

Timoshenko ばりを用いた軌道振動系のモデル化

A NUMERICAL MODEL FOR TRACK VIBRATION ANALYSIS USING TIMOSHENKO BEAM

阿部和久*, 森岡泰助**, 古田 勝***

Kazuhiisa ABE, Taisuke MORIOKA and Masaru FURUTA

* 工博 新潟大学助教授 工学部建設学科 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)

** 新潟大学大学院

*** 東京都交通局

Green function of Timoshenko beam is constructed in time domain. The Green function is derived by using the idea of the discrete wavenumber method. Dynamic behavior of the Timoshenko beam is expressed in terms of an integral representation. Wheel running at a constant velocity is modeled by mass, spring and damper. Time integration scheme for the wheel motion is constructed based on the integral equation method. The derived scheme provides compatibility of time domain discretization of contact force for rail and wheel. Railway track is modeled by a beam with discrete spring supports. Difference between dynamic response of Timoshenko beam and that of Euler beam is investigated. Influence of shear deformation in the Timoshenko beam becomes remarkable at frequencies of more than about 500 Hz. It is also found that the difference between those two beam models may influence the response at low frequencies.

Key Words : railway track vibration, Timoshenko beam, integral representation, time domain

1. はじめに

軌道系の維持管理や振動騒音対策などの問題から, 車両・軌道系の振動特性を数値モデルを用い評価・予測しようとする試みが近年盛んになされている。特にレールをまくらぎにより離散支持され, 走行荷重を受けるはりとして表現した, より現実に近いモデルの適用がいくつか提案されて来ている。レールのモデル化については, Euler ばりを用いたもの^{1~3)}と Timoshenko ばりを用いたもの^{4~6)}とがある。Euler ばりは曲げ変形と鉛直方向の慣性力のみ考慮したモデルであるので, その適用範囲には限界がある。一方, Timoshenko ばりによるモデル化では, せん断変形や断面の回転慣性の効果をも考慮することができるので, Euler ばりに比べ現実の挙動をより忠実に表現することが可能であると思われる。レールのモデル化の違いが解析結果に及ぼす影響は, せん断変形の効果が顕著となる 1000 Hz より高周波数域において認められるとされている⁷⁾が, 道床なども含めた軌道系全体で見た場合には, 比較的低い周波数域から差異を生ずる可能性がある⁶⁾。著者らは主に地下鉄における振動騒音を研究対象としているが, そのような問題においては, 車両・軌道系で発生した振動が地盤を介して地表面にまで伝播して来たものが重要となる。この場合, 数 100 Hz 以下の比較的低い周波数域における振動成分が

特に問題となるが, 上述のようにレールのモデル化の違いが地盤振動応答に及ぼす影響は低周波数域にまで及ぶ可能性が考えられ, レールのモデル化に Timoshenko ばりを採用し, Euler ばりの場合との比較を行うことには意義がある。

Timoshenko ばりの数値解の構成において, Grassie *et al.*⁴⁾は周波数域での解析方法を用いている。等間隔で支持されたレール上を一定速度で走行する周期変動荷重に対する応答は, 移動座標の導入により Fourier 級数で与えることができ, 定式過程は比較的容易なものとなるが⁷⁾, 振動系における非線形性を直接的に評価することができない。また, 石田ら⁶⁾は有限長のはりの固有関数展開法に基づき解法を構成している。なお, 石田ら⁸⁾は浮きまくらぎの接触について検討しているが, これらの解析手法では外力項が全モードと関係するので, 各モードを個別に扱うことができない。一方, 著者らはこれまで Euler ばりモデルを対象に, 時間域での Green 関数を用い, 軌道系の解析手法を構成して来た。^{9~11)}この手法による場合, 解は直接時間域で得られるので, 系における非線形性を容易に考慮することが可能である。また, 任意荷重下におけるはりの応答を車輪やまくらぎなどの他の要素とは独立に, 積分表現式により定式化している。軌道構造の変更も容易に行える。

本論文では Timoshenko ばりの動的応答に対する

Green 関数を時間域で構成し、著者らがこれまで Euler ばりに対して採って来たものと同様の手法により、走行荷重を受けるレールをモデル化する。なお、Timoshenko ばりの時間域 Green 関数の構成に際し、はりの振動系に空間方向の周期性を課すことで、Green 関数の誘導時に現れる Fourier 積分を級数に置き換え、定式過程の簡易化を図る。また、線形バネにより離散支持されたはりを対象に、Euler ばりとの比較を行い、はりのモデル化の違いが振動応答に及ぼす影響について考察する。

2. 積分表現式による Timoshenko ばりの定式化

2.1 基礎方程式

空間方向に周期 $2L$ の外荷重を受ける無限長の Timoshenko ばりを考える。なお、実際に解析の対象となる問題においては、空間方向に周期性の存在しないものが一般的である。この場合、時間域での Green 関数の誘導には波数に関する Fourier 積分が必要となるが、その解析的評価は容易でない。そこで、空間方向に長さ $2L$ の周期性を仮定し、Fourier 積分を級数に置き換える離散化波数法¹²⁾と同様の考え方により、定式過程の簡易化を図る。なお、 $2L$ は、隣接領域からの影響が無視できる程度とし、解析対象となる領域に比べ十分に長くともとする。

Timoshenko ばりの運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + GAK \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) &= q, \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + GAK \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 ξ はレールの軸方向座標、 τ は時刻、 u はレールのたわみ、 ψ はレール断面の回転角、 ρ はレールの質量密度、 A は断面積、 I は断面二次モーメント、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 K はせん断係数である。また、 q は鉛直方向に作用する分布荷重である。

なお、荷重とはりの変形に対し長さ $2L$ の周期性があるものとしたので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} u(\xi) &= u(\xi + 2nL), \psi(\xi) = \psi(\xi + 2nL), \\ q(\xi) &= q(\xi + 2nL), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 Timoshenko ばりの相反式

