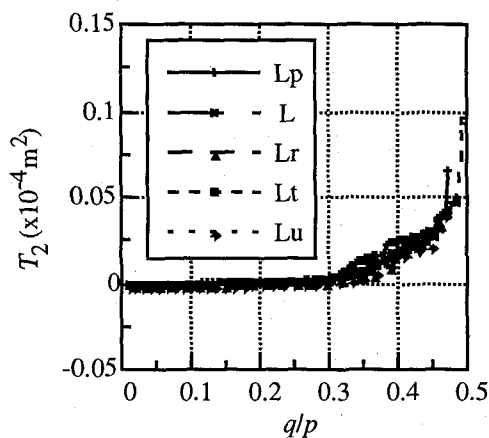


図9 5つの载荷経路上の第2主変形分散

の誤差は遷移点前で最大3%程度、遷移点後では15%程度である。とくに遷移点後においては線形性を仮定した計算には無理があると考えられる。

変形分散テンソル T の2つの固有値（主変形分散）と q/p の関係を図-8, 9に示した。5つの载荷経路の主変形分散曲線はほぼ同様の変化を示している。主変形分散曲線と散逸曲線とが相似であることは両者とも接触点の滑りに関連しているためと考えられる。以上のように、各統計量はいずれも q/p の関数として整理されることが注目される。

以下、Lp 载荷経路を例としてプローブ試験に基づく弾塑性挙動の検討結果を示す。

4.3 プローブ試験の例

図-10に示すようにLp 载荷経路上に一連の点を選んでプローブ試験を行う。Lp 载荷経路の応力ひずみ曲線を図-11に示す。この図に示されているように、p90は遷移点の直前のプローブ試験点である。

プローブ試験は、一つの载荷試験点から出発して、図-12に示すように45°間隔8方向に絶対値の等しい応力増分を与えて载荷・除荷試験を行う。各プローブ試験方向の全ひずみ増分を弾性部分と塑性部分に分けて、

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p \quad (20)$$

と表わす。ここに、

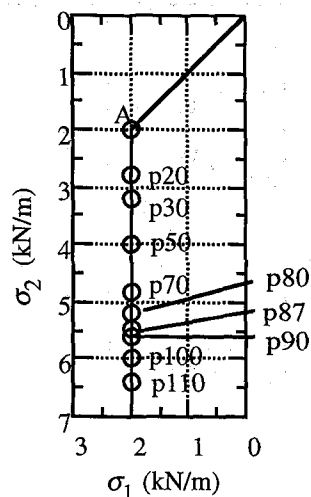


図-10 Lp 载荷経路のプローブ試験点

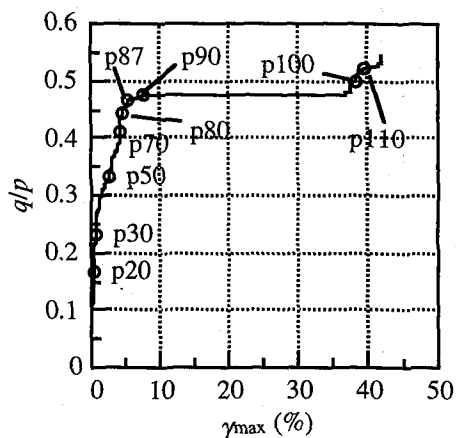


図-11 Lp 载荷経路の応力ひずみ曲線とプローブ試験点

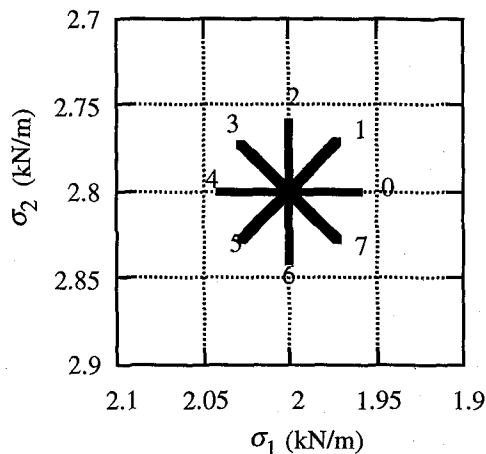


図-12 p20点におけるのプローブ試験

$\Delta \varepsilon$ ：载荷によって発生した全ひずみ増分

$\Delta \varepsilon^e, \Delta \varepsilon^p$ ：弾性および塑性ひずみ増分

である。除荷時には弾性ひずみ部分は回復するので、塑性ひずみ増分 $\Delta \varepsilon^p$ が残留部分として求まり、弾性ひずみ増分は次式で与えられる。

