

初期横等方性を有する砂の構成則の定式化

FORMULATION OF A CONSTITUTIVE MODEL OF SAND WITH INHERENT TRANSVERSE ISOTROPY

鈴木輝一*, 柳澤栄司**

Kiichi SUZUKI and Eiji YANAGISAWA

*博(工) 埼玉大学助教授 工学部建設工学科 (〒338-0825 埼玉県浦和市下大久保255)

**工博 東北大学教授 工学研究科土木工学専攻 (〒980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉)

The fundamental characteristics regarding the shear behavior of Toyoura sand with inherent transverse isotropy, have been clarified by previous works of the authors through the analysis of the experimental results by a large hollow cylindrical apparatus. In this study, a constitutive model of sand with inherent transverse isotropy was formulated for a general boundary condition problem. The proposed constitutive model can be classified into the category of multi-surface model in the framework of the plastic theory. It is presented on the deviatoric stress plane normalized by mean stress, taking the effects of b -value and non-coaxiality into consideration. In order to obtain the elasto-plastic matrix, the partial derivative of some kind of plastic potential with respect to stresses was used. The validity was verified by comparing the experimental results with the calculated results by some three dimensional finite element studies.

Key Words : sand, inherent transverse isotropy, constitutive model

1. まえがき

一般に砂地盤は初期構造異方性を有するとされていることから、初期構造異方性を有する砂の変形・強度特性の把握および構成則の定式化が、実務レベルにおいても望まれるようになってきている¹⁾。また、液状化地盤等と構造物との相互作用問題のように、構造工学の観点から、より厳密な土の構成則が必要とされている。

従来、砂の構成則として数多くのモデルが提案されているが、近年、初期構造異方性を考慮した構成則についてもいくつか提案されてきている^{2)~8)}。それらの構成則は次の二つに分類することができる。一つは初期等方性砂を対象とした構成則を初期構造異方性砂に拡張した構成則と、もう一つは初期構造異方性を対象として実験を行い、その挙動特性に基づいて提案された構成則である。

前者としては、松岡他²⁾が各主応力間の滑動面で得られるひずみの線形の重ね合せが成り立つとした複合滑動面モデルを用いて、砂試料の堆積面と滑動面のなす角度に着目することによって、初期構造異方性砂にも拡張している。また、Tatsuoka³⁾および Yamada and Ishihara⁴⁾も複合滑動面モデルを用いて各2主応力間でのパラメータを変えることにより初期構造異方性を考慮することを提案している。瀧他⁵⁾は、平均的に最も滑動しやすい面すなわち空間滑動面において、主応力と主ひずみ増分の方向が一致するといういわゆる共軸性を仮定した空間滑動面モデルに、構造異方性テンソルを導入して初期構造異方性砂に適用している。同様に、Ghaboussi and Momen⁶⁾は

2 曲面モデルに構造テンソルを導入した構成則を提案している。

一方、初期構造異方性砂を対象として開発された構成則としては、Miura et al.⁷⁾が多方向すべりモデルを提案している。このモデルは、あらゆる位置ですべての方向に無数の潜在的なすべり面を有し、そのすべり面上で生じる変形機構に支配されるという基本的な仮定に基づいている。Gutierrez et al.⁸⁾は、 $b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ 値が0.5一定の条件下の偏差応力面上において、塑性係数の場の概念⁹⁾すなわち多曲面モデルを用いることにより、初期構造異方性を考慮した構成則を提案している。

しかしながら、初期構造異方性砂を対象とした実験結果によって、 b 値、非共軸性、主応力軸回転等による影響をすべて考慮し、かつ、一般座標系の応力・ひずみ表示を用いて、要素挙動を予測できるより汎用的な構成則は、まだ確立されていないのが現状である。

筆者らは、既に大型中空ねじりせん断試験装置を用い、排水時における主応力軸固定試験および主応力軸回転試験の実験結果の考察から、初期構造異方性の一つである初期横等方性を有する豊浦砂のせん断挙動特性について明らかにしている^{10), 11)}。初期横等方性とは、土粒子の堆積時にその長軸方向が水平方向を向くことにより、鉛直方向と水平方向では異方的であるが、水平方向にはいずれの方向にも等方的な性質をいい、堆積した砂地盤における典型的な初期構造異方性である。既にそれらのせん断挙動特性を用いることによって、与えられた応力増分

に対するひずみ増分を算定している^{10),11)}が、実地盤での圧密問題や液状化問題などのいわゆる境界値／初期値問題に適用させるためには、有限要素法等の数値解析手法を用いる必要があり、ひずみ増分に対して応力増分を算定する一般的な手法¹²⁾が必要となる。

本論文の目的は、初期横等方性を有する砂を対象として、より汎用的な構成則の定式化を行い、3次元有限要素解析プログラムによって、排水条件下の中空ねじり試験の実験結果と解析結果の比較を行い、提案する構成則の有限要素解析プログラムにおける基本的な妥当性を検証することにある。

2. 構成則の定式化

Zienkiewiczの手法¹³⁾を用いて、非線形材料を対象とした有限要素法における弾塑性マトリックスを求める。そのためには、負荷関数、塑性ポテンシャル、硬化則を定めておく必要がある。朴他¹⁴⁾によって初期構造異方性を有する砂でも微小ひずみ領域では等方弾性であることが示されていることから、ここでは、更に、大きなひずみ領域でも弾性ひずみの等方性は保たれると仮定することによって、弾性マトリックスがヤング率 E とポアソン比 ν だけで簡単に表せる。本論文では、堆積面に水平な方向の一つが中間主応力である場合について扱っている。また、材料の挙動特性を構成則に反映させるのに柔軟性を有することから、多曲面モデル⁹⁾の概念を用いている。