2つの動的状態 (u, ψ) と (u^*, ψ^*) とを考える。これら2つの解に対して次の積分をとる。

$$\int_{-L}^L \left[GAK \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) * \left(\psi^* - \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) + EI \frac{\partial \psi}{\partial \xi} * \frac{\partial \psi^*}{\partial \xi} \right] d\xi \quad (3)$$

ここで、 $() * ()$ は合成積を意味する。

式(3)を部分積分し、 (u^*, ψ^*) における微分を (u, ψ) へ移すと次式を得る。

$$\begin{aligned} [Q * u^* - M * \psi^*]_{-L}^L + \int_{-L}^L \{ GAK \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) * u^* \\ + [GAK \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}] * \psi^* \} d\xi \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 Q と M はせん断力と曲げモーメントであり、次式で与えられる。

$$Q = GAK \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \psi \right), \quad M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (5)$$

また、式(1)より、

$$\begin{aligned} GAK \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) &= q - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \\ GAK \left(\psi - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - EI \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= -\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)を(4)へ代入すると次式を得る。

$$[Q * u^* - M * \psi^*]_{-L}^L + \int_{-L}^L \left[(q - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}) * u^* - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} * \psi^* \right] d\xi \quad (7)$$

同様に式(3)を部分積分し、 (u, ψ) における微分を (u^*, ψ^*) へ移すと最終的に次式を得る。

$$[Q^* * u - M^* * \psi]_{-L}^L + \int_{-L}^L \left[(q^* - \rho A \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2}) * u - \rho I \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \tau^2} * \psi \right] d\xi \quad (8)$$

式(7),(8)において、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} * u^* = u * \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} * \psi^* = \psi * \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \tau^2} \quad (9)$$

であるので、これらの関係より次の相反式を得る。

$$\begin{aligned} [Q * u^* - M * \psi^*]_{-L}^L + \int_{-L}^L q * u^* d\xi \\ = [Q^* * u - M^* * \psi]_{-L}^L + \int_{-L}^L q^* * u d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

動的状態 $(u, \psi), (u^*, \psi^*)$ が $2L$ の周期性を有する場合には、式(10)はさらに次のようになる。

$$\int_{-L}^L q * u^* d\xi = \int_{-L}^L q^* * u d\xi \quad (11)$$

2.3 積分表現式

(u^*, ψ^*) として、次式をみたす周期 $2L$ の動的状態を考える。

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} + GAK \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\psi^* - \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) \\ = \delta(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x - 2nL), \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \tau^2} + GAK \left(\psi^* - \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) - EI \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 δ は Dirac のデルタ関数である。

この場合、式(11)における q^* は式(12)第1式右辺で与えられるが、これは時刻 $\tau = 0$ において位置 $\xi = x + 2nL (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ に加えた一連の単位パルス力を表す。このとき、式(11)は次の積分表現式を与える。

$$u(x, t) = \int_{-L}^L q * u^* d\xi \quad (13)$$

3. u^* の導出

$u^*(\xi, \tau)$ は $\tau = 0, \xi = 2nL, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ に単位パルス力を加えた時のたわみ応答であるから、 u^* は ξ について偶関数、 ψ は奇関数である。したがって、 u^*, ψ^* は一般に次式により与えられる。

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{2}U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos \frac{n\pi\xi}{L}, \\ \psi^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \sin \frac{n\pi\xi}{L} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 U_0, U_n, Ψ_n は時刻 τ の関数である。
また、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi + 2Ln) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi\xi}{L} \quad (15)$$

式(14),(15)を(12)へ代入し、次式を得る。

$$\begin{aligned} \rho A \frac{d^2 U_0}{d\tau^2} &= \frac{\delta(\tau)}{L}, \\ \rho A \frac{d^2 U_n}{d\tau^2} + GAK \frac{n\pi}{L} (\Psi_n + \frac{n\pi}{L} U_n) &= \frac{\delta(\tau)}{L}, \\ \rho I \frac{d^2 \Psi_n}{d\tau^2} + GAK (\Psi_n + \frac{n\pi}{L} U_n) + EI (\frac{n\pi}{L})^2 \Psi_n &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)より Ψ_n を消去すると、 U_n に対する次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d^4 U_n}{d\tau^4} + a_n \frac{d^2 U_n}{d\tau^2} + b_n U_n &= \\ \frac{1}{L\rho A} \frac{d^2 \delta}{d\tau^2} + \frac{1}{L} \left[\frac{GK}{\rho^2 I} + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{E}{\rho^2 A} \right] \delta \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、

$$a_n = \frac{GAK}{\rho I} + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{E + GK}{\rho}, \quad b_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \frac{GKE}{\rho^2} \quad (18)$$

式(17)をみたす U_n を求めると、最終的に u^* は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u^*(\xi, \tau) &= \frac{H(\tau)}{2L\rho A} \tau \\ &+ H(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \sin \omega_{1,n} \tau + D_n \sin \omega_{2,n} \tau) \\ &\cdot \cos \frac{n\pi\xi}{L} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \omega_{1,n}^2 &= \frac{a_n}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_n}{2} \right)^2 - b_n}, \\ \omega_{2,n}^2 &= \frac{a_n}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_n}{2} \right)^2 - b_n}, \\ B_n &= \frac{1}{\omega_{1,n}(\omega_{1,n}^2 - \omega_{2,n}^2)} \frac{1}{\rho AL} \left[\frac{GK}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - \omega_{2,n}^2 \right], \\ D_n &= \frac{1}{\omega_{2,n}(\omega_{2,n}^2 - \omega_{1,n}^2)} \frac{1}{\rho AL} \left[\frac{GK}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - \omega_{1,n}^2 \right] \end{aligned} \quad (20)$$