$$\Delta \varepsilon^e = \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^p \quad (21)$$

p20におけるプローブ試験から得られた弾性ひずみ増

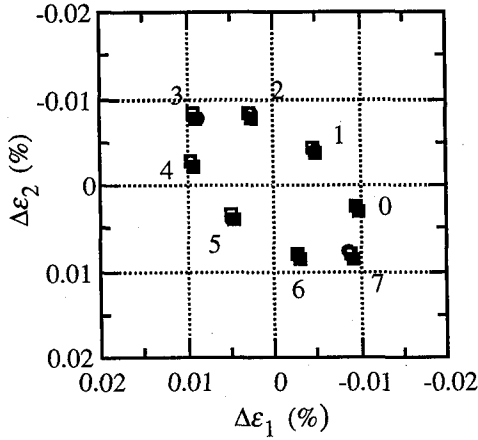


図-13 p20点におけるプローブ試験の弾性主ひずみ増分
(■：試験値 ○：計算値 $\Delta\sigma = 0.04 \text{ kN/m}$)

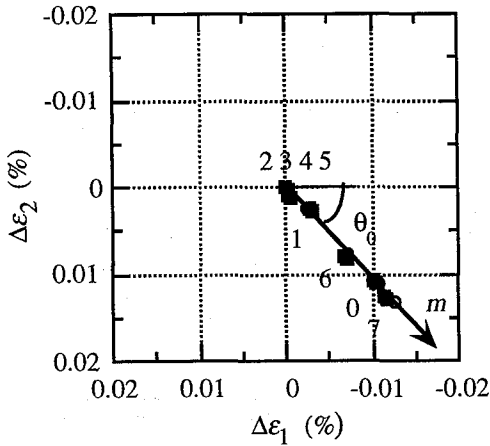


図-14 p20におけるプローブ試験の塑性主ひずみ増分
(■：試験値 ○：計算値 $\Delta\sigma = 0.04 \text{ kN/m}$)

分と塑性ひずみ増分の分布をそれぞれ図-13,14に示す。弾性ひずみ増分の分布はほぼ主ひずみ空間座標原点を中心とする楕円である。理想的な等方弾性体において、大きさ $\Delta\sigma$ の応力増分に対するひずみ増分の2乗は、

$$\Delta\epsilon^2 = \Delta\epsilon_1^2 + \Delta\epsilon_2^2 = \left(\frac{\Delta\sigma}{E}\right)^2 (1 + \nu^2 - 2\nu \sin 2\theta) \quad (22)$$

となり、これは長軸方向 $\theta = -45^\circ$ 、短軸方向 $\theta = 45^\circ$ の主ひずみ空間座標原点を中心とする楕円で、この楕円の長軸と短軸の長さについて次式が成立する。

$$\Delta\epsilon_{\max} = \frac{\Delta\sigma}{E} (1 + \nu), \quad \Delta\epsilon_{\min} = \frac{\Delta\sigma}{E} (1 - \nu) \quad (23)$$

異方性が生じると、弾性ひずみ増分の分布は楕円状ではあるが、その主軸の方向は -45° とは異なった値を示す。図-13より p20 点の場合は弾性部分は等方的と見なすことができよう。

図-14より塑性ひずみ増分については1, 6, 0, 7のプローブ試験方向の塑性ひずみ増分はおよそ主ひずみ空間の傾き -45° の直線上に一列に並んでいる。他の4つのプローブ試験方向(2, 3, 4, 5)は除荷方向であり、塑性ひずみ増分が零となっている。