(1) 負荷関数

Miura et al.⁷⁾やGutierrez et al.⁸⁾は、軸差応力成分と単純せん断応力成分を座標軸とした偏差応力面で初期横等方性の挙動を表現している。ここでは、 b 値が0.5以外の場合についても統一的に表すために、楕円形状パラメータ c_1 、 $b=0.5$ に対する任意の b 値の破壊強度比 X_b 、最大主応力軸が鉛直軸となす角度 β 、それに応力比 q/p を用いた正規化偏差応力面で表す。各負荷曲面の関数形は次式で表される。

$$f = \left\{ \frac{1}{X_b} \frac{q}{p} \cos 2\beta - \bar{\alpha}_x^* \right\}^2 + \left\{ c_1 \frac{1}{X_b} \frac{q}{p} \sin 2\beta - \bar{\alpha}_y^* \right\}^2 - \left(\frac{q^*}{p} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

ここで、

β : 鉛直軸と最大主応力軸とがなす角度

p : 平均応力 $\left(= \frac{1}{3} \sigma_{ii} \right)$

q : 相当応力

$$\left(= \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{ij} - p\delta_{ij})(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})} \right)$$

$\frac{q}{p}$: 応力比

$\frac{q^*}{p}$: 負荷曲面の半径あるいは修正応力比($b=0.5$)

$\bar{\alpha}_x, \bar{\alpha}_y$: 負荷曲面の中心位置($b=0.5$)

c_1 : 楕円形状パラメータ

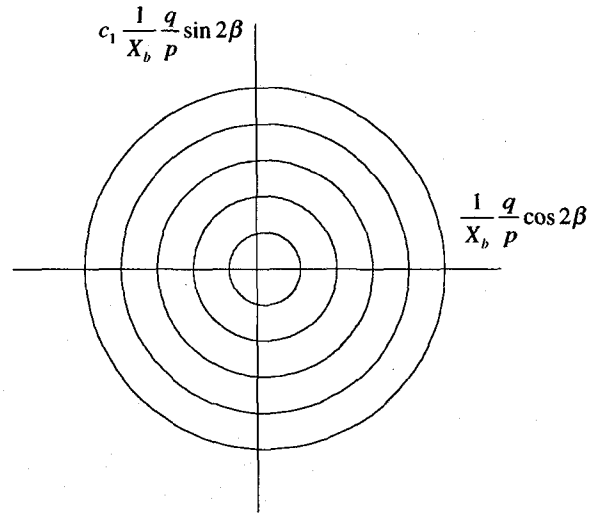


図-1 負荷曲面

X_b : $b=0.5$ に対する任意の b 値の破壊強度比

図-1で最も外側の負荷曲面が破壊曲面であり、式(1)を書き直すと式(2)のようになる。また、すべての負荷曲面は破壊曲面に相似形で、かつ、初期状態での負荷曲面の中心位置は、負荷曲面の修正応力比と破壊曲面の修正応力比に比例して得られると仮定している。

$$F = \left\{ \frac{1}{X_b} \left(\frac{q}{p} \right)_f \cos 2\beta - \alpha_f^* \right\}^2 + \left\{ c_1 \frac{1}{X_b} \left(\frac{q}{p} \right)_f \sin 2\beta \right\}^2 - \left(\frac{q^*}{p} \right)_f^2 = 0 \quad (2)$$

ここで、

$\left(\frac{q}{p} \right)_f$: 破壊時応力比

$\left(\frac{q^*}{p} \right)_f$: 破壊曲面の半径($b=0.5$)

α_f^* : 破壊曲面の中心位置($b=0.5$)

図-1から分かるように、初期等方性は初期において負荷曲面の中心が原点にある場合に相当する。

次に p, q を σ_1, σ_3, b によって示すと次式で表される。

$$p = \frac{1}{3} \{ (1+b)\sigma_1 + (2-b)\sigma_3 \} \quad (3)$$

$$q = \sqrt{b^2 - b + 1} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

また、一般座標系として、水平方向を x 、鉛直方向を y 、もう一つの水平方向である中間主応力方向を z とすると次式が得られる。

$$\sigma_y - \sigma_x = (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\beta \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \sin 2\beta$$

よって、図-1の座標軸は、 b 値ならびに $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ によって次のようにも表すことができる。

$$\frac{1}{X_b} \frac{q}{p} \cos 2\beta = \frac{1}{X_b} \frac{\sqrt{b^2 - b + 1}}{p} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \quad (5)$$

$$c_1 \frac{1}{X_b} \frac{q}{p} \sin 2\beta = c_1 \frac{1}{X_b} \frac{\sqrt{b^2 - b + 1}}{p} \frac{2\tau_{xy}}{p}$$

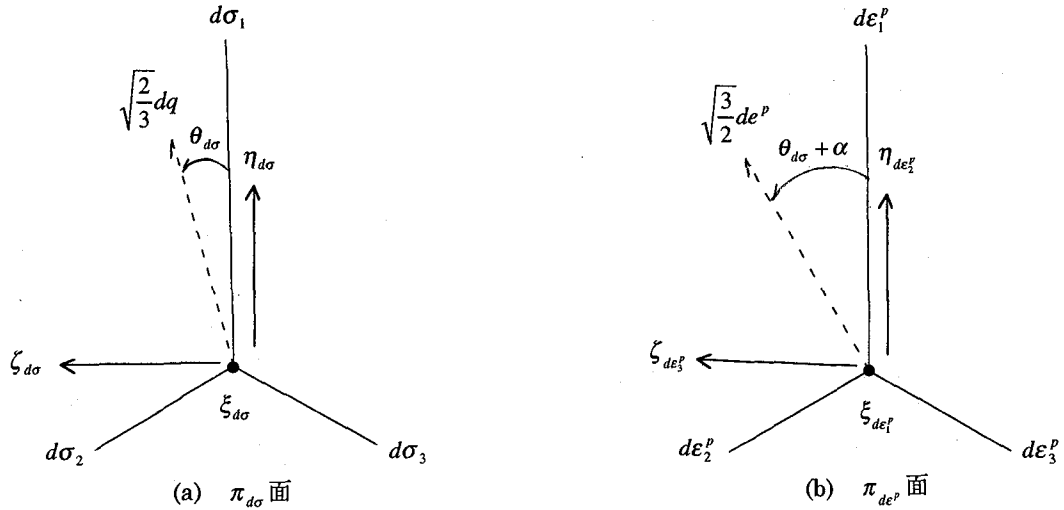


図-2 主応力増分の $\pi_{d\sigma}$ 面と主ひずみ増分の π_{de^p} 面

更に, $b=0.5, c_1=1.0$ の条件下では式(6)のようになり, Gutierrez et al.⁹⁾によって示されているものと等価になることが分かる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_b} \frac{q}{p} \cos 2\beta &= \sqrt{3} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2p} \\ \frac{1}{X_b} \frac{q}{p} \sin 2\beta &= \sqrt{3} \frac{\tau_{xy}}{p} \end{aligned} \quad (6)$$

