

四角形要素における正規化気泡関数を用いた 非圧縮 Navier-Stokes 方程式の分離型有限要素法

A FRACTIONAL STEP FINITE ELEMENT METHOD FOR INCOMPRESSIBLE
NAVIER-STOKES EQUATIONS USING QUADRILATERAL SCALED BUBBLE FUNCTION

丸岡 晃*・松本 純一**・川原 睦人***

Akira MARUOKA, Junichi MATSUMOTO and Mutsuto KAWAHARA

*工修 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

**中央大学理工学部土木工学科 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

***工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a new finite element formulation for the incompressible Navier-Stokes equations. Present procedure has the advantage of stability and computational efficiency. The velocity and pressure fields are interpolated by the bubble element and quadrilateral bilinear element, respectively. The fractional step method based on the implicit time integration is used for the discretization. The bubble element can be obtained by adding the scaled bubble function to the quadrilateral bilinear element, of which the shape can be changed to attain optimal numerical viscosity. The standing vortex problem and the cavity flow are performed for the numerical examples.

Key Words : incompressible Navier-Stokes equations, finite element method, scaled bubble function, fractional step method

1. はじめに

物体まわりの流れなどの流れ現象や空力特性を有限要素法による非圧縮 Navier-Stokes 方程式の直接シミュレーションにより把握するには、三次元的な渦構造を把握するための三次元解析、微小レベルの渦構造を解像できるだけの微細な有限要素分割、空気力の時刻歴や周期特性などを把握するための長い時間の計算などが必要とされる。このような問題を解析するには、安定で高効率な解析手法を用いることが有効である。

非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する離散化手法である分離型(Fractional Step)法¹⁾は、圧力 Poisson 方程式を導くことによって流速場と圧力場を分離して解くことができるため大規模な問題を解析するのに極めて有効である。また、流速場と圧力場の補間関数にそれぞれ一次や双一次の同次のものを用いる同次補間を行うことも可能である。筆者らは、陰的解法に基づく分離型法を用いた場合の運動方程式の離散化手法に BTD(Balancing Tensor Diffusivity)法²⁾³⁾を陰的かつ高効率に改良した IBTD(Improved BTD)法を開発し、検討を行ってきた⁴⁾。IBTD 法は、陰的解法であるため安定性に優れ、対称行列の解法となるため計算効率に優れている。また、IBTD 法を分離型法に適用した手法⁴⁾は、安定化有限要素法の一つである SUPG(Streamline Upwind / Petrov Galerkin)法⁵⁾と PSPG(Pressure Stabilizing / Petrov Galerkin)法⁷⁾を組み合わせた手法⁷⁾の安定化パラメータの定義をかえることによって導くことが可能

であり、安定化有限要素法に等価となる⁴⁾。しかしながら、IBTD 法を分離型法に適用した手法は、特に極端に小さい時間増分 Δt を用いた場合に解が不安定になる傾向があり、要素分割に即した Δt の選択を行う必要がある⁴⁾。これには、安定化パラメータが Δt に依存するため、安定化有限要素法と比べ Δt が小さい場合に数値安定性が不足していることが挙げられる。

一方、三角形要素において要素境界で 0 となり要素内のみで値を持つ気泡関数 (bubble function) を一次要素に加えた気泡関数要素が、通常の Galerkin 法を用いた場合にある種の問題に安定化有限要素法と等価となる性質^{8)~11)}が注目されている。山田¹²⁾は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対して流速場に気泡関数要素を用い、圧力場に一次要素を用いた MINI 要素¹³⁾による混合型有限要素法の解析手法を提案した。ここでの気泡関数は、形状を変化させることにより適切な安定化の効果を導入する非適合モード¹⁴⁾を有する正規化気泡関数¹⁵⁾を用いている。ここで、計算効率の面から考えてみると、気泡関数は静的縮約という操作によりその自由度は消去することができるが、非定常解析においては、その操作が複雑になることから、気泡関数の自由度は残したまま定式化を行うものとする、この場合には気泡関数要素を用いた場合の代数方程式の未知数は、流速一変数あたり節点量と要素量の和となり一次要素に比べ増加する。二次元の一次要素である三角形要素は、要素量が節点量の約 2 倍となることから、節点量の約 3 倍に未知数が増える。三次元に拡張した

とき未知数の増加は特に顕著であり、一次要素である四面体要素は、要素量が節点量の約5~6倍となることから、節点量の約6~7倍に未知数が増える。よって、計算効率の面で気泡関数要素を用いた手法は、一次や双一次の同次補間による手法に比べ大規模な三次元解析などに適さないと考えられる。