このような傾向は個別要素法を用いた Bardet の試験結

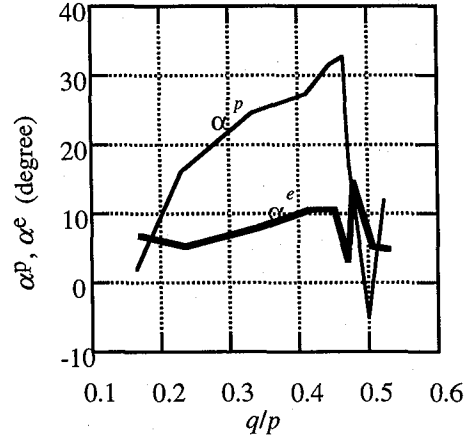


図-15 Lp 荷経路の弾塑性主ひずみ増分方向の変化

果⁹⁾に比べて、より明確であると言える。

なお、主応力方向と主ひずみ増分方向は一般に一致しない。応力主軸に対する弾性ひずみ増分主軸の方向角 α^e と塑性ひずみ増分主軸の方向角 α^p はプローブ試験の方向に依らずほぼ等しい値となったので、次式のように平均値として算定した。

$$\alpha^e = \left\{ \sum_{i=0}^7 \arctan[2\Delta\epsilon_{xy}^e / (\Delta\epsilon_y^e - \Delta\epsilon_x^e)] / 2 \right\} / 8 \quad (24)$$

$$\alpha^p = \left\{ \sum_{i=0,1,6,7} \arctan[2\Delta\epsilon_{xy}^p / (\Delta\epsilon_y^p - \Delta\epsilon_x^p)] / 2 \right\} / 4 \quad (25)$$

なお、 α^p については塑性ひずみが生じる4方向の方向角のみの平均として求めた。

図-15に示したように、 α^p は遷移点 ($q/p = 0.47$) の前でおおよそ q/p の増加と共に増加し、遷移点の後は急に変動している。 α^e はあまり大きくはなく、弾性ひずみ増分の主軸がほぼ x, y 軸に一致している。

5. 供試体のコンプライアンスに関する考察

粒状体は離散体であるが、その連続体としての平均的な挙動は弾塑性的であると考え、ひずみ増分と応力増分の間の関係をコンプライアンス行列を定めて検討する。

5.1 弾性コンプライアンス

供試体のある荷重段階において、弾性ひずみ部分については以下の弾性関係があると仮定する。

$$\begin{bmatrix} \Delta\epsilon_x^e \\ \Delta\epsilon_y^e \\ \Delta\gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^e & c_{12}^e & c_{13}^e \\ c_{21}^e & c_{22}^e & c_{23}^e \\ c_{31}^e & c_{32}^e & c_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (26)$$

もし応力増分とひずみ増分をテンソル表記で

$$\Delta\sigma = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_x & \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{xy} & \Delta\sigma_y \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\Delta\epsilon^e = \begin{bmatrix} \Delta\epsilon_x & \Delta\gamma_{xy}/2 \\ \Delta\gamma_{xy}/2 & \Delta\epsilon_y \end{bmatrix} \quad (28)$$

のように表すと、式(26)は次式のように書くことができる。

$$\Delta\epsilon^e = C^e : \Delta\sigma \quad (29)$$

ここに C^e は弾性コンプライアンスを表す4次のテン

表-1 コンプライアンス行列で求めた
ひずみ増分の最大計算誤差

プローブ試験点	弾性ひずみ	塑性ひずみ
p20	9.4%	8.5%
p30	11.4%	6.8%
p70	13.5%	3.2%
p80	17.6%	23.1%
p87	31.8%	6.9%
p90	126%	9.7%
p100	24.1%	109.7%
p110	32.8%	57%

ソルである。ある载荷ステップにおいて C^e はあらゆる
载荷方向に共通した定数である。

図-12のようなプローブ試験の0,4方向や2,6方向の
応力増分はそれぞれ $[\pm\Delta\sigma \ 0 \ 0]^t$, $[0 \ \pm\Delta\sigma \ 0]^t$ であ
るので、このプローブ試験の結果の平均をとって弾性コ
ンプライアンス行列の第1, 2列がそれぞれ得られる。
他に応力増分を $[0 \ 0 \ \pm\Delta\sigma]^t$ と与えて試験を行って第
3列を構成すれば、p20点において以下の弾性コンプラ
イアンス行列を得る。

$$\begin{bmatrix} 2.425 & -0.666 & -0.225 \\ -0.678 & 2.060 & 0.275 \\ -0.138 & 0.151 & 6.375 \end{bmatrix} \times 10^{-3} (\text{m/kN})$$