(2) 塑性ポテンシャル

塑性ひずみ増分方向が応力増分方向に依存する^{10,11)}ことから, 従来のように応力のみによって定まる塑性ポテンシャル g では不十分である. ここでは, 応力増分方向にも依存する g , すなわち唯一性が保証されない g を Gutierrez et al.⁹⁾と同様に, 便宜上, そのまま塑性ポテンシャルと呼ぶことにする. 従来の塑性論に従い次式の流れ則を用いて弾塑性マトリックスを求める場合, 塑性ポテンシャルを応力に関して偏微分して得られる偏導関数のみが必要となり, 必ずしも塑性ポテンシャル g を直接求める必要はない.

$$de_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7)$$

ここで, λ は比例定数である. なお, 塑性ポテンシャルが負荷関数とは異なるため非関連流れ則となる.

塑性ひずみ増分を偏差成分 de_{ij}^p と体積成分 de_v^p に分けると,

$$de_{ij}^p = de_{ij}^p + \frac{1}{3} de_v^p \delta_{ij} \quad (8)$$

ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである.

一方, 塑性ポテンシャルの偏導関数を偏差成分 s_{ij} と平均応力成分 p に分けると,

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} + \frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial p} \delta_{ij} \quad (9)$$

すなわち, 式(7)は次式のようにも書ける. ここでは, 偏差応力および平均応力に関する偏導関数を求める.

$$\begin{aligned} de_{ij}^p &= \lambda \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} \\ de_v^p &= \lambda \frac{\partial g}{\partial p} \end{aligned} \quad (10)$$

種々の b 値のもとでの実験結果の考察から, 図-2に示すような π 面と同様な主応力増分の $\pi_{d\sigma}$ 面と主ひずみ増分の π_{de^p} 面の重ね合わせによって, 主ひずみ増分比は任意の主応力増分比をなす角度 $\theta_{d\sigma}$ から一様に $\alpha = 16.1^\circ$ (豊浦砂 $D_r = 72\%$ の場合) だけずれることを示した¹⁰⁾. ここで, 図-2(a)に示す3次元直交座標系 $(\xi_{d\sigma}, \eta_{d\sigma}, \zeta_{d\sigma})$ を導入すると, 3次元直交座標と主応力増分との関係は次式で表されることになる. 一般的にはこの3次元直交座標系は応力との関係を示すが, ここでは, α の値が応力に依存しない¹⁰⁾ことから応力増分を用いる.

$$\begin{aligned} \xi_{d\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3) \\ \eta_{d\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \{ (d\sigma_1 - d\sigma_2) + (d\sigma_1 - d\sigma_3) \} \\ \zeta_{d\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (d\sigma_2 - d\sigma_3) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし, $\pi_{d\sigma}$ 面では次の関係がある.

$$d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3 = 0 \quad (12)$$

よって, $\tan \theta_{d\sigma}$ は次式のようになる.

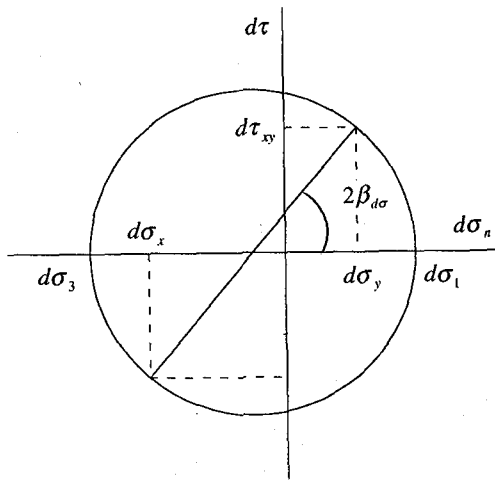
$$\begin{aligned} \tan \theta_{d\sigma} &= \frac{\zeta_{d\sigma}}{\eta_{d\sigma}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(d\sigma_2 - d\sigma_3)}{(2d\sigma_1 - d\sigma_2 - d\sigma_3)} \end{aligned} \quad (13)$$

また, 次式の b 値の定義を用いて, 応力増分に対する $b_{d\sigma}$ を定義する.

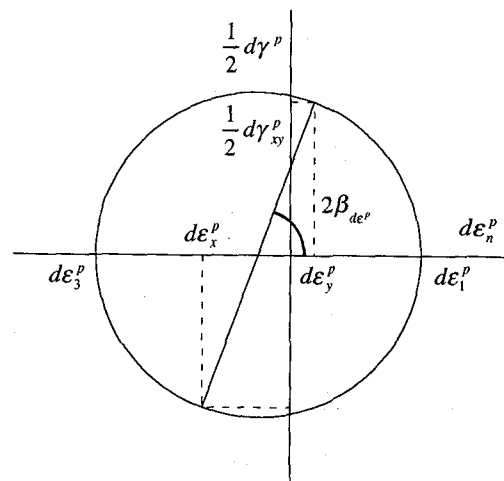
$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (14)$$

$$b_{d\sigma} = \frac{d\sigma_2 - d\sigma_3}{d\sigma_1 - d\sigma_3} \quad (15)$$

$b_{d\sigma}$ を用いて式(13)を書き直すと, 次のように $b_{d\sigma}$ によって表せる.