本研究では、大規模な問題を安定で効率よく解析する非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法による解析手法を提案し、検討を行う。離散化手法に安定性と計算効率の面を考慮にいれ、陰的解法に基づく分離型法を適用した。一次または双一次の同次補間を用いた IBTD 法を分離型法に適用した手法の Δt に依存した数値安定性を解消するために、四角形双一次要素における正規化気泡関数を用いた混合型有限要素法を適用した。ここで、注意すべきこととして四角形双一次要素における気泡関数の安定化作用は、現在のところ明らかになっていない。しかしながら、三角形一次要素における気泡関数の安定化作用の理論的な証明について考えてみると、気泡関数において以下の2つの条件を満たしていることが重要であると考えられる。(1) 気泡関数が要素毎に定義されていること、(2) 要素境界で0となり要素内のみで値を持つことである。(1)の条件により気泡関数についての自由度は、いわゆる静的縮約の操作によって、要素毎に消去することが可能になり、(2)の条件により要素境界上での積分については0となることから、安定化作用の理論的な証明は展開されている。このことから、本研究では、この2つの条件を満たす気泡関数要素を四角形双一次要素に適用して、気泡関数の安定化作用を期待するものである。二次元の四角形双一次要素は、要素量が節点量とほぼ等しくなり、未知数の増加が、三角形要素と比べ少なく見積もることができる。また、三次元の六面体要素への拡張が容易であり、未知数の増加が次元によらない利点がある。数値解析例として、Benchmark 問題である Standing Vortex Problem と Cavity 内の流れの問題を取り上げ、ここで提案する手法の適用性、有用性についての検討、考察を行う。

2. 非圧縮 Navier-Stokes 方程式

非圧縮性粘性流れの基礎方程式である非圧縮 Navier-Stokes 方程式は、無次元化することによって、以下の運動方程式と連続式によって表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 Ω は、境界 Γ で囲まれた解析領域、 $\mathbf{u}$, p は、流速、圧力、 $\mathbf{f}$ は、外力項、また、 $\nu = 1/Re$ であり、 Re は、レイノルズ数である。

境界 Γ は、 Γ_1 と Γ_2 に分けられ、以下の境界条件が規

定される。

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\{-p\mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}\} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は、単位テンソル、 $\mathbf{n}$ は、境界 Γ の外向き法線ベクトルである。

3. 時間方向の離散化

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用する。運動方程式(1)に Crank-Nicolson 法を適用し、連続式(2)は完全陰的に表す。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+1} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

ここで、

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1}), \quad \mathbf{u}^* = \frac{1}{2}(3\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})$$

である。移流速の線形近似としている $\mathbf{u}^*$ は、2次精度 Adams-Bashforth 公式により得られている。このようにして得られたスキームは、時間に関して2次精度を有する線形スキームとなっている。

4. 分離型法と空間方向の離散化

運動方程式(5)と連続式(6)に対して、圧力 Poisson 方程式を導くことによって流速場と圧力場を分離して解くことのできる分離型法を適用する。MAC 法や Hayashi らの C 法¹⁾に準じ、運動方程式(5)から直接的に圧力 Poisson 方程式を導く方法と、SMAC 法、SIMPLE 法、また、Hayashi らの A 法¹⁾に準じ、連続式(6)を完全に満足しない中間流速を導入してから圧力 Poisson 方程式を導く方法の2つのアルゴリズムを導出する。ここでは、それぞれのアルゴリズムを FS1 法と FS2 法と呼ぶことにする。

空間方向の離散化には、流速場の補間関数に気泡関数を四角形双一次要素に加えた気泡関数要素を用い、圧力場の補間関数に四角形双一次要素を用いた混合型有限要素法の解析手法を適用する。気泡関数要素による混合補間を用いた場合の運動方程式の離散化に通常の Galerkin 法を用いる。ここでは、Galerkin 法による気泡関数要素を用いた手法を GQ1b 法とし、これを分離型法に適用した手法をそれぞれ GQ1b+FS1 法、GQ1b+FS2 法と呼ぶことにする。

4.1 GQ1b+FS1 法

運動方程式(5)の発散をとり、連続式(6)を代入することによって圧力 Poisson 方程式が得られる。

$$\Delta t \nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^n - \Delta t \nabla \cdot \{\mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}\} \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

FS1 法では、上式から圧力を求めるが、陰的解法の場合には右辺項に未知流速 $u^{n+\frac{1}{2}}$ が含まれることから、運動方程式 (5) と圧力 Poisson 方程式 (7) を連立して解く形になってしまう。そこで、本研究では、流速場と圧力場を完全に分離するために、未知流速 $u^{n+\frac{1}{2}}$ を移流速度として用いた u^* により近似する。

$$\Delta t \nabla^2 p^{n+1} = \nabla \cdot u^n - \Delta t \nabla \cdot \{u^* \cdot \nabla u^* - \nu \nabla^2 u^* - f\} \quad \text{in } \Omega \quad (8)$$

FS1 法のアルゴリズムは、式 (8) $\Rightarrow$ 式 (5) となる。定常状態に収束する問題では、式 (8) が次式に収束する。

$$\nabla \cdot u - \Delta t \nabla \cdot \{u \cdot \nabla u + \nabla p - \nu \nabla^2 u - f\} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (9)$$