このデータは等方弾性コンプライアンス行列

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (30)$$

(E, ν はヤング係数とポアソン比)で近似されよう。等方
性は応力状態が静水圧に近い場合に観察される。静水圧
状態から離れると異方性の特徴が現れる。p80点におけ
る弾性コンプライアンス行列を以下に示す。

$$\begin{bmatrix} 4.099 & -0.976 & -0.300 \\ -0.102 & 1.840 & 0.138 \\ -0.1940 & -0.006 & 4.263 \end{bmatrix} \times 10^{-3} (\text{m/kN})$$

上記の結果より P20 と p80 の s_{11}^e/s_{22}^e の値は、それぞ
れ、1.18, 2.23 となり、後者においては異方性が顕著であ
る。P20 について各プローブ試験方向の弾性ひずみ増分
と弾性コンプライアンス行列によって算定した弾性ひず
み増分を図-13 に示す。同図より、算定値と4.3に示した
プローブ試験値とは良く一致していることが分かる。

弾性ひずみ増分と後に述べる塑性ひずみ増分について、
コンプライアンス行列に基づく計算値と载荷試験で求め
た実際の値の誤差を評価するために、各プローブ試験点

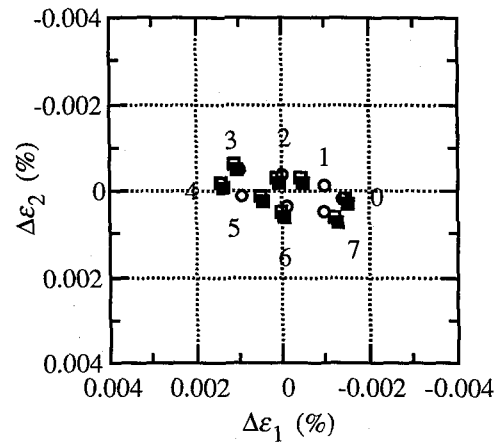


図-16 p90点における弾性主ひずみ増分
(■:試験値 ○:計算値 $\Delta\sigma = 0.005 \text{ kN/m}$)

の相対誤差を次式により求めた。

$$err = \frac{\sqrt{(\Delta\epsilon_1 - \Delta\epsilon_{01})^2 + (\Delta\epsilon_2 - \Delta\epsilon_{02})^2}}{\sqrt{\Delta\epsilon_{01}^2 + \Delta\epsilon_{02}^2}} \quad (31)$$

ここに、

$\Delta\epsilon_{01}, \Delta\epsilon_{02}$: プローブ試験で得られた主ひずみ増分

$\Delta\epsilon_1, \Delta\epsilon_2$: コンプライアンス行列に基づいて計算し
た主ひずみ増分

表-1 に各プローブ試験点毎に得られた計算値の誤差の
最大値を示す。図-16 には p90点における弾性ひずみ増分
についてプローブ試験で得られた値とコンプライアンス
行列により計算した値の比較を示した。p90点において
は弾性ひずみ増分の分布を示す楕円の長軸の方向が -45°
の方向と異なり、明らかに異方性の特徴を示している。
この場合の弾性ひずみ増分の計算誤差は表-1 より126%に
達したが、これは図-16に見られるように、1, 5 方向の相
対誤差である。これらの方向において式(31)の分母は小
さく、これが最大誤差を大きくした原因となっている。
しかし、試験値と計算値はほぼ一致していると言える。

5.2 塑性流動方向

塑性流動則は次式により表される。

$$\Delta\epsilon^p = C^p : \Delta\sigma = \left\langle \frac{1}{h} \mathbf{n} : \Delta\sigma \right\rangle \mathbf{m} \quad (32)$$

ここに

$\Delta\epsilon^p$: 塑性ひずみ増分テンソル

C^p : 塑性コンプライアンステンソル

$\Delta\sigma$: 応力増分テンソル

$\mathbf{n}, \mathbf{m}$: 降伏曲面の法線方向と流動方向の単位テンソル

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

h : 硬化係数

$\mathbf{n}$ と $\mathbf{m}$ が等しければ関連流動則、異なれば非関連流
動則である。

図-14 に示されているように、p20 における4つの载荷
方向(0, 1, 6, 7)の塑性ひずみ増分 $\Delta\epsilon^p$ の主ひずみ空
間における方向($\mathbf{m}$ の方向) θ_0 は、ほぼ -45° 方向である。
式(32)によれば、 $\Delta\epsilon^p$ は応力増分ベクトル $\Delta\sigma$ と降伏曲面