(a) 応力増分



(b) ひずみ増分

図-3 モール円

$$\tan \theta_{d\sigma} = \frac{\sqrt{3}b_{d\sigma}}{2 - b_{d\sigma}} \quad (16)$$

$$\text{or } \theta_{d\sigma} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}b_{d\sigma}}{2 - b_{d\sigma}} \right)$$

一方、相当応力増分は主偏差応力増分で表すと、

$$dq = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2} \quad (17)$$

よって、図-2(a)において、次の関係が成り立つ。

$$\sqrt{ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} dq \quad (18)$$

同様に、塑性ひずみ増分については、

$$\xi_{de^p} = \frac{1}{\sqrt{3}} (d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p + d\epsilon_3^p)$$

$$\eta_{de^p} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{ (d\epsilon_1^p - d\epsilon_2^p) + (d\epsilon_1^p - d\epsilon_3^p) \} \quad (19)$$

$$\zeta_{de^p} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d\epsilon_2^p - d\epsilon_3^p)$$

ただし、 π_{de^p} 面では次の関係がある。

$$d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p + d\epsilon_3^p = 0 \quad (20)$$

相当塑性ひずみ増分は主塑性偏差ひずみ増分で示すと、

$$de^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{de_1^{p2} + de_2^{p2} + de_3^{p2}} \quad (21)$$

よって、図-2(b)においては次式の関係がある。

$$\sqrt{de_1^{p2} + de_2^{p2} + de_3^{p2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} de^p \quad (22)$$

一方、図-2(b)から次式が成り立つ。

$$\eta_{de^p} = \sqrt{\frac{3}{2}} de^p \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha) \quad (23)$$

$$\zeta_{de^p} = \sqrt{\frac{3}{2}} de^p \sin(\theta_{d\sigma} + \alpha)$$

ただし、この場合 $b_{d\sigma}$ 値が0と1では特異点となり $\alpha = 0^\circ$ となる。また、式(20)を用いると式(19)は次式のようなになる。

$$\eta_{de^p} = \sqrt{\frac{3}{2}} de_1^p \quad (24)$$

$$\zeta_{de^p} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (de_1^p + 2de_3^p)$$

ゆえに、式(23)、式(24)と式(20)から、

$$de_1^p = \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha) de^p \quad (25)$$

$$de_2^p = \frac{1}{2} \{ \sqrt{3} \sin(\theta_{d\sigma} + \alpha) - \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha) \} de^p$$

$$de_3^p = -\frac{1}{2} \{ \sqrt{3} \sin(\theta_{d\sigma} + \alpha) + \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha) \} de^p$$

ここで、式(25)の de^p に着目して、Drucker-Prager型の塑性ポテンシャルの場合と同様に、 $de^p = \lambda$ と仮定し塑性ポテンシャルの偏導関数を求めると次のようになる。

$$\frac{\partial g}{\partial s_1} = \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha)$$

$$\frac{\partial g}{\partial s_2} = \frac{1}{2} \{ \sqrt{3} \sin(\theta_{d\sigma} + \alpha) - \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha) \} \quad (26)$$

$$\frac{\partial g}{\partial s_3} = -\frac{1}{2} \{ \sqrt{3} \sin(\theta_{d\sigma} + \alpha) + \cos(\theta_{d\sigma} + \alpha) \}$$

次に、主応力表示でなく一般座標系の表示に変換する必要がある。図-3に示してあるモール円から次式が得られる。

$$d\epsilon_x^p = \frac{d\epsilon_1^p + d\epsilon_3^p}{2} - \frac{d\epsilon_1^p - d\epsilon_3^p}{2} \cos 2\beta_{de^p}$$

$$d\epsilon_y^p = \frac{d\epsilon_1^p + d\epsilon_3^p}{2} + \frac{d\epsilon_1^p - d\epsilon_3^p}{2} \cos 2\beta_{de^p} \quad (27)$$

$$\frac{d\gamma_{xy}^p}{2} = \frac{d\epsilon_1^p - d\epsilon_3^p}{2} \sin 2\beta_{de^p}$$

ここで、 β_{de^p} は鉛直軸と最大主塑性ひずみ増分方向となす角度であり、応力増分方向、負荷曲面上の応力点の法線方向、それに修正応力比によって線形関係で表される¹¹⁾。

$$\beta_{de^p} = (\beta_f - \beta_{d\sigma}) \frac{(q^*/p) - (q^*/p)_0}{(q^*/p) - (q^*/p)_f} + \beta_{d\sigma} \quad (28)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\tan 2\beta_{d\sigma} &= \frac{2d\tau_{xy}}{d\sigma_y - d\sigma_x} \\ \tan 2\beta_f &= \frac{\sqrt{b^2 + b - 1} \frac{2\tau_{xy}}{p} - c_1 \bar{\alpha}_y}{\sqrt{b^2 + b - 1} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{p} - \bar{\alpha}_x} \\ \tan 2\beta_{de^p} &= \frac{d\gamma_{xy}^p}{d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_x^p}\end{aligned}\quad (29)$$

$\beta_{d\sigma}$ は鉛直軸と最大主応力増分方向とのなす角度である。また、負荷曲面上の法線方向を意味する β'_f と β_f との間には次式の関係がある。

$$\tan 2\beta_f = \frac{1}{c_1} \tan 2\beta'_f \quad (30)$$

次に、式(27)はとりもなおさず、次式で表され、

$$\begin{aligned}de_x^p &= \frac{de_1^p + de_3^p}{2} - \frac{de_1^p - de_3^p}{2} \cos 2\beta_{de^p} \\ de_y^p &= \frac{de_1^p + de_3^p}{2} + \frac{de_1^p - de_3^p}{2} \cos 2\beta_{de^p} \\ de_z^p &= -\left(\frac{de_1^p + de_3^p}{2}\right) \\ \frac{d\gamma_{xy}^p}{2} &= \frac{de_1^p - de_3^p}{2} \sin 2\beta_{de^p}\end{aligned}\quad (31)$$