上式の第 2 項に Δt がかかっているため、定常収束問題で連続条件が Δt に依存する。第 2 項に含まれる圧力場のラプラシアン作用素は、安定化の働きをする。この安定化の効果は、安定化有限要素法⁶⁾で得られるものと等価である⁴⁾。このため、FS1 法では、安定化作用の強さが Δt に依存するが流速場と圧力場の補間関数に同次補間を用いることができる。

流速場と圧力場の重み関数と試行関数に気泡関数要素と四角形双一次要素を用いた補間による近似関数をそれぞれ w_h, q_h, u_h, p_h とすると式 (8), (5) の Galerkin 法による重み付き残差方程式は、それぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta t \nabla q_h \cdot \nabla p_h^{n+1} d\Omega &= - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h^n d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \Delta t \nabla q_h \cdot \{u_h^* \cdot \nabla u_h^* - \nu \nabla^2 u_h^* - f_h\} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} q_h \{\tilde{u}_h^{n+1} - \hat{u}_h^n\} \cdot n d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + u_h^* \cdot \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}} \right\} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \nabla w_h : \{-p_h^{n+1} I + \nu \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}}\} d\Omega \\ = \int_{\Omega} w_h \cdot f_h d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \hat{t}_h d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

4.2 GQ1b+FS2 法

FS2 法では、連続式 (6) を完全に満足しない中間流速 $\tilde{u}$ を求めてから、圧力 Poisson 方程式を導出する。前時間ステップの圧力 p^n を近似的な圧力として、運動方程式 (5) の圧力を p^n に置き換えると、運動方程式 (5) は、未知流速 u^{n+1} を中間流速 $\tilde{u}^{n+1}$ に置き換えた次式になる。

$$\frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u^* \cdot \nabla \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^n - \nu \nabla^2 \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} = f \quad \text{in } \Omega \quad (12)$$

式 (5) と式 (12) の差をとると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} u^* \cdot \nabla (u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}) \\ + \nabla (p^{n+1} - p^n) - \frac{1}{2} \nu \nabla^2 (u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}) = 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (13)$$

SMAC 法や Hayashi らの A 法¹⁾では、陽的解法に基づいているため上式の第 2 項と第 4 項は現れない。また、陰的解法の SIMPLE 法でも、第 2 項と第 4 項を小さいとして省略している。しかしながら、本手法では、空間方向の離散化を行ったときに、式 (12) と式 (13) の代数方程式の行列の形を適合させるため、第 2 項と第 4 項を省略しないものとする。

式 (13) の発散をとり、式 (6) を代入することによって圧力 Poisson 方程式が得られる。ただし、流速 u^{n+1} は未知なので、 $u^{n+1} \simeq \tilde{u}^{n+1}$ と近似し、ここでは、式 (13) の第 2 項と第 4 項を省略している。

$$\Delta t \nabla^2 (p^{n+1} - p^n) = \nabla \cdot \tilde{u}^{n+1} \quad \text{in } \Omega \quad (14)$$

FS2 法のアルゴリズムは、式 (12) $\Rightarrow$ 式 (14) $\Rightarrow$ 式 (13) となる。定常状態に収束する問題では、中間流速 $\tilde{u}$ が流速 u に収束し、 $p^{n+1} - p^n \rightarrow 0$ となる。よって、FS2 法では、定常収束問題で式 (14) が連続式 (2) に収束するため、連続条件が Δt に依存しない。空間方向の離散化のとき、同次補間を用いた場合に FS2 法では、安定化の働きをする項が存在しないため、解が不安定になりやすい。よって、混合補間を用いる必要がある。

式 (12), (14), (13) の Galerkin 法による重み付き残差方程式はそれぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{\tilde{u}_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + u_h^* \cdot \nabla \tilde{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \right\} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \nabla w_h : \{-p_h^n I + \nu \nabla \tilde{u}_h^{n+\frac{1}{2}}\} d\Omega \\ = \int_{\Omega} w_h \cdot f_h d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \hat{t}_h d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} \Delta t \nabla q_h \cdot \nabla (p_h^{n+1} - p_h^n) d\Omega = - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \tilde{u}_h^{n+1} d\Omega \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} u_h^* \cdot \nabla (u_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}) \right\} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \{-(p_h^{n+1} - p_h^n) I + \frac{1}{2} \nu \nabla (u_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1})\} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

5. 正規化気泡関数

本研究では、気泡関数に関数形状を形状パラメータ ξ で制御できる正規化気泡関数 ϕ_e^ξ を用いる。このとき、次式で定義される安定化パラメータ τ_e によって気泡関数の安定化作用の強さが表される¹¹⁾。

$$\tau_e = \frac{\left\{ \int_{\Omega_e} \phi_e^\xi d\Omega \right\}^2}{\nu \int_{\Omega_e} (\nabla \phi_e^\xi)^2 d\Omega A_e} \quad (18)$$

ここで、 A_e は要素面積であり、 ϕ_e^ξ は、要素毎に定義される。 τ_e は SUPG 法等の安定化有限要素法⁵⁾⁶⁾で現れる安定化パラメータに等価である¹¹⁾。