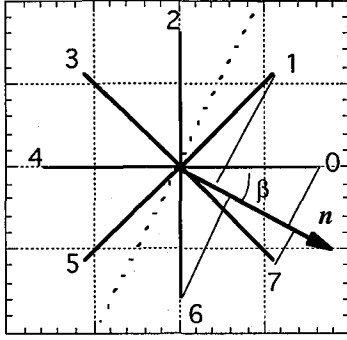


図-17 降伏曲線の法線 n の算定

の外向き法線ベクトル n の内積に比例している。 n の方向を主応力空間の方向角 β (図-17) で表す。 β は以下のように最小二乗法で求めることができる。 いまある β を仮定したときの4つ載荷方向 (0, 1, 6, 7) の $\Delta\epsilon^p$ の長さの計算誤差の平方和を次式によって表す。

$$S = \sum_{i=0,1,6,7} \{\Delta a \cos(\beta - \theta_i) / h - L_i\}^2 \quad (33)$$

θ_i : 載荷方向 i の方向角

L_i : 載荷方向 i の塑性ひずみ増分の大きさ

Δa : 弾性増分 $\Delta\sigma$ の大きさ(一定値)

β は S を最小化するように定めるべきであるので

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad (34)$$

即ち、 β を

$$\tan \beta = -(\sqrt{2}L_6 - L_1 + L_7) / (\sqrt{2}L_0 + L_1 + L_7) \quad (35)$$

と定めればよい。 同様に

$$h = \frac{\Delta a (\cos \beta + \cos(45^\circ - \beta) + \sin \beta + \cos(\beta + 45^\circ))}{L_0 + L_1 + L_6 + L_7} \quad (36)$$

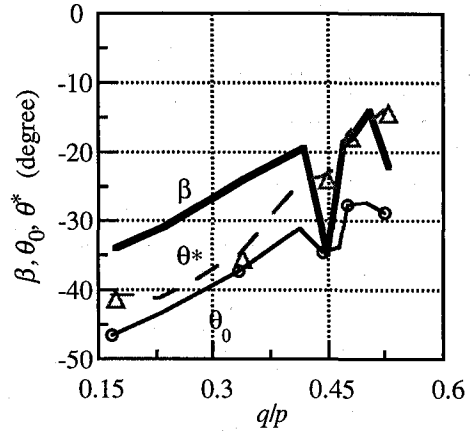
も得られる。

図-10 の Lp 載荷経路上の諸点におけるプローブ試験によって求めた β と θ_0 の値を図-18に示す。 同図より $\beta - \theta_0 \approx 13^\circ$ となり、関連流動則が成立しないことは明らかである。 p80点では一時的に異なる傾向を示したが、これは離散体内部の局所的な構造変化の影響によると考えられる。

離散体は連続体とは異なって、外力の増加に従って滑らかに変形せず、突然局所的に大きな変形が発生することがしばしば観察される。 遷移点におけるような全体的に大きな変形が発生しなくても、様々な統計量の変化は必ずしも滑らかではない。 例えば図-18の β の値は p80点 ($q/p=0.44$) で急変している。 このような局所的な変化は粒子数を多くすれば平均化され、統計量の変化も徐々に滑らかになるものと考えられる。 これは将来の研究課題として残ると考えられよう。

5.3 塑性コンプライアンス

式 (32) に戻り、同式中の $\langle \rangle$ の作用はプローブ試験方向 0, 1, 6, 7 にのみ及ぶとする。 塑性コンプライアンス



β : 降伏曲面の法線方向

θ_0 : 流動方向 θ^* : 弾性楕円長軸

図-18 Lp 載荷経路における各種方向角

C^p は以下の形になる。

$$C^p = \frac{1}{h} mn \quad (37)$$

ここに m と n は以下の通りである。

$$m = \begin{bmatrix} A + B \cos 2\alpha & -B \sin 2\alpha \\ -B \sin 2\alpha & A - B \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$n = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta \end{bmatrix} \quad (39)$$