よって、

$$\begin{aligned}de_x^p &= \lambda \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} - \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) \cos 2\beta_{de^p} \right\} \\ de_y^p &= \lambda \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} - \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) \cos 2\beta_{de^p} \right\} \\ de_z^p &= \lambda \left\{ - \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) \right\} \\ d\gamma_{xy}^p &= \lambda \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} - \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) \sin 2\beta_{de^p} \right\}\end{aligned}\quad (32)$$

再度、置き換えて式(10)に示される一般座標系での塑性ポテンシャルの偏差応力に関する偏導関数は次のように求まる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s_x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} - \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) \cos 2\beta_{de^p} \\ \frac{\partial g}{\partial s_y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} - \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) \cos 2\beta_{de^p} \\ \frac{\partial g}{\partial s_z} &= - \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} + \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) \\ \frac{\partial g}{\partial \tau_{xy}} &= \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} - \frac{\partial g}{\partial s_3} \right) \sin 2\beta_{de^p}\end{aligned}\quad (33)$$

次に、ダイレイタンシー関係については、 b 値、 β の値や非共軸性に関わらず次式で得られることを既に示してある¹⁰⁾。

$$d\varepsilon_y^p = \mu de^p - \frac{s_{ij} de_{ij}^p}{p} \quad (34)$$

ここで、 μ は変相応力比。

ゆえに、塑性ポテンシャルの平均応力に関する偏導関数は次式で得られる。

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \mu - \frac{s_{ij} de_{ij}^p}{p de^p} \quad (35)$$

最終的に式(9)に式(33)と式(35)を代入して次式が得ら

れる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \sigma_x} &= \frac{\partial g}{\partial s_x} + \frac{1}{3} \left(\mu - \frac{s_{ij} de_{ij}^p}{p de^p} \right) \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma_y} &= \frac{\partial g}{\partial s_y} + \frac{1}{3} \left(\mu - \frac{s_{ij} de_{ij}^p}{p de^p} \right) \\ \frac{\partial g}{\partial \sigma_z} &= \frac{\partial g}{\partial s_z} + \frac{1}{3} \left(\mu - \frac{s_{ij} de_{ij}^p}{p de^p} \right) \\ \frac{\partial g}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{\partial g}{\partial s_{xy}}\end{aligned}\quad (36)$$

なお、式(36)の応力、応力増分、ひずみ増分はすべて前ステップの値が用いられる。

(3) 硬化則

初期横等方性を有する砂の単調載荷時の応力・ひずみ関係は、修正応力比と破壊強度比の積 $(q^*/p)X_b$ と累積相当塑性ひずみ e^p によって、 b 値の影響も含めてユニークに表される¹¹⁾。

$$e^p = \frac{a^* b^* \left\{ (q^*/p) - (q^*/p)_0 \right\}^2 X_b^2}{1 - b^* \left\{ (q^*/p) - (q^*/p)_0 \right\} X_b} \quad (37)$$

ここで、

e^p : 累積相当塑性ひずみ
 $(q^*/p)_0$: 弾性限界修正応力比
 a^* : 材料定数

また、 b^* は次式で得られる。

$$b^* = \frac{1}{\left\{ (q^*/p)_f - (q^*/p)_0 \right\} X_b} \quad (38)$$

この応力比・ひずみ関係の勾配 h^p は、式(37)を $(q^*/p)X_b$ で微分してその逆数によって得られる。

$$h^p = \frac{\left[1 - b^* \left\{ (q^*/p) - (q^*/p)_0 \right\} X_b \right]^2}{a^* b^* \left\{ (q^*/p) - (q^*/p)_0 \right\} X_b \left[2 - b^* \left\{ (q^*/p) - (q^*/p)_0 \right\} X_b \right]} \quad (39)$$

また、繰返し載荷による硬化、すなわち、繰返し載荷時において応力比・ひずみ関係の勾配が大きくなる¹⁴⁾ことから、繰返し載荷時の応力比・ひずみ関係の勾配 h_{cyc}^p と単調載荷時の勾配 h^p との間に次の関係¹⁵⁾を考慮する必要がある。

$$\begin{aligned}\frac{h_{cyc}^p}{h^p} &= \frac{1}{1 - 1.6 \frac{W^p}{p}} \quad \left(\frac{W^p}{p} \leq 0.5 \right) \\ \frac{h_{cyc}^p}{h^p} &= 5 + 40 \left(\frac{W^p}{p} - 0.5 \right) \quad \left(\frac{W^p}{p} \leq 0.5 \right)\end{aligned}\quad (40)$$

ここで、 W^p は塑性仕事である。

多曲面モデルにおいて応力・ひずみ関係を一義的に得るために、各負荷曲面が互いに交差しないように次の3つの仮定を用いている^{15),16)}。

- 1) すべての負荷曲面は相似形である。
- 2) 負荷の場合、負荷曲面 $f^{(m)}$ と $f^{(m+1)}$ の接触が、同じ外向き法線方向を持つ点で起こるように移動する。
- 3) $f^{(m)}$ の移動とともに、その内側の一連の $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$ 、

$f^{(m-1)}$ も $f^{(m+1)}$ に向って一緒に移動する。

これらの幾何学的条件と適応条件から、負荷曲面の移動量は次のように表される。

$$d\xi_{ij}^{(m)} = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{kl}) d\sigma_{kl}}{(\partial f / \partial \sigma_{rs}) \mu_{rs}} \mu_{ij} \quad (41)$$

$$\mu_{ij} = \frac{k^{(m+1)}}{k^{(m)}} (\sigma_{ij} - \xi_{ij}^{(m)}) - (\sigma_{ij} - \xi_{ij}^{(m+1)})$$