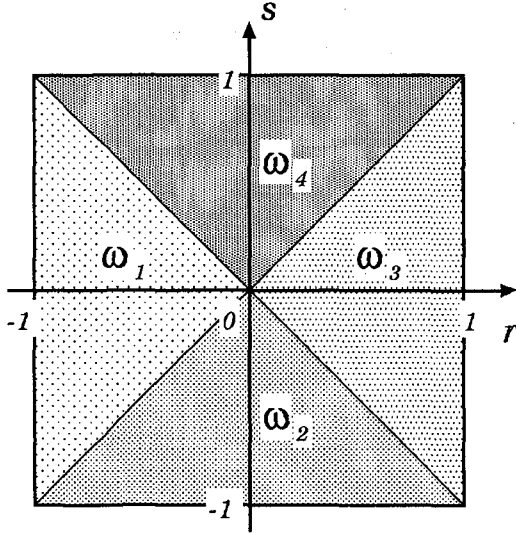


図-1 要素領域

本研究で用いる四角形要素に対する正規化気泡関数を以下に示す。図-1のようにアイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ を用いて表した要素領域を4つの領域 ω_i に分割する。各領域毎に $\{r, s\}$ を用いて次のように正規化気泡関数を定義する。

$$\phi_e^\xi = \begin{cases} \left(\frac{\xi+2}{\xi} \right) \{1 - (-r)^\xi\} & \text{in } \omega_1 \\ \left(\frac{\xi+2}{\xi} \right) \{1 - (-s)^\xi\} & \text{in } \omega_2 \\ \left(\frac{\xi+2}{\xi} \right) \{1 - (+r)^\xi\} & \text{in } \omega_3 \\ \left(\frac{\xi+2}{\xi} \right) \{1 - (+s)^\xi\} & \text{in } \omega_4 \end{cases} \quad (19)$$

ここで、 ξ は形状を変化させることにより適切な安定化の効果を導入するための正規化気泡関数の形状パラメータであり、式(19)によりこのパラメータの取り得る範囲は要素境界で0となる条件を満たすために非負の実数となる。この正規化気泡関数において、安定化パラメータ τ_e は、形状パラメータ ξ の関数として次のように表せる。

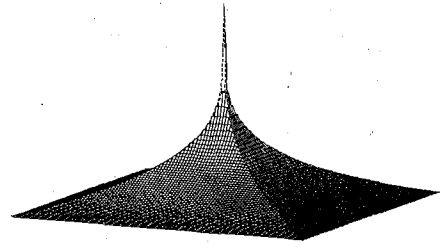
$$\tau_e = \frac{A_e^2}{8\nu g} \frac{\xi}{(\xi+2)^2} \quad (20)$$

本研究では、要素毎の積分の際に、アイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ によって表されたヤコビアンを中心のみ $\{0, 0\}$ で評価し、その他の積分を解析的に行う方法を用いている¹⁶⁾。この場合、 $g = |x_{,r}|^2 + |x_{,s}|^2$ である。

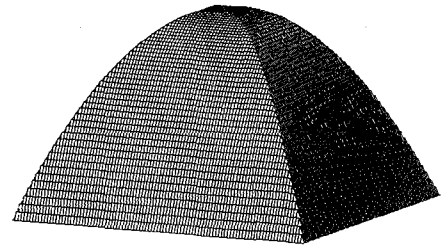
形状パラメータ ξ は、次の条件により決定する。

$$\alpha = \frac{|u_h| h_e}{2\nu}, \quad \beta = \alpha \frac{A_e^2}{2h_e^2 g}, \quad \xi = \begin{cases} 2, & \beta < 8 \\ \frac{1}{2} \{\beta - 4 - \sqrt{\beta(\beta - 8)}\}, & \beta \geq 8 \end{cases} \quad (21)$$

ここで、 α はセルレイノルズ数、 h_e は要素代表長さである。 β は正方形要素の場合に $\frac{A_e^2}{2h_e^2 g} = 1$ となりセルレイ



移流が卓越するケース ($\xi = 0.2$)



拡散が卓越するケース ($\xi = 2.0$)

図-2 正規化気泡関数要素

ノルズ数 α と一致する。形状パラメータ ξ は0から2までの値を取り、移流が卓越するとき $\xi \rightarrow 0$ となり、拡散が卓越するとき $\xi = 2$ となる。これらの状態の気泡関数の形状を図-2に示す。

図-3に正方形要素の場合のセルレイノルズ数 α による安定化パラメータ τ_e の変化を示す。ここで、点線は次式の定義による同次補間を用いた安定化有限要素法⁷⁾による安定化パラメータである。

$$\tau_e = \left\{ \left(\frac{2|u_h|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (22)$$