ここに、

$$A = \frac{\cos \theta_0 + \sin \theta_0}{2} \quad (40)$$

$$B = \frac{\cos \theta_0 - \sin \theta_0}{2} \quad (41)$$

と定義する。 これらは単位テンソルの条件

$$m:m=1 \quad (42)$$

$$n:n=1 \quad (43)$$

を満足している。 いま座標系を主ひずみ方向にとったとすると、 m の成分は方向角 θ_0 を用いて

$$m' = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

のように表すことができる。 これを以下のように x, y 座標に変換することにより m が求まる。

$$m = T \cdot m' \cdot T^t \quad (45)$$

ここに、

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (46)$$

は座標変換行列である。

図-18より $\beta \neq \theta_0$ であるので、式(37)により C^p は非対称となる。 弾性コンプライアンス C^e は比較的対称性を備えているが、 C^p は非対称であるため、それらの和として求まるコンプライアンス $C^e + C^p$ は非対称であると考えられる。 図-19 は Lp 載荷経路に沿うプローブ試験の弾性ひずみ増分および塑性ひずみ増分の大きさの最大値 $\Delta\epsilon_{\max}^e, \Delta\epsilon_{\max}^p$ と q/p の関係を表す。 同図より初期を除いて、塑性ひずみ増分は弾性ひずみ増分より大きいことが示されている。 よって、 C^p の影響が C^e の影響より大き

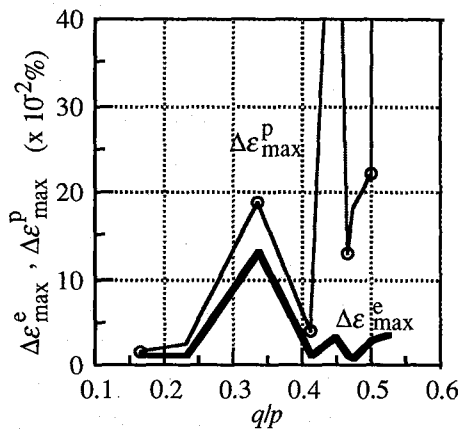


図-19 Lp 荷経路の弾塑性ひずみ増分の最大値
($\Delta \varepsilon_{\max}^e$: 弾性増分最大値 $\Delta \varepsilon_{\max}^p$: 塑性増分最大値)

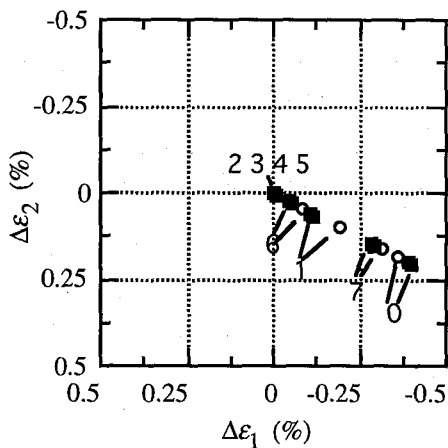


図-20 p100点における塑性主ひずみ増分
(■ : 試験値 ○ : 計算値 $\Delta \sigma = 0.08 \text{ kN/m}$)

く、 $\mathbf{C}^e + \mathbf{C}^p$ は常に非対称であるということができる。

各プローブ試験について式 (37) によって $\mathbf{C}^p$ が求まるので、これを式 (32) に代入すればプローブ試験方向 0, 1, 6, 7 の塑性ひずみ増分を計算することができる。この計算値をプローブ試験で実際に求まった値と比較して最大相対誤差を求めた結果を表-1 に示す。遷移点後の p100 点の相対誤差は 107.9% に達し、このような段階では弾塑性モデルの有効性が失われつつある。p20, p100 点の供試体の塑性ひずみ増分試験値と計算値の比較は図-14, 20 に示されている。

流動則によれば、塑性ひずみ増分ベクトルの方向は応力増分ベクトルの方向に拘わらず一定であるが、このことを微視的な立場から調べるため変形分散テンソルの算定を行った。もし微視的な粒子間滑りの分布が応力増分方向に依存せず一定であれば、式(16)で定義された変形分散テンソル $\mathbf{T}$ の各成分の比は 0, 1, 6, 7 方向に対して同一であると考えられる。p90 点の 4 つの非零の塑性ひずみ増分試験方向における $\mathbf{T}$ の 3 つの独立成分 T_{11} , T_{22} , T_{12} の比較を図-21 に示す。同図の横軸はプローブ試験の方向角で、縦軸は各成分の大きさである。この図より上述の比例関係を確認することができる。