また、 $H(\tau)$ は Heaviside のステップ関数である。

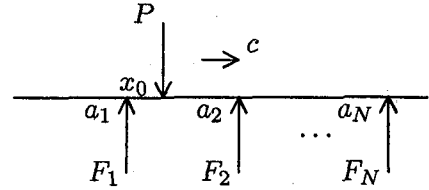


図-1 レールと作用外力

4. 走行荷重を受ける離散支持されたレールの定式化

簡単のため図-1 に示すような単一の走行荷重を考える。なお、複数荷重の場合のレールのたわみ式も以下と同様にして導くことができる。区間 $2L$ 内に走行荷重 P と N 個の離散支持点における反力 $F_i, (i = 1, \dots, N)$ とが作用しているものとする。なお、走行荷重 P の速度は c で一定とする。

外荷重 q は $-L < \xi < L$ において次式で与えられる。

$$q = P(\tau) \delta(\xi - x_0 - c\tau) - \sum_{i=1}^N F_i(\tau) \delta(\xi - a_i) \quad (21)$$

ここで、 x_0 は $\tau = 0$ における P の作用位置、 a_i は反力 F_i の作用位置である。

式(21)を(13)に代入して、たわみ $u(x, t)$ が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^{t+} u^*(x_0 - x + c(t - \tau), \tau) P(t - \tau) d\tau \\ &- \sum_{i=1}^N \int_0^{t+} u^*(a_i - x, \tau) F_i(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

解析における時間増分を Δt とし、各ステップ間で P, F_i を区間一定で離散化すると、式(22)より $t_M = M\Delta t$ におけるたわみは次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} u(x, t_M) &= \\ \sum_m^M \int_{(M-m)\Delta t}^{(M-m+1)\Delta t} u^*(x_0 - x + c(t_M - \tau), \tau) d\tau P^m \\ - \sum_j^N \sum_m^M \int_{(M-m)\Delta t}^{(M-m+1)\Delta t} u^*(a_j - x, \tau) d\tau F_j^m \end{aligned} \quad (23)$$

すると、走行荷重の作用位置 $x = x_0 + ct_M$ におけるたわみは次式のようにになる。

$$\begin{aligned} u(x_0 + ct_M, t_M) &= \sum_m^M A^{M-m+1} P^m \\ &- \sum_j^N \sum_m^M B_j^{M-m+1} F_j^m \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A^m &= \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(-c\tau, \tau) d\tau, \\ B_j^{M,m} &= \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(a_j - x_0 - ct_M, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (25)$$

また、反力 F_i の作用点 a_i におけるたわみは次のようになる。

$$u(a_i, t_M) = \sum_{i=1}^M C_i^{M, M-m+1} P^m - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M D_{ij}^{M-m+1} F_j^m \quad (26)$$

ここで、

$$C_i^{M, m} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(x_0 - a_i + c(t_M - \tau), \tau) d\tau, \\ D_{ij}^m = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(a_j - a_i, \tau) d\tau \quad (27)$$

なお、式 (25), (27) における各係数は一般に次の積分型で与えられる。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} u^*(\xi, \tau) d\tau, \quad J = \int_{t_1}^{t_2} u^*(\xi - c\tau, \tau) d\tau \quad (28)$$

5. 積分 I, J の計算

5.1 積分 I の計算

式 (19) を (28) 第 1 式へ代入すると次式のようにになる。

$$I = \frac{1}{2L\rho A} \int_{t_1}^{t_2} \tau d\tau + \sum_n (B_n \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega_{1,n} \tau d\tau + D_n \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega_{2,n} \tau d\tau) \cos \frac{n\pi\xi}{L} \quad (29)$$

ここで、 $t_1 = t_{m-1}, t_2 = t_m$ とし、そのときの I を $I_m(\xi)$ と書くと、 $I_m(\xi)$ は次式で与えられる。

$$I_m(\xi) = \frac{1}{4L\rho A} (t_m^2 - t_{m-1}^2) + \sum_n (\gamma_{n,m-1} - \gamma_{n,m}) \cos \frac{n\pi\xi}{L} \quad (30)$$

なお、

$$\gamma_{n,m} = \frac{B_n}{\omega_{1,n}} \cos \omega_{1,n} t_m + \frac{D_n}{\omega_{2,n}} \cos \omega_{2,n} t_m \quad (31)$$

5.2 積分 J の計算

式 (19) を (28) 第 2 式へ代入すると次式のようにになる。

$$J = \frac{1}{2L\rho A} \int_{t_1}^{t_2} \tau d\tau + \sum_n [B_n \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega_{1,n} \tau \cdot \cos \frac{n\pi(\xi - c\tau)}{L} d\tau + D_n \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega_{2,n} \tau \cdot \cos \frac{n\pi(\xi - c\tau)}{L} d\tau] \quad (32)$$

ここで、 $t_1 = t_{m-1}, t_2 = t_m$ とし、そのときの J を $J_m(\xi)$ と書くと、 $J_m(\xi)$ は次式で与えられる。

$$J_m(\xi) = \frac{1}{4L\rho A} (t_m^2 - t_{m-1}^2) + \sum_n [(\alpha_{n,m-1} - \alpha_{n,m}) \cos \frac{n\pi\xi}{L} + (\beta_{n,m-1} - \beta_{n,m}) \sin \frac{n\pi\xi}{L}] \quad (33)$$

ここで、

$$\alpha_{n,m} = B_n \alpha_{1n,m} + D_n \alpha_{2n,m}, \\ \beta_{n,m} = B_n \beta_{1n,m} + D_n \beta_{2n,m} \quad (34)$$

さらに、

$$\alpha_{in,m} = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{i,n} - \frac{n\pi}{L}c} \cos(\omega_{i,n} - \frac{n\pi}{L}c)t_m + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{i,n} + \frac{n\pi}{L}c} \cos(\omega_{i,n} + \frac{n\pi}{L}c)t_m, \\ \beta_{in,m} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{i,n} - \frac{n\pi}{L}c} \sin(\omega_{i,n} - \frac{n\pi}{L}c)t_m + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{i,n} + \frac{n\pi}{L}c} \sin(\omega_{i,n} + \frac{n\pi}{L}c)t_m \\ (i = 1, 2) \quad (35)$$