セルレイノルズ数 α が大きい場合に気泡関数を用いた式(20)による安定化パラメータ τ_e は、 $\tau_e = \frac{h_e}{2|u_h|}$ となり、安定化有限要素法による式(22)とほぼ同じ値をとれるが、セルレイノルズ数が小さい場合 ($\beta < 8$) に気泡関数による式(20)は、 $\tau_e = \frac{A_e^2}{64\nu g}$ 、正方形要素の場合には、 $\tau_e = \frac{h_e^2}{32\nu}$ となり、安定化有限要素法による式(22)は、 $\tau_e \rightarrow \frac{h_e^2}{4\nu}$ となることから、小さい値をとる。この場合の気泡関数の圧力場に対する安定化作用は、かならずしも十分ではない。

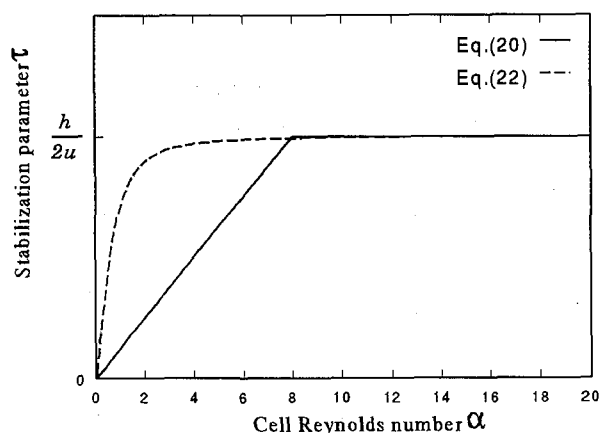


図-3 セルレイノルズ数 α による安定化パラメータ τ_e の変化

6. 数値解析例

6.1 Standing Vortex Problem

この問題の目的は、計算手法がどの程度の数値的な散逸誤差をもつかを調べる問題である²⁾⁷⁾。非粘性流れを仮定し、初期条件として人工的な渦を発生させ計算を進める。厳密解は初期条件そのものであるが、安定な計算ならかならず解は減衰する。初期の渦がどの程度の減衰をしたかを調べることによって数値的な散逸誤差を評価する。

解析領域(図-4)は、 1×1 であり、 20×20 の均等な有限要素分割を用いている。初期条件は領域の中心からの極座標 $\{r, \theta\}$ による次式によって表され、これを図-5に示す。

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \begin{cases} 5r & r < 0.2 \\ 2 - 5r & 0.2 < r < 0.4 \\ 0 & r > 0.4 \end{cases}$$

時間増分 Δt は、 $\Delta t = 0.005, 0.025, 0.05, 0.1$ と設定した。このときのピークのクーラン数 c は、それぞれ $c = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$ である。計算回数は $t = 3$ まで行っている。比較のために、同次補間を用いた手法としてIBTD法(付録I)にFS1法を適用した手法⁴⁾の計算も行っている。ここでは、この手法をIBTD+FS1法と呼ぶことにする。なお、連立一次方程式の解法は、行列の記憶にElement-by-Element法を用い、対称行列についてCG法、非対称行列についてBi-CGSTAB法を用いている。

各手法の $t = 3$ の運動エネルギーの相対変化と計算時間の比較を表-1に示し、図-6に $\Delta t = 0.05$ のときの運動エネルギーの時刻歴を示す。エネルギーの相対変化を比較すると、GQ1b+FS2法が最も小さく、また、解のクーラン数による依存がほとんどない。FS1法を用いたIBTD法とGQ1b法では、GQ1b法を用いた方がエネルギー減衰が小さい。FS1法は、FS2法よ

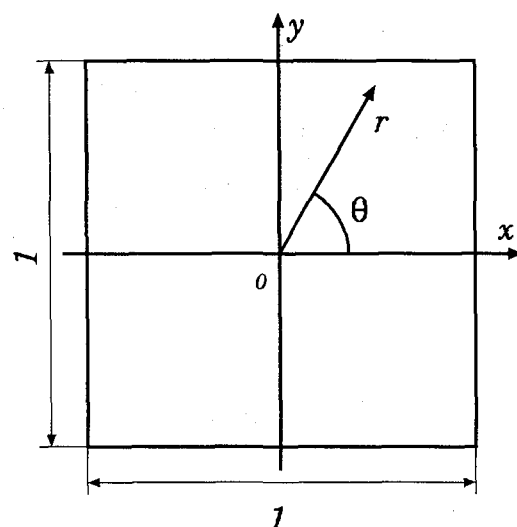


図-4 Standing Vortex Problem の解析領域

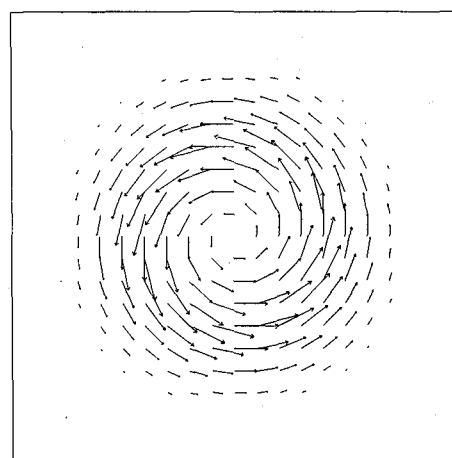


図-5 Standing Vortex Problem の初期条件

表-1 運動エネルギーの相対変化と計算時間の比較

時間増分 Δt	0.005	0.025	0.05	0.1
IBTD+FS1	0.987	0.950	0.915	0.867
CPU[s]	14.35	3.40	1.80	1.04
GQ1b+FS1	0.993	0.968	0.939	0.895
CPU[s]	22.09	6.02	3.72	2.53
GQ1b+FS2	0.999	0.999	0.999	0.998
CPU[s]	34.03	9.28	5.79	3.77