ここで、 ξ_{ij} は一般座標系で表した場合の各負荷曲面の中心位置である。なお、ここで用いる多曲面モデルは、負荷曲面の大きさは変わらないものとする

提案する多曲面モデルは、図-1のように表示されることから、負荷曲面の偏微分形は次式で得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = 2 \left(\frac{1}{X_b} \frac{q}{p} \cos 2\beta - \bar{\alpha}_x^* \right) \quad (42)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = 2 \left(c_1 \frac{1}{X_b} \frac{q}{p} \sin 2\beta - \bar{\alpha}_y^* \right)$$

ここで、 $\bar{\sigma}_x = (1/X_b)(q/p) \cos 2\beta$, $\bar{\sigma}_y = c_1(1/X_b)(q/p) \sin 2\beta$ である。よって、式(41)から負荷曲面 $f^{(m)}$ の移動量は次のようになる。

$$\left\{ \frac{d\bar{\alpha}_x^{*(m)}}{d\bar{\alpha}_y^{*(m)}} \right\} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\bar{\sigma}_x + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\bar{\sigma}_y}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \bar{\mu}_x + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \bar{\mu}_y} \left\{ \frac{\bar{\mu}_x}{\bar{\mu}_y} \right\} \quad (43)$$

$$\left\{ \frac{\bar{\mu}_x}{\bar{\mu}_y} \right\} = \left(\frac{q^*}{p} \right)^{(m+1)} \left\{ \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\alpha}_x^{*(m)}}{\bar{\sigma}_y - \bar{\alpha}_y^{*(m)}} \right\} - \left\{ \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\alpha}_x^{*(m+1)}}{\bar{\sigma}_y - \bar{\alpha}_y^{*(m+1)}} \right\}$$

また、内側の負荷曲面 $f^{(1)}, \dots, f^{(m-1)}$ の中心位置は、新たに得られた応力量 $\bar{\alpha}_x^{*(m)}$, $\bar{\alpha}_y^{*(m)}$ を用いて次の関係から求まる。

$$\frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\alpha}_x^{*(m)}}{\left(\frac{q^*}{p} \right)^{(m)}} = \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\alpha}_x^{*(m-1)}}{\left(\frac{q^*}{p} \right)^{(m-1)}} = \dots = \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\alpha}_x^{*(1)}}{\left(\frac{q^*}{p} \right)^{(1)}} \quad (44)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\alpha}_y^{*(m)}}{\left(\frac{q^*}{p} \right)^{(m)}} = \frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\alpha}_y^{*(m-1)}}{\left(\frac{q^*}{p} \right)^{(m-1)}} = \dots = \frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\alpha}_y^{*(1)}}{\left(\frac{q^*}{p} \right)^{(1)}}$$

次に、式(7)の流れ則を塑性係数 H を用いて次式で表せるとして、応力比・ひずみ関係の勾配 h^p と各負荷曲面の塑性係数 H との関係を求める。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (45)$$

$$= \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\bar{\sigma}_x + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\bar{\sigma}_y \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

b 値が0.5 ($X_b = 1.0$)で $\beta = 0^\circ$ の場合には、式(7)と式(45)から、

$$\lambda = \frac{1}{H} 2 \left(\frac{q}{p} - \bar{\alpha}_x^* \right) d\bar{\sigma}_x \quad (46)$$

$$= \frac{1}{H} 2 \left(\frac{q}{p} - \bar{\alpha}_x^* \right) d \left(\frac{q}{p} \right)$$

一方、応力比・ひずみ関係の勾配 h^p は次式のように表され、

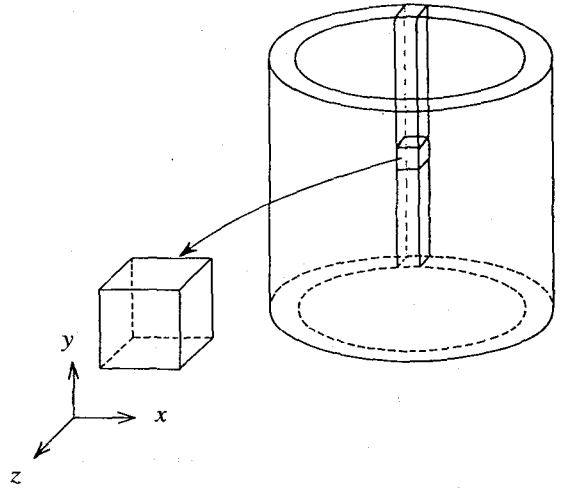


図-4 中空ねじり試験の1要素解析モデル

$$de^p = \frac{1}{h^p} d \left(\frac{q}{p} \right) \quad (47)$$

$\lambda = de^p$ であることから式(46)と式(47)を用いることによって、 H は次式で得られることになる。

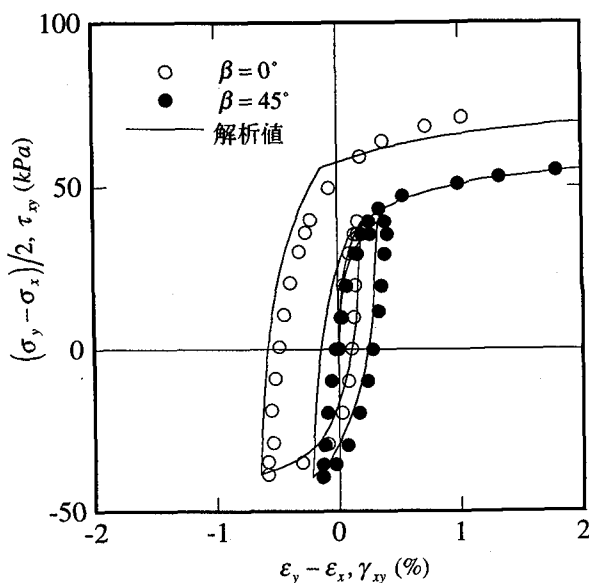
$$H = 2 \left(\frac{q}{p} - \bar{\alpha}_x^* \right) h^p \quad (48)$$