なお、 $\omega_{i,n} - n\pi c/L = 0$ のときは、

$$\alpha_{in,m} = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{i,n} + \frac{n\pi}{L}c} \cos(\omega_{i,n} + \frac{n\pi}{L}c)t_m, \\ \beta_{in,m} = -\frac{t_m}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{i,n} + \frac{n\pi}{L}c} \sin(\omega_{i,n} + \frac{n\pi}{L}c)t_m \quad (36)$$

5.3 剰余項の近似評価

式 (30), (33) における級数和は実際の計算では、有限項までで打切られるので剰余項を生ずる。この剰余項を積分により近似評価し、式 (30), (33) の有限打切項に加える。

(1) I_m の剰余項の近似評価

I_m における剰余項を r_{Im} と表すと、 r_{Im} は次式で与えられる。

$$r_{Im} = \sum_{n=n_1}^{\infty} (\gamma_{n,m-1} - \gamma_{n,m}) \cos \frac{n\pi\xi}{L} \quad (37)$$

ここで n_1 は式 (30) の級数和の打ち切り項数に 1 を加えた値である。

式 (37) において、

$$\bar{\gamma}_{Im} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \gamma_{n,m} \cos \frac{n\pi\xi}{L} \quad (38)$$

と定義すれば、 r_{Im} は $r_{Im} = \bar{\gamma}_{Im-1} - \bar{\gamma}_{Im}$ で与えられる。式 (38) で、 $k_n = n\pi/L$ と定義すると、

$$\omega_{1,n} := \omega_1(k_n) = \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}}, \\ \omega_{2,n} := \omega_2(k_n) = \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}} \quad (39)$$

ここで、

$$a = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 k_n^2, \quad b = \bar{b}_0 k_n^4, \\ \bar{a}_0 = \frac{GAK}{\rho I}, \quad \bar{a}_1 = \frac{E + GK}{\rho}, \quad \bar{b}_0 = \frac{GKE}{\rho^2} \quad (40)$$

また,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{L} B(k_n), & D_n &= \frac{1}{L} D(k_n), \\ B(k) &= \frac{1}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \frac{1}{\rho A} \left(\frac{GK}{\rho} k^2 - \omega_2^2 \right), \\ D(k) &= \frac{1}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \frac{1}{\rho A} \left(\frac{GK}{\rho} k^2 - \omega_1^2 \right) \end{aligned} \quad (41)$$

n_1 が十分に大きい値をとるとき, $n \geq n_1$ に対して $\omega_1, B/\omega_1, \omega_2, D/\omega_2$ は次式で近似できる.

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx c_L k, & \frac{B}{\omega_1} &\approx \frac{\bar{A}_1}{k^4}, & c_L &= \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \\ \bar{A}_1 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{GK}{E - GK} \right)^2, \\ \omega_2 &\approx c_T k, & \frac{D}{\omega_2} &\approx \frac{1}{GK A k^2}, & c_T &= \sqrt{\frac{GK}{\rho}} \end{aligned} \quad (42)$$

以上より, $\gamma_{n,m}$ は次式により近似される.

$$\gamma_{n,m} \approx \frac{\bar{A}_1}{k_n^4} \frac{1}{L} \cos c_L k_n t_m + \frac{1}{GK A k_n^2} \frac{1}{L} \cos c_T k_n t_m \quad (43)$$

ここで $\Delta k = \pi/L$ とすると $1/L = \Delta k/\pi$ となり, $\bar{r}_{Im}$ は次式で近似できる.

$$\begin{aligned} \bar{r}_{Im} &\approx \sum_{n=n_1}^{\infty} \left(\frac{\bar{A}_1}{k_n^4} \cos c_L k_n t_m \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{GK A k_n^2} \cos c_T k_n t_m \right) \cos \xi k_n \cdot \frac{\Delta k}{\pi} \\ &\approx \frac{\bar{A}_1}{2\pi} [R(c_L t_m + \xi) + R(c_L t_m - \xi)] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi GK A} [S(c_T t_m + \xi) + S(c_T t_m - \xi)] \end{aligned} \quad (44)$$

ここで,

$$\begin{aligned} R(a) &= \int_{k_{n_1}}^{\infty} \frac{1}{k^4} \cos ak \, dk \\ &= \left(\frac{1}{3k_{n_1}^3} - \frac{a^2}{6k_{n_1}} \right) \cos ak_{n_1} - \frac{a}{6k_{n_1}^2} \sin ak_{n_1} \\ &\quad + \frac{|a|^3 \pi}{12} - \frac{a^3}{6} S_i(ak_{n_1}), \quad (a \neq 0) \\ &= \frac{3}{k_{n_1}^3}, \quad (a = 0) \\ S(a) &= \int_{k_{n_1}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos ak \, dk \\ &= \frac{\cos ak_{n_1}}{k_{n_1}} - \frac{|a|\pi}{2} + a S_i(ak_{n_1}), \quad (a \neq 0) \\ &= \frac{1}{k_{n_1}}, \quad (a = 0) \end{aligned} \quad (45)$$

なお, S_i は積分正弦関数である.