り解のクーラン数による依存が大きい。計算時間を比較すると、IBTD+FS1法が最も早く、GQ1b+FS1法、GQ1b+FS2法は、それぞれIBTD+FS1法の約2倍、約3倍の計算時間を要する。

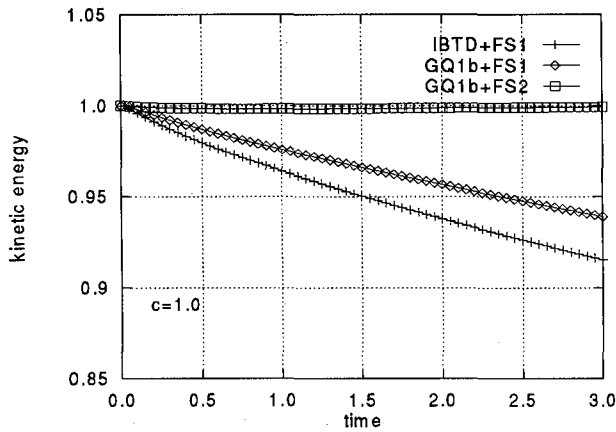


図-6 運動エネルギーの時刻歴 ($\Delta t = 0.05$)

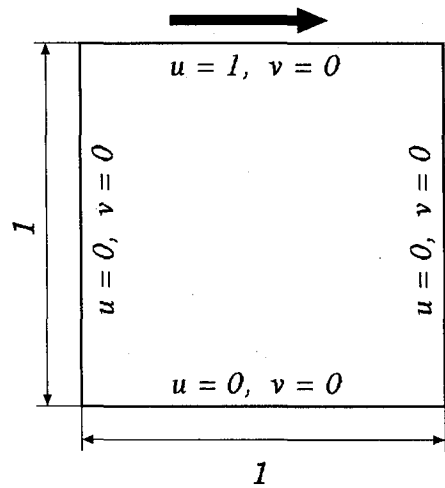
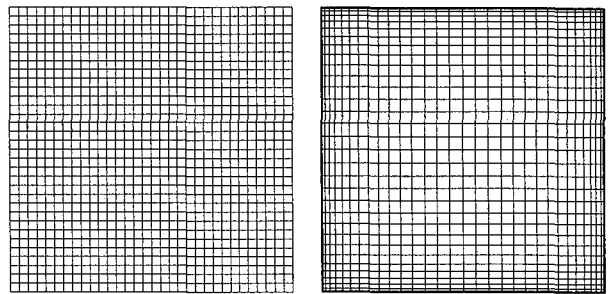


図-7 Cavity 内の解析領域と境界条件

6.2 Cavity 内の流れ

定常解を持つ問題の検証として Cavity 内の流れを取り上げる。ここでは、各手法の解の特徴を把握することを主な目的としているため、Reynolds 数は一定として解析を行った。解析領域と境界条件を図-7に示す。レイノルズ数を $Re = 400$ とし、図-8に示した 32×32 の均等分割を行ったメッシュ(1)、及び不均等分割を行ったメッシュ(2)を用いている。計算は定常状態に収束するまで行っている。時間増分は $\Delta t = 0.001, 0.01$ として計算を行っている。表-2に各手法の計算結果と Ghia ら¹⁷⁾の結果 (128×128 分割)の比較を示す。ここで、表中の $\psi_{\min}$, $\omega_{v.c.}$, $\{x, y\}$ は、それぞれ、渦中心の流れ関数の最小値とその節点での渦度と座標を示す。図-9、図-10に各手法の圧力コンター図を示す。コンターの間隔は、0.01 である。

本計算結果は、Ghia らの結果と異なっているが、これは要素分割に起因するものと思われる。図-9のメッシュ(1)を用いた場合の解析結果を見ると、IBTD+FS1 法と GQ1b+FS1 法では、解が Δt に依存しているが、GQ1b+FS2 法では、全く依存していない。IBTD+FS1 法は、特に Δt が小さいとき圧力が振動し、解の絶対値が大きくなる。この理由は、IBTD+FS1 法の運動方程式と連続式の安定化の項が Δt に依存するためである。GQ1b+FS1 法と GQ1b+FS2 法では、圧力の振動は見られない。GQ1b+FS1 法の解は、 Δt が小さいとき GQ1b+FS2 法に近づく傾向を示している。また、不均等分割における気泡関数の安定化作用の効果を見るために図-10のメッシュ(2)を用いた場合の解析結果を見ると、GQ1b+FS2 法の解は、均等分割を用いた場合とほぼ同様の計算結果となっていることから、不均等分割を行った場合においても四角形双一次要素における気泡関数の安定化作用の効果があることが確認できる。