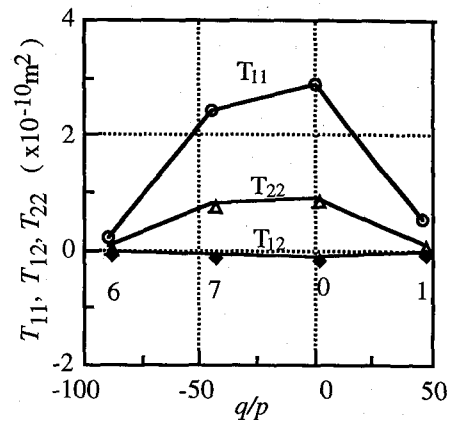


図-21 p90点各プローブ試験方向の変形テンソルの成分

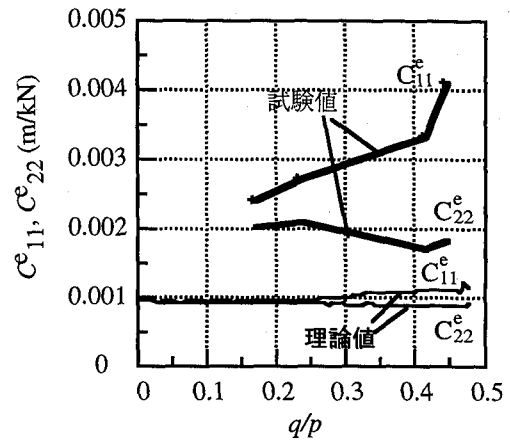


図-22 Lp 荷経路の c_{11}^e , c_{22}^e の試験値と理論値¹¹⁾

以上より、粒状集合体に対して遷移点以前においてはある種の弾塑性モデルが有効であることが確認された。ただし、非関連流動や応力主軸とひずみ増分主軸のずれを適切にモデル化することが重要である。

6. Chang の公式との比較

図-22 に、Lp 荷経路のプローブ試験から得られた弾性コンプライアンスの対角要素の値を示す。同図より第 1, 2 対角要素はそれぞれ、 q/p の増加とともに増大、減少しており明確な誘導異方性の傾向を示している。

Chang らは粒状体の微視構造に基づいて構成則の理論的研究を行い、以下のような剛性テンソル算定式を誘導した^{11, 12)}。

$$S_{ijk} = \frac{1}{2V} \sum_n \sum_m l_i^{nm} K_{jl}^{nm} l_k^{nm} \quad (47)$$

ここに

V : 粒子集合の体積

l_i^{nm}, l_k^{nm} : 粒子 n と粒子 m の中心を繋ぐベクトルの i, k 方向への投影

K_{jl}^{nm} : 粒子 n と粒子 m の接点の剛性行列

式(47)の剛性テンソルの逆行列は弾性コンプライアンスに相当するものと考えられる。式 (47) によって剛性行列を算定し、その逆行列より、式(26)の c_{11}^e, c_{22}^e に相当す

る対角要素を求めた結果を図-22 に示す、この結果をプローブ試験で得られた値と比べてみると、著しい違いがあることが分かる。

このように異なる理由は、式(47)においては接触点間の滑りを拘束しているのに対して、プローブ試験においては接触点間の滑りが考慮されているためであろう。計算によって 0, 1, 6, 7 方向の除荷過程に滑る接点はそれぞれ接点数の 47.22, 48.69, 58.71, 50.97 %に達している(ただし、滑り量が 10^{-4} cm以上のものは5%程度)。この回復性の滑りが結果的に弾性ひずみの中に含まれ、これを無視することはできないと言うことがてきよう。

式(47)の外にもChangは全体ひずみ増分に対しての種々理論剛性行列を導いているが、以下の理由によりプローブ試験の結果とは比較することはできなかった。

a) Chang の論文では除荷する方向に塑性ひずみ増分が無いことを説明していない

b) Chang の論文では応力空間と主ひずみ空間の非共軸性を説明していない

c) Chang の論文では一部のテンソルをどの様にして得るかにについて詳しく説明していない。

c)については例えば次式⁽¹³⁾において用いられているテンソル H_{ijkl}^n をどのように計算すべきか不明である。

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = H_{ijkl}^n \Delta \varepsilon_{kl} \quad (48)$$