(2) J_m の剰余項の近似評価

I_m と同様に, J_m の剰余項を r_{Jm} とし, $\bar{r}_{Jm}$ を次式で定義すると, r_{Jm} は $\bar{r}_{Jm-1} - \bar{r}_{Jm}$ で与えられる.

$$\bar{r}_{Jm} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \left(\alpha_{n,m} \cos \frac{n\pi\xi}{L} + \beta_{n,m} \sin \frac{n\pi\xi}{L} \right) \quad (46)$$

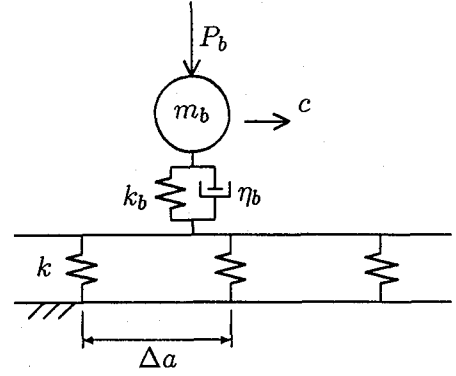


図-2 解析モデル

$n \geq n_1$ において次の近似が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{B}{\omega_1 + k_n c} &\approx \frac{\bar{A}_2}{k_n^4}, & \bar{A}_2 &= \frac{1}{\rho I c_L (c_L + c)} \left(\frac{GK}{E - GK} \right)^2, \\ \frac{B}{\omega_1 - k_n c} &\approx \frac{\bar{A}_3}{k_n^4}, & \bar{A}_3 &= \frac{1}{\rho I c_L (c_L - c)} \left(\frac{GK}{E - GK} \right)^2, \\ \frac{D}{\omega_2 + k_n c} &\approx \frac{\bar{A}_4}{k_n^2}, & \bar{A}_4 &= \frac{1}{c_T (c_T + c)} \frac{1}{\rho A}, \\ \frac{D}{\omega_2 - k_n c} &\approx \frac{\bar{A}_5}{k_n^2}, & \bar{A}_5 &= \frac{1}{c_T (c_T - c)} \frac{1}{\rho A} \end{aligned} \quad (47)$$

すると, $\bar{r}_{Jm}$ は次式で近似できる.

$$\begin{aligned} \bar{r}_{Jm} &\approx \frac{\bar{A}_2}{2\pi} R((c_L + c)t_m - \xi) \\ &\quad + \frac{\bar{A}_3}{2\pi} R((c_L - c)t_m + \xi) \\ &\quad + \frac{\bar{A}_4}{2\pi} S((c_T + c)t_m - \xi) \\ &\quad + \frac{\bar{A}_5}{2\pi} S((c_T - c)t_m + \xi) \end{aligned} \quad (48)$$

6. 求解方程式の構成

6.1 車輪の運動方程式と車輪・レール間接触力の評価

ここでは図-2に示すようなバネ k により離散支持されたレールと車輪との連成解析を対象とする. 本論文では Timoshenko ばりと Euler ばりの違いが振動応答に及ぼす基本的影響について調べる目的で, 図のような比較的簡単なモデルを用いる. なお, 本論文で述べた解法はより複雑なモデルへも容易に適用できる¹⁰⁾.

車輪は質点でモデル化し, 車輪とレールの接触部には Voigt ユニットの設ける. 一般に接触部は Hertz の接触バネにより表されるが, ここではそれを線形化したバネ k_b を用いる. 車輪の運動方程式は次式で与えられる.

$$\frac{d^2 u_b}{d\tau^2} + \frac{P}{m_b} - \frac{f}{m_b} = 0 \quad (49)$$

ここで, u_b は車輪の鉛直変位, m_b は車輪質量, P は車輪とレール間に作用する接触力, f は車輪に作用する上載荷重 P_b と輪重 $m_b g$ の和で g は重力加速度である.

式 (49) における接触力 P は次式で与えられる.

$$P = \eta_b \frac{d\bar{u}_b}{d\tau} + k_b \bar{u}_b \quad (50)$$

ここで、 $\tilde{u}_b$ は車輪変位 u_b と車輪直下のはりのたわみ $\tilde{u}_b$ との相対量で $\tilde{u}_b = u_b - \tilde{u}_b$ である。また、 k_b 、 η_b は接触部におけるバネ定数と減衰係数である。

はりの定式過程において、接触力 P は 1 ステップ間一定に離散化した。ここでは、式 (49)、(50) の時間積分法として、接触力 P の離散化がはりの定式化におけるものと適合し得るスキームを構成し、連成解析の安定性と精度の向上を図る。具体的には積分方程式に基づいた時間積分法¹³⁾を用いる。

まず、式 (49) に対して次の合成積をとる。

$$\int_0^t \left(\frac{d^2 u_b}{d\tau^2} + \frac{P}{m_b} - \frac{f}{m_b} \right) w^*(t-\tau) d\tau = 0 \quad (51)$$

ここで核関数 w^* には次式のものを用いる。

$$w^*(\tau) = \tau H(\tau) \quad (52)$$

なお、式 (51) において、 $t=0$ は前ステップの時刻など適当にとった初期時刻である。式 (51) を部分積分して次式を得る。

$$u_b(t) - u_b^0 - t\dot{u}_b^0 + \int_0^t \frac{(P-f)}{m_b} w^*(t-\tau) d\tau = 0 \quad (53)$$

ここで $u_b^0 = u_b(0)$ 、 $\dot{u}_b = \frac{du_b}{dt}$ とする。

式 (50) に対しても同様に次の合成積をとる。

$$\int_0^t (P - \eta_b \frac{d\tilde{u}_b}{d\tau} - k_b \tilde{u}_b) w_p^*(t-\tau) d\tau = 0 \quad (54)$$

ここで核関数 w_p^* には次式のものを用いる。

$$w_p^*(\tau) = H(\tau) \quad (55)$$

式 (54) を部分積分して次式を得る。

$$\eta_b(-\tilde{u}_b^0 + \tilde{u}_b(t)) - \int_0^t (P - k_b \tilde{u}_b) d\tau = 0 \quad (56)$$