3. 適用例

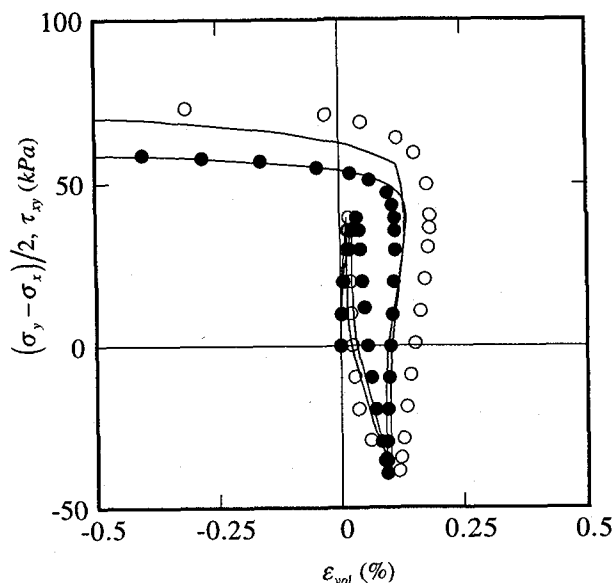
提案する構成則の有限要素法における基本的な適用性を確認するために、平均応力 $p = 98 \text{ kPa}$, b 値が0.5一定の条件で、排水中空ねじり試験における初期載荷方向が $\beta = 0^\circ$ と $\beta = 45^\circ$ の1回繰返し試験の場合について計算値と実験値の比較を示す。ここで、 $\beta = 0^\circ$ の場合、平均応力および b 値一定の条件を満足させるように、垂直応力3成分を増減させて相当応力 q を載荷するのに対して、 $\beta = 45^\circ$ の場合は、垂直応力3成分を一定のまません断応力 τ_{xy} , すなわち q を載荷させる試験である。なお、実験には豊浦砂 $D_r = 72\%$ を用い、多重ふるい落下法によって強い初期横等方性を持つ供試体を作成している。

解析は8節点6面体要素を用いて開発したプログラムで行い、非線形解析手法は接線剛性による増分法を用いた。解析モデルとしては、図-4に示すような1要素の要素試験の応力状態を考えている。境界条件は、堆積面に対して軸差圧縮成分が卓越する $\beta = 0^\circ$ の場合、鉛直に4分割した3次元1要素を考え、底面で鉛直方向固定とし、分割した面での対称条件を満足させるために要素の2つの側面では面に垂直な方向を固定する。一方、単純せん断成分が卓越する $\beta = 45^\circ$ の場合は、水平載荷方向に沿って鉛直に2分割し、対称となる側面の垂直方向を固定、底面では鉛直方向を固定ならびに載荷方向の水平方向の一端を固定する。解析に用いる入力パラメータは、実験結果から次のように求めている。なお、ヤング率 E は $p = 98 \text{ kPa}$ での値を用い、弾性ポアソン比 ν は文献¹⁷⁾から引用した。

$$E = 160 \text{ MPa}, \nu = 0.2, c_1 = 1.0, (q^*/p)_f = 1.11,$$

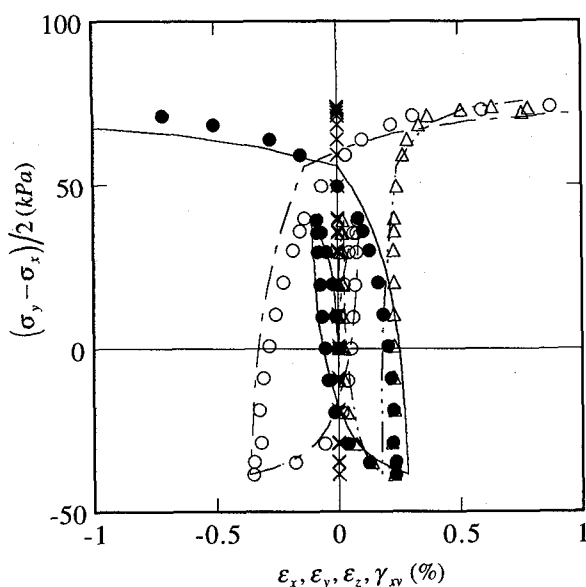


(a) せん断ひずみ

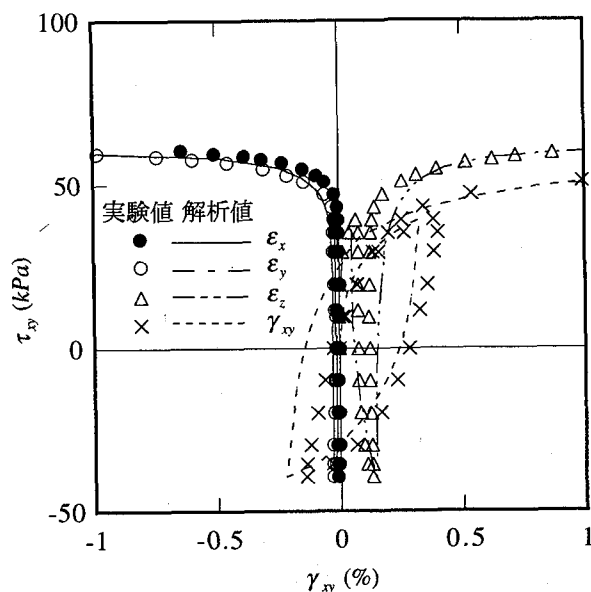


(b) 体積ひずみ

図-5 初期横等方性材料の応力・ひずみ関係



(a) $\beta = 0^\circ$



(b) $\beta = 45^\circ$

図-6 一回繰返し載荷試験

$$\left(\frac{q^*}{p}\right)_0 = 0.15, \alpha_f^* = 0.25, \mu = 0.7, \alpha = 16.1^\circ, \\ a^* = 0.002$$