メッシュ(1) (均等分割) メッシュ(2) (不均等分割)

図-8 Cavity 内の流れのメッシュ図

表-2 Cavity 内の流れの計算結果の比較

手法	Δt	$\psi_{\min}$	$\omega_{v.c.}$	Locaiton	
				x	y
IBTD+FS1	0.001	-0.092	1.915	0.563	0.625
メッシュ(1)	0.01	-0.091	1.902	0.563	0.625
GQ1b+FS1	0.001	-0.091	1.901	0.563	0.625
メッシュ(1)	0.01	-0.090	1.893	0.563	0.625
GQ1b+FS2	0.001	-0.091	1.896	0.563	0.625
メッシュ(1)	0.01	-0.091	1.896	0.563	0.625
GQ1b+FS2	0.001	-0.110	2.267	0.546	0.592
メッシュ(2)	0.01	-0.110	2.267	0.546	0.592
Ghia et al.		-0.114	2.295	0.555	0.606

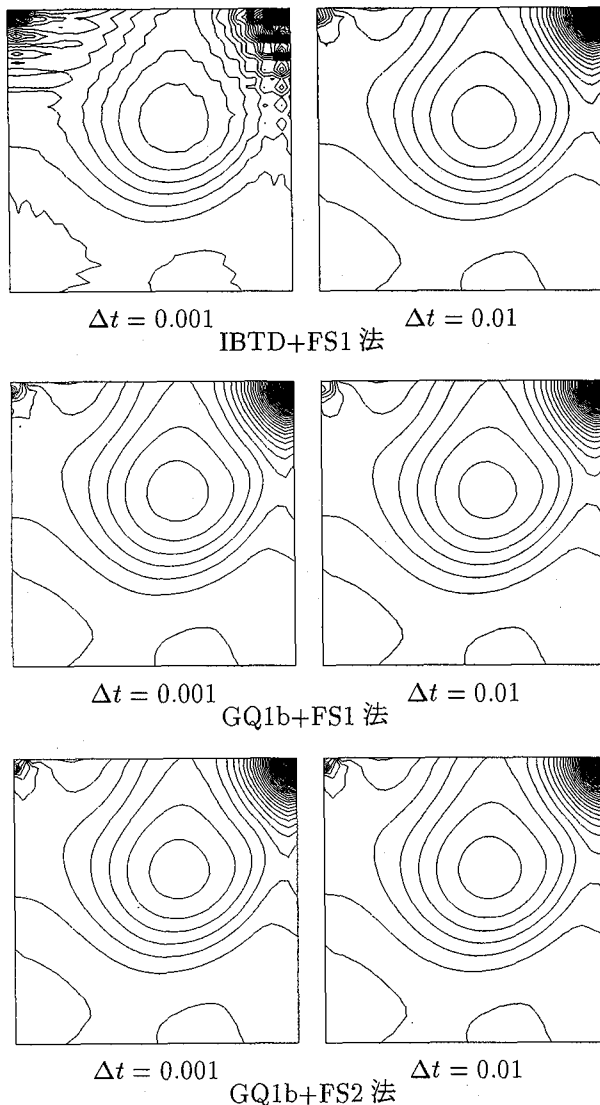


図-9 Cavity 内の流れの圧力コンター図 (メッシュ(1))

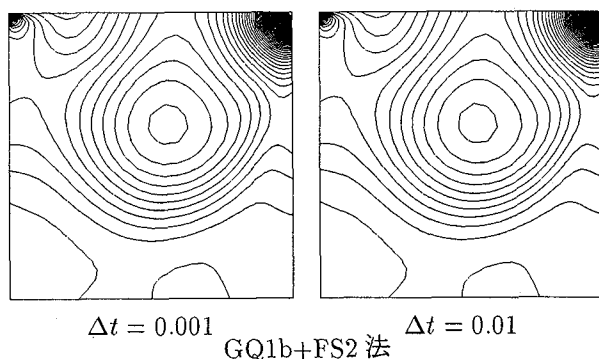


図-10 Cavity 内の流れの圧力コンター図 (メッシュ(2))

7. おわりに

本研究では、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の有限要素法による解析手法として、四角形双一次要素における正規化気泡関数を分離型法に適用した新しい手法を提案した。手法の特徴は、次のようにまとめられる。

1. Standing Vortex Problem における計算時間は、IBTD+FS1 法と比較すると、GQ1b+FS1 法、GQ1b+FS2 法は、約 2 倍、約 3 倍の計算時間を要する。
2. 気泡関数要素を用いた場合、散逸誤差が他の手法⁷⁾と比べ小さく、圧力解の振動が見られない。
3. 解の Δt に対する依存性は、GQ1b+FS2 法では非定常解についてほとんど見られず、定常解について全くない。GQ1b+FS1 法では多少見られるが IBTD+FS1 法と比べ少ない。
4. Cavity 内の流れ解析について不均等分割を行ったメッシュを用いた場合においても四角形双一次要素における気泡関数の安定化作用の効果があることが確認できた。