式 (53)、(56) の積分で、 $0 < \tau < \Delta t$ において $\tilde{u}_b$ を線形、 P を一定関数で近似する。さらに f は一定値とすると次式を得る。

$$u_b(t) - u_b^0 - t\dot{u}_b^0 + \frac{t^2}{2m_b} P^1 - \frac{t^2}{2} f = 0 \quad (57)$$

$$\eta_b(-\tilde{u}_b^0 + \tilde{u}_b(t)) - tP^1 + k_b \left[\left(t - \frac{t^2}{2\Delta t} \right) \tilde{u}_b^0 + \frac{t^2}{2\Delta t} \tilde{u}_b^1 \right] = 0 \quad (58)$$

式 (57)、(58) において、 $u_b(t)$ 、 $\tilde{u}_b(t)$ は一般に u_b^0 、 u_b^1 または $\tilde{u}_b^0$ 、 $\tilde{u}_b^1$ を線形補間して得られる関数には一致しない。そこで、 $t = \Delta t$ において選点法を適用し、 $u_b(\Delta t) = u_b^1$ 、 $\tilde{u}_b(\Delta t) = \tilde{u}_b^1$ とおく。最後に $t=0$ を $M-1$ ステップ、 $t = \Delta t$ を M ステップにとれば次の時間積分式を得る。

$$\left. \begin{aligned} u_b^M + \frac{\Delta t^2}{2m_b} P^M &= u_b^{M-1} + \Delta t \dot{u}_b^{M-1} + \frac{\Delta t^2}{2} f \\ -\left(\frac{\eta_b}{\Delta t} + \frac{k_b}{2} \right) \tilde{u}_b^M + P^M &= -\left(\frac{\eta_b}{\Delta t} - \frac{k_b}{2} \right) \tilde{u}_b^{M-1} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

なお、式 (53) を微分して $\dot{u}_b^M$ は次式のように求められる。

$$\dot{u}_b^M = \dot{u}_b^{M-1} + \frac{\Delta t}{m_b} (f - P^M) \quad (60)$$

表-1 解析条件

輪重	m_b (Kg)	350
接触ばね定数	k_b (MN/m)	2000
接触減衰係数	η_b (KN・s/m)	5.1
上載荷重	P_b (KN)	60
走行速度	c (m/s)	10
レールの密度	ρ (Kg/m ³)	7880
レールの断面積	A ($\times 10^{-4}$ m ³)	64.05
断面二次モーメント	I ($\times 10^{-8}$ m ⁴)	1960
ヤング率	E (GN/m ²)	206
せん断弾性係数	G (GN/m ²)	77.3
せん断係数	K	0.34
支持バネ定数	k (MN/m)	110
支持間隔	a (m)	0.625

6.2 求解方程式

離散支持点においてはりはバネにより支持されているので、支持バネからの反力 F_i は支持点におけるはりのたわみ u_i を使い、 $F_i = k u_i$ と書き表すことができる。すると、式 (24) より、車輪直下のレールのたわみ式が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} k \sum_{j=1}^N B_j^{M,1} u_j^M + \tilde{u}_b^M - A^1 P^M \\ = \sum_{m=1}^{M-1} A^{M-m+1} P^m - \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} B_j^{M,M-m+1} F_j^m \end{aligned} \quad (61)$$

ここで、 u_j^M は第 M ステップにおける支持点 a_j でのレールのたわみである。

また、式 (26) より、支持点 a_i におけるレールのたわみ式が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (\delta_{ij} + k D_{ij}^1) u_j^M - C_i^{M,1} P^M \\ = \sum_{m=1}^{M-1} C_i^{M,M-m+1} P^m - \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M-1} D_{ij}^{M-m+1} F_j^m \end{aligned} \quad (62)$$

ここで、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

解析において、 u_i^M ($i=1, \dots, N$)、 $\tilde{u}_b^M$ 、 u_b^M 、 P^M を未知量にとる。これらの値は式 (59)、(61)、(62) を連立して解くことで求めることができる。

7. 解析結果

コンクリート直結軌道を想定し、図-2 の車輪・軌道系に対し、6. に述べた解析手法を適用して、Timoshenko ばりと Euler ばりとの比較を行う。解析条件を表-1 に示す。ここで、上載荷重は車両に定員の 200% が乗車した場合に対応しており、支持ばね定数には、一締結あたりの軌道パッドの実効ばね定数が 110(MN/m) の場合を考えた。解析では離散支持バネを 11 本等間隔に配置し、走行荷重の初期位置は左端支持点より 0.625 m とした。また、本解法は非常に安定で、大きな時間増分の下でも解析可能であるが、Timoshenko ばりと Euler ばりとの差が明確に現れるのは 1000Hz 以降とされているので、

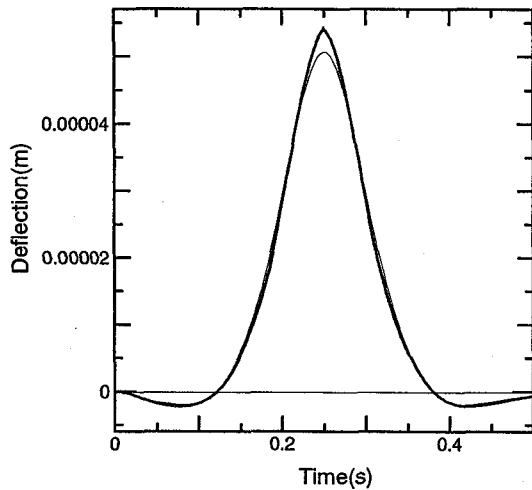


図-3 レールのたわみの時刻歴。——:Timoshenko ばり, ———:Euler ばり。

2000Hz までを解析範囲に考え、それに対し十分な精度を与え得る時間増分として $\Delta t = 0.000125$ (s) を採用し、4000 ステップ (0.5 秒間) までの計算を行った。計算時間はステップ数の二乗に概ね比例するが、本解析に要した計算時間は約 4 時間であった (VT-Alpha 433 による)。なお、初期の過渡応答を最小限に抑えるため、輪重等を最初の 0.05 秒間で漸増させた。また、積分 I, J の計算における級数の打ち切りは、 $\frac{B_n}{\omega_{1,n}}$, $\frac{D_n}{\omega_{2,n}}$ に関する次の収束条件に基づき判定した。

$$\left| 1 - \frac{B_{n-1}}{\omega_{1,n-1}} \times \frac{\omega_{1,n}}{B_n} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| 1 - \frac{D_{n-1}}{\omega_{2,n-1}} \times \frac{\omega_{2,n}}{D_n} \right| \leq \varepsilon \quad (63)$$