図-5に $\beta = 0^\circ$ と $\beta = 45^\circ$ のせん断ひずみ，体積ひずみを示す。ここで，縦軸は $\beta = 0^\circ$ と $\beta = 45^\circ$ の場合の相当応力に係数 $1/\sqrt{3}$ を掛けた $(\sigma_y - \sigma_x)/2$ と τ_{xy} を用いる。この場合，これらの絶対値の2倍が最大主応力差になる。せん断ひずみの横軸は，最大主ひずみ差に相当する $\varepsilon_y - \varepsilon_x$ と γ_{xy} を用いている。図-6には同様に各ひずみ成分について示してある。Gutierrez et al.⁸⁾では，中間主応力方向のひずみについては得られないモデルであるが，本解析

結果では，せん断ひずみ，体積ひずみのみならず，中間主応力方向のひずみも含め各ひずみ成分について実験結果と良い一致を示しており， β の値によって挙動特性が異なる現象，すなわち初期横等方性による影響を良く表している。

4. 結論

初期横等方性を有する砂の実験結果の考察から得られたせん断挙動特性を用いて，有限要素法に適用可能な構成則の定式化を示し，簡単な3次元有限要素解析の例題

によって、提案する構成則の基本的な検証を行った。その結果を要約すると次のようである。

- (1) 最大主応力軸が鉛直軸となす角度 β と相当応力 q による極座標に、楕円形状パラメータ c_1 と b 値の影響を表す破壊強度比 X_b を考慮し、更に、平均応力 p で正規化した偏差応力面を用いることによって、 β の値による挙動特性の違い、すなわち、初期横等方性による影響を表すことができる。
- (2) 提案する正規化偏差応力面は、より汎用的な偏差応力面であり、 $b=0.5$ 、 $c_1=1.0$ という限られた条件下においては、従来の偏差応力面と等価となる。
- (3) 実験結果の考察によって得られた主偏差応力増分比と主偏差ひずみ増分比の関係、最大主塑性ひずみ増分方向と最大主応力増分方向の関係およびダイレイタンスー係数を用いることによって、応力増分方向に依存した塑性ポテンシャルの応力に関する偏導関数が得られる。
- (4) 正規化偏差応力面上における多曲面モデルの負荷関数、および、その塑性ポテンシャルの偏導関数を用いることによって、 β の値、 b 値それに非共軸性の影響を考慮した弾塑性マトリックスが誘導される。
- (5) 排水中空ねじり試験を要素試験とみなした 1 要素の 3 次元有限要素解析を行い、従来の偏差応力面を用いたモデルでは表せなかった中間主応力方向のひずみも含めて、解析結果は実験結果と良い一致を示し、提案する構成則の妥当性が確認できた。

初期横等方性を有する砂のより汎用的な構成則の骨組みについて述べたが、今後は、更に実験に基づいた詳細な検討によって、より精巧な構成則への発展が必要である。

謝辞

本研究を行うにあたり、東北学院大・飛田教授および Norwegian Geotechnical Institute の Dr. Gutierrez には貴重な助言をいただきました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 小田匡寛, 風間秀彦: 2. 土と岩盤の構造異方性, 講座「地盤の異方性」, 土と基礎, Vol.41, No.4, pp.73-80, 1993.
- 2) 松岡元, 平尾淳一, 福武毅芳: 異方性を考慮した砂の変形・強度論, 土と基礎, Vol.32, No.11, pp.31-36, 1984.
- 3) Tatsuoka, F.: Stress-strain behaviour of an idealized anisotropic granular material, *Soils and Foundations*, Vol.20, No.3, pp.75-90, 1980.
- 4) Yamada, Y. and Ishihara, K.: Modelling of drained deformation of sand under three-dimensional stress conditions, *Proc. IUTAM Conf. on Deformation and Failure of Granular materials*, pp.331-342, 1982.

- 5) 瀧治雄, 中井照夫, 松岡元: 構造異方性を考慮した砂の弾・塑性構成モデル, 土木学会第 44 回年次学術講演会, III-218, pp.510-511, 1989.
- 6) Ghaboussi, J. and Momen, H.: Plasticity model for inherently anisotropic behaviour of sands, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, Vol.8, pp.1-17, 1984.
- 7) Miura, K., Toki, S. and Miura, S.: Deformation prediction for anisotropic sand during the rotation of principal stress axes, *Soils and Foundations*, Vol.26, No.3, pp.42-56, 1986.
- 8) Gutierrez, M., Ishihara, K. and Towhata, I.: Model for the deformation of sand during rotation of principal stress directions, *Soils and Foundations*, Vol.33, No.3, pp.105-107, 1993.
- 9) Mroz, Z.: On the description of anisotropic hardening, *J. Mech. Phys. Solid*, Vol.15, pp.163-173, 1967.
- 10) 鈴木輝一, 菅野高弘, 柳澤栄司: 初期構造異方性を有する砂の排水時せん断挙動特性, 土木学会論文集, No.481/III-25, pp.117-124, 1993.
- 11) 鈴木輝一, 菅野高弘, 柳澤栄司: 初期構造異方性を有する砂の排水時繰返しせん断挙動特性, 土木学会論文集, No.511/III-30, pp.89-98, 1995.
- 12) Zienkiewicz, O.C.: The finite element method, McGraw-Hill, pp.450-499, 1977.
- 13) 朴春植, 神明進, 龍岡文夫, 澁谷啓: 平面ひずみ圧縮試験による Silver Leighton Buzzard sand の変形・強度特性の異方性, 第 25 回土質工学研究発表会, pp.439-442, 1990.
- 14) 東畑郁生, 芳賀馨, 中村伸也: 繰返し排水せん断が砂の剛性に及ぼす影響, 第 20 回土質工学研究発表会, pp.591-594, 1985.
- 15) Prevost, J.H.: Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, No.1, pp.196-216, 1977.
- 16) Prevost, J.H.: Mathematical modeling of soil stress-strain-strength behavior, *Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Methods Geomech.*, Aachen, pp.347-361, 1979.
- 17) 見郷浩二, Teachavorasinskun, Supot, 龍岡文夫, 安原一哉: 砂の変形特性・液状化強度に与える繰返し載荷履歴の影響, 第 27 回土質工学研究発表会, pp.475-478, 1992.

(1997 年 9 月 26 日受付)