実際の問題を解析するには、上記のような特徴をふまえて計算機の種類や問題によって解析手法を選択する必要がある。

付録 I IBTD 法について

IBTD 法⁴⁾は、重み関数と試行関数の補間関数に異なったものを用いる Petrov-Galerkin 法の考えに基づき導くことが可能である。一次や双一次要素を用いた場合の IBTD 法による式 (5) の重み付き残差方程式は、SUPG 法による安定化パラメータを $\frac{\Delta t}{2}$ に置き換え、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + u_h^* \cdot \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}} \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \nabla w_h : \{ -p_h^{n+1} I + \nu \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}} \} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} u_h^* \cdot \nabla w_h \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + u_h^* \cdot \nabla u_h^{n+\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. + \nabla p_h^{n+1} - f_h \right\} d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} w_h \cdot f_h d\Omega + \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \hat{t}_h d\Gamma \quad (I.1)
 \end{aligned}$$

第 3 項が移流項の Galerkin 法による離散化を安定化させる働きをする。この第 3 項には、実際には粘性項が含まれるが一次や双一次要素を用いたとき消去される。第 1 項の移流項と第 3 項に含まれる時間微分項を陽的部分と陰的部分 (n と $n+1$ の項) にまとめると次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_h^* \cdot \{ w_h \cdot \nabla u_h^n - \nabla w_h \cdot u_h^n \} d\Omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{u}_h^* \cdot \{ \mathbf{w}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} + \nabla \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} \} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}_h : \{ -p_h^{n+1} \mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}_h^* \cdot \nabla \mathbf{w}_h \cdot \{ \mathbf{u}_h^* \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}_h \} d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{f}_h d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{w}_h \cdot \hat{\mathbf{t}}_h d\Gamma \quad (\text{I.2})
\end{aligned}$$

移流項の陽的部分と陰的部分は、それぞれ逆対称形と対称形に表されている。第5項の移流項の部分、BTD法の人工粘性の形と等価である。

IBTD法では、移流項の陰的部分が対称形で表されることから、代数方程式の行列の形が対称行列となり、計算効率に関して優れている。従来のBTD法では、移流項のみを考慮し、人工粘性を構築するが、IBTD法では、圧力項、外力項も考慮している。これによって解の数値的な散逸誤差を軽減することができる。

参考文献

- 1) M. Hayashi, K. Hatanaka and M. Kawahara, "Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods", Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol.13, pp.805-840, (1991).
- 2) P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee and C.D. Upson, "A modified finite element method for the solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations", Part 1 & 2, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol.4, pp.557-598 & pp.619-640, (1984).
- 3) V. Selmin, J. Donea and L. Quartapelle, "Finite element methods for nonlinear advection", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 52 pp.817-845, (1985).
- 4) 丸岡 晃, 太田 真二, 平野 廣和, 川原 睦人, "同次補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析", 構造工学論文集, Vol.43A, pp.383-394, (1997).
- 5) A.N. Brooks and T.J.R. Hughes, "Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32 pp.199-259, (1982).
- 6) T.J.R. Hughes, L.P. Franca and M. Balestra, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 59, pp.85-99, (1986).
- 7) T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih, "Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 95, pp.221-242, (1992).
- 8) F. Brezzi, M.-O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet and G. Roge, "A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 96, pp.117-129, (1992).
- 9) R. Pierre, "Simple C^0 approximation for the computation of incompressible flows", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 68, pp.205-227, (1988).
- 10) L.P. Franca and C. Farhat, "Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods", Com-

put. Methods Appl. Mech. Engrg. 123, pp.299-259, (1995).

- 11) 山田 貴博, "安定化有限要素法と気泡関数要素", 計算工学講演会論文集, Vol.1, pp.167-170, (1996).
- 12) 山田 貴博, "非適合気泡関数を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する有限要素スキーム", 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.411-414, (1997).
- 13) M. Fortin and A. Fortin, "Newer and newer elements for incompressible flow", Finite Elements in Fluids, Vol.6, pp.171-187, (1985).
- 14) R. Pierre, "Optimal selection of the bubble function in the stabilization of the P_1-P_1 element for the Stokes problem", SIAM J. Num. Anal., Vol.32, pp.1210-1224, (1995).
- 15) J.C. Simo, F. Armero and C. Taylor, "Galerkin finite element methods with bubble for advection dominated incompressible Navier-Stokes equations", Int. J. Num. Meth. Engrg. Vol.38, pp.1475-1506, (1995).
- 16) 棚橋 隆彦, "GSMAC-FEM 数値流体力学の基礎とその応用", アイビーシー, 第6章, pp.735-768, (1992).
- 17) U. Ghia, K. N. Chia and C. T. Shin, "High resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, J. Comput. Phys. 43, pp.347-411, (1982).

(1997年9月26日受付)