以下の解析では、解析精度を確認の上、 $\varepsilon = 0.01$ と設定した。さらに、空間方向の周期長は $2L = 200$ m としている。

まずはじめに、輪重をゼロとし、上載荷重を 10 kN と設定して解析を行い Timoshenko ばりと Euler ばりにおけるレールのたわみ量の比較を行った。結果を図-3に示す。図-3は中央に位置する6番目の支持点におけるレールのたわみの時刻歴を示したものである。図で太線が Timoshenko ばり、細線が Euler ばりである。全体の傾向は両モデルで似たものとなっているが、上載荷重通過時における最大たわみ量は Timoshenko ばりの方が Euler ばりより約 7% 程度大きな値を示している。これは Timoshenko ばりにおいて考慮しているせん断変形の影響によるものと思われる。

次に、車輪を考慮した場合での解析結果について述べる。なお、解析に当たり、振動の発生源としてレール頭頂面に図-4に示すような振幅約 0.05 mm のランダムな凹凸を与えた。車輪が規定の走行速度下で受けるレール凹凸の振幅スペクトルを図-5に示す。図より波長が 12.5 cm (80 Hz)、4.1 cm (約 240 Hz)、2.4 cm (約 400 Hz) の波形が凹凸の主要成分であることがわかる。中央支持点におけるレールの振動加速度の時刻歴を図-6に示す。図-6は Timoshenko ばりにおける結果である。

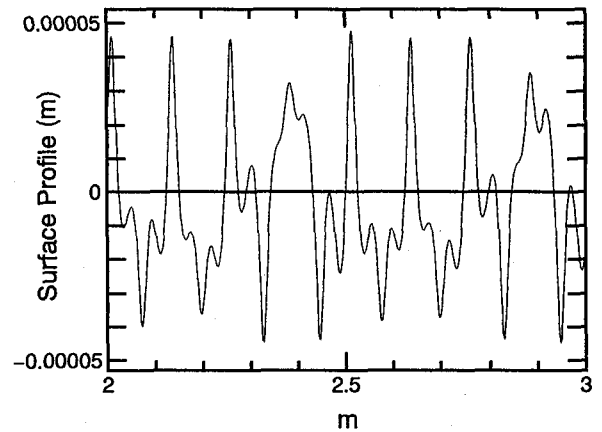


図-4 レール頭頂面の凹凸

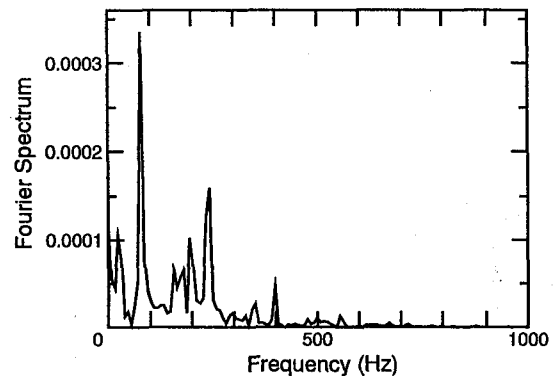


図-5 レール凹凸の振幅スペクトル

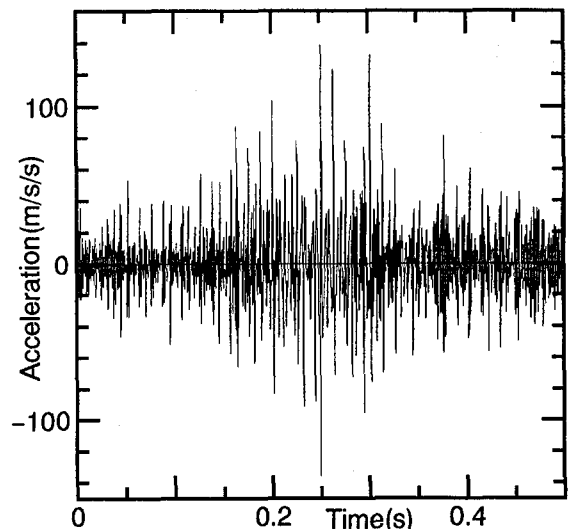


図-6 レールの振動加速度の時刻歴

Euler ばりにおいては、全体的傾向は Timoshenko ばりの場合と一致するものの、各ピークの絶対値が大きい値を示した。なお、図中に認められる大きな振幅を持つピークは、その時間間隔から、レール頭頂面における波長 12.5 cm の凹凸成分に対応するものであることがわかる。次に、加速度の振幅スペクトルの比較を図-7に示す。Timoshenko ばりでは、上述の波長 12.5 cm の凹凸に対応する成分が最初のピークとして認識できる。さらに、波長 4.1 cm および、2.4 cm の凹凸に対応する成