ここに、

$\Delta \varepsilon_{ij}^n$: ある粒子中心に当たる局所のひずみ

$\Delta \varepsilon_{kl}$: 粒子集合の平均ひずみ

H_{ijkl}^n : 平均ひずみと局所ひずみの対応を表すテンソル

7. おわりに

以上、粒状要素法²⁾を用いた粒状体モデルシミュレーションによるプローブ試験を行い、遷移点以前の粒状集合体に対して弾性コンプライアンスおよび塑性コンプライアンスを定めて、応力増分およびひずみ増分の間の関係を表すことが可能であることを確認した。弾性コンプライアンス行列はほぼ対称であるが、塑性コンプライアンス行列は一般的に非対称であって、載荷する方向にのみ適用される。また、 q/p が増えるとともに塑性ひずみ増分も増加し、遷移点の直前で急速に増加する。以上のことから、遷移点以前の粒状集合体に対してはある種の弾塑性モデルを用いることが有効であると考えられる。ただし、本文に示したように、非関連流動則や応力主軸とひずみ増分主軸の不一致をどのように構成則に反映させるかが鍵となるであろう。また、回復性のひずみの中には散逸を伴う滑りが含まれていることが検証されたが、地盤材料供試体で弾性ひずみと見なされるものの中にはこのような散逸を伴うものがあることが重要であると考えられる。従って、粒状体の構成則は単に粒子配列の幾何学的情報のみから弾性コンプライアンスに相当するも

のを導くことは困難であろうと考えられる。なお、本文においては、材料定数などについて十分な検討を行っていないが、これについては今後の課題としたい。

粒状体の力学的構造は、粒子の数、粒子の形、粒子の大きさおよび接触点の性質のみであり、非常に単純であるが、粒子集合の巨視的な力学的性質は極めて複雑である。粒状体の微視的な挙動と巨視的な表現の間には統計学的なかけ橋が必要であろう。理想気体における統計力学的説明のように、粒状体についての統計理論が期待されるところである。本文では構成則理論を粒状体モデルによって検証する方法を提供したが、この方法論を粒状体力学の構成に用いることは極めて有効であると考えられる。

参考文献

- 1) Newland, P.L. and Alley, B.H.: Volume Changes in Drained Triaxial Tests on Granular Materials, *Géotechnique*, 7, pp. 17-34, 1957.
- 2) Rowe, P.W.: The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, *Proc. R. Soc. Lond.*, A-269, pp. 500-527, 1961.
- 3) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique* 29, pp.47-65, 1979.
- 4) Bardet, J.P.: Numerical simulation of the incremental responses of idealized granular materials, *Int. J. Plasticity*, 10, pp.879-908, 1994.
- 5) 岸野佑次: 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, *土木学会論文集*, 406, pp.97-106, 1989.
- 6) Kishino, Y.: Computer analysis of dissipation mechanism in granular media, *Powders and Grains*, A. A. Balkema, pp. 323-330, 1989.
- 7) 岸野佑次, 森谷直樹: 粒状体の応力ひずみ関係における増分非線形性の微視力学的解析, *構造工学論文集*, 42A, pp.307-316, 1996.
- 8) Owen, D.R.J.: *Finite Elements in Plasticity*, Redwood Burn Ltd., Trowbridge, 1980.
- 9) 武建勲, 岸野佑次, 京谷孝史: 改良粒状要素法による粒状体の弾塑性挙動の研究, *構造工学論文集*, 43A, pp.403-412, 1997.
- 10) Kishino, Y.: Statistical consideration on deformation characteristics of granular materials, *Proceedings of the U.S.-Japan Seminar on Continuum-Mechanics of Granular Materials*, pp.114-122, Tokyo, Japan (1978)
- 11) Chang, C.S. & Misra, A.: Application of uniform strain theory to heterogeneous granular Solid *Journal of the Engineering mechanics division, ASCE*. Vol.116, No.10, 2310- 2328 (1990)
- 12) Chang, C.S. & Liao, C.L.: Constitutive relation for a particulate medium with the effect of particle rotation, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 26, No.4, pp.437-453(1990)
- 13) Chang, C.S.: Dislocation and plasticity of granular materials with frictional contacts, *Powers & Grains* 93, Thornton Ed., 115-110(1993)

(1997年9月6日受付)