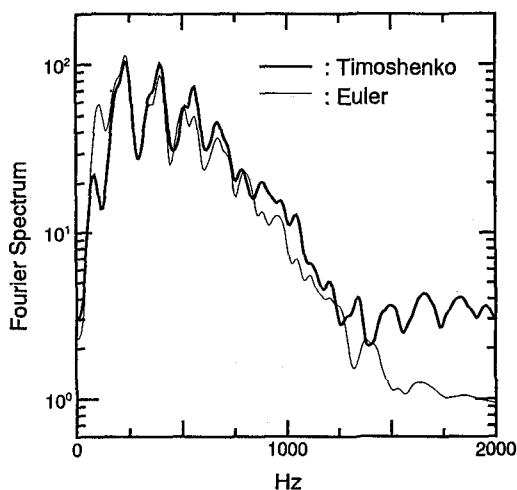


図-7 レールの振動加速度の振幅スペクトル

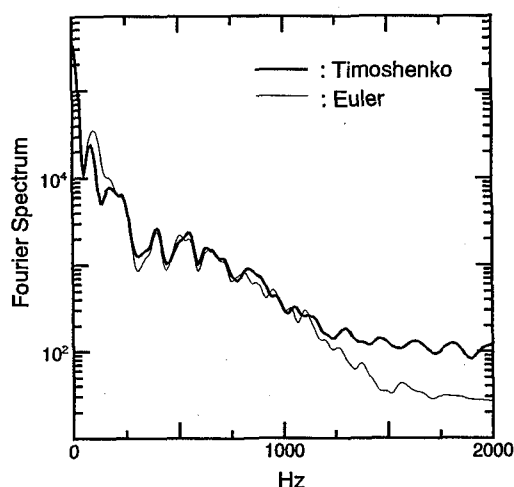


図-8 接触力の振幅スペクトル

分も明確なピークとして現れていることがわかる。500 Hz 付近まで Timoshenko ばりと Euler ばりとで概ね一致した傾向が認められている。ただし、原因は明らかではないが Euler ばりに見られる 100 Hz 付近のピークが Timoshenko ばりには認められない。Timoshenko ばりと Euler ばりとの差は 500 Hz 以上の周波数域で認められ、Euler ばりの方が全体に小さ目となっている。特に 1500 Hz 付近から顕著な差を生じていることがわかる。Timoshenko ばりと Euler ばりとは、500 Hz 付近まで概ね一致するが、それ以上の周波数域ではせん断変形の影響により差を生ずるとされている⁷⁾が、その傾向は本解析によっても認められた。

次に接触力変動の振幅スペクトルを図-8に示す。なお、接触力の時刻歴変動はいずれのはりモデルでも同傾向を示したが、変動幅は Euler ばりの方がわずかに大きめであった。図-8においては、レールの加速度の場合と同様に 100 Hz 付近で両はりモデル間に差が認められる。また、両モデルにおける差は 1000 Hz 以降で顕著に現れている。なお、石田ら⁶⁾は新幹線を対象に、レールの凹凸波長に対する応答スペクトルを Timoshenko ばりと

Euler ばりで比較している。文献6)では、400 Hz 以降の高周波数域で Timoshenko ばりでの動的輪重が Euler ばりのそれより小さくなることが示されており、本解析と逆傾向となっているが、走行速度(文献6)では 270 Km/h)や軌道構造が異なっており、詳細については今後の検討を要する。

8. おわりに

Timoshenko ばりの時間域 Green 関数を用い、車輪・軌道系の連成振動解析手法を構成した。バネにより離散支持されたレールを対象に、走行荷重下での振動応答解析を行い、Timoshenko ばりと Euler ばりとの比較を行った。その結果、レールのたわみ量はせん断変形の影響により Timoshenko ばりの方が Euler ばりより大きくなることがわかった。また、動的応答に関しては、500 Hz 以上の周波数域で両モデル間での違いが現れるが、100 Hz 付近にも比較的明瞭な差が認められており、低周波数域でもモデル化の違いが影響を及ぼす可能性があることがわかった。

本研究では、Timoshenko ばりの解析手法の構成と、Euler ばりとの基本的特性の違いについて調べることを目的とした。今後は、著者らが Euler ばりに対して構成してきている¹⁰⁾、より現実に近い軌道モデルに対し、本研究で作成した Timoshenko ばりの解法を適用し、より実用的な解析を行って行きたい。

参考文献

- 1) Kalker, J.J., Discretely supported rails subjected to transient loads, *Vehicle Sys. Dyn.*, **25**, 71-88, 1996.
- 2) 柳允 善, 嘩道佳明, 須田義大, 大野進一, 移動質量一接触ばね系と弾性支持梁の連成振動解析, 生産研究, 47 巻 10 号, 72-75, 1995.
- 3) 三浦 重, 軌道構造の動特性モデルの構築, 鉄道総研報告, vol.9, No.12, 7-12, 1995.
- 4) Grassie, S.L. et al., The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation, *J. Mech. Eng.*, **24**, 77-90, 1982.
- 5) 古村彰芳, 神山雅子, 移動荷重による軌道の振動の解析, 鉄道総研報告, Vol.8, No.9, 31-36, 1994.
- 6) 石田 誠, 三浦 重, 河野昭子, 軌道動的応答モデルとその解析結果, 鉄道総研報告, Vol.11, No.2, 19-26, 1997.
- 7) Knothe, K.L. and Grassie, S.L., Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle System Dyn.*, **22**, 209-262, 1993.
- 8) 石田 誠, 三浦 重, 河野昭子, 車両走行による軌道沈下箇所の動的応答特性, 鉄道シンポジウム講演論文集, 133-136, 1997.
- 9) 阿部和久, 古田 勝, 時間域積分表現式による軌道振動解析法, 構造工学論文集, Vol.43A, 365-372, 1997.
- 10) 阿部和久, 須田雅樹, 古田 勝, 積分方程式法による車輪・軌道系の連成振動解析, BTEC 論文集, Vol.7, 53-58, 1997.
- 11) 古田 勝, 阿部和久, 各種軌道構造と台車・軌道系振動の動特性についての考察, 鉄道シンポジウム論文集, 119-122, 1997.
- 12) Bouchon, M. and Aki, K., Discrete wavenumber representation of seismic source wave fields, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **67**, 259-277, 1977.
- 13) Kisu, H., Stable time integral scheme using one-dimensional boundary integral equation method, in R.C. Ertekin, C.A. Brebbia, M. Tanaka and R. Shaw (eds), *Boundary Element Technology*, XI CMP, 297-306, 1996.

(1997 年 9 月 26 日 受付)