

有限体積法と FEM/RBSM の関係

THE RELATION BETWEEN FINITE VOLUME METHOD AND FEM/RBSM

竹内 則雄*・武田 洋**・佐藤 一雄***

Norio TAKEUCHI, Hiroshi TAKEDA and Kazuo SATO

*工博 明星大学教授 理工学部土木工学科 (〒191 東京都日野市程久保 2-1-1)

**工博 法政大学教授 工学部システム制御工学科 (〒184 東京都小金井市梶野町 3-7-2)

***動力炉・核燃料開発事業団 情報システム室室長 (〒107 東京都港区赤坂 1-9-13)

Finite volume method(FVM) can be considered to be a particular case of finite elements with a non-Galerkin weighting. FVM and finite element method(FEM) share concepts such as mesh discretization and interpolation. It is known that FVM and FEM become the same discretized systems entirely, in a special case that approximates a displacement field with the linear function. On the other hand, the discretized systems of rigid bodies-spring model (RBSM) are deduced by using the strain energy on the element boundaries. In this paper, the concept of FEM is introduced to a formulation of FVM. It is shown that FVM can be interpreted as equivalent to FEM using some particular finite elements and RBSM can be also considered to be a particular case of FVM with the rigid displacement fields.

Key Words : Finite Volume Method(FVM), FEM, RBSM

1. はじめに

有限体積法(FVM)は、非直交格子を用いた有限差分近似として流体力学や移動現象論などの分野において発展してきた[1]。一方、固体力学の分野では、Galerkin 法を基礎とする有限要素法(FEM)より精度が低いという理由によりあまり利用されていなかったが、近年、構造力学に FVM を適用する研究が再び試みられている[2][3]。

FVM は非 Galerkin 重みを有する FEM の特殊なケースと考えることができ[2]、両者を要素分割や補間法の立場から検討した研究が行われている[4]~[6]。特に、変位場を 1 次関数で近似する特殊なケースでは、FVM と FEM は全く同じ離散化方程式になることが知られている[2]。しかし、その定式化は統一的とはいえず、その結果として計算効率の比較等に多くの誤解を招きやすい。

一方、川井によって開発された剛体ばねモデル(RBSM)は要素境界辺上に集中化されたエネルギーを評価して剛性方程式を誘導している[7]。RBSM も、FVM において剛体変位場を仮定した特殊なケースとして捉えることができ、最も低次の変位場を用いた離散化手法と考えることができる。

本論文では、FVM と FEM, RBSM の関係を明らかにすることを目的に、FVM の統一的展開を行い、FVM の定式化に有限要素法概念を導入することで FVM が特殊な有限要素を用いた FEM そのものであることを理論的に示す。さらに、FVM の変位場として剛体変位場を仮定することにより、RBSM と全く同じ離散化方程式が得られることを示す。

2. 基礎方程式と重み付き残差式

弾性問題の基礎方程式は次で与えられる。

$$(\text{釣合い方程式}) \quad L^t \sigma + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$(\text{応力-ひずみ関係}) \quad \sigma = D \epsilon \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$(\text{ひずみ-変位関係}) \quad \epsilon = L u \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

ここで、 u, ϵ, σ は、それぞれ、変位、ひずみ、応力ベクトルであり、 D は構成行列、 f は物体力を表している。 Ω は境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ で囲まれた領域、もしくは体積である。ただし、 Γ_u は変位が与えられる境界、 Γ_t は表面力が与えられる境界である。

いま、2 次元平面応力状態の場合、それぞれの係数は次の通りである。

$$L^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

ここで、 E は弾性係数、 ν はポアソン比であり、 f_x, f_y は、それぞれ x および y 軸方向の物体力を表している。また、 u, v は、それぞれ x および y 軸方向の変位である。

式(1)に幾何学的境界条件を満たす任意の重み W を乗じて領域 Ω について積分すると以下の重み付き残差式が得られる。

$$\int_{\Omega} W^t (L^t \sigma + f) d\Omega = 0 \quad (4)$$

ここで、重み $\mathbf{W}^t = [W_x, W_y]$ (2次元平面問題の場合) を仮想変位と考えれば、式(4)は仮想仕事の原理の一般形と考えることができる。

いま、領域 Ω は閉境界 $\Gamma(r)$ で囲まれた R 個の部分領域 $\Omega^{(r)}$ から構成されているものとする。すなわち、

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^R \Omega^{(r)} \quad \text{ただし} \quad \Omega^{(r)} \cap \Omega^{(q)} = 0 \quad (r \neq q) \quad (5)$$

このとき、式(4)は離散領域に対して以下のように表すことができる。

$$\sum_{r=1}^R \left(\int_{\Omega^{(r)}} \mathbf{W}^t \mathbf{L}^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega^{(r)}} \mathbf{W}^t f d\Omega \right) = 0 \quad (6)$$

ここで、式(6)の左辺第1項にガウスの発散定理を適用すると、離散領域に対する弱形式が以下のように得られる。

$$\sum_{r=1}^R \left(- \int_{\Omega^{(r)}} [\mathbf{L}\mathbf{W}]^t \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \oint_{\Gamma^{(r)}} \mathbf{W}^t n \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} \mathbf{W}^t f d\Omega \right) = 0 \quad (7)$$

3. 有限体積法の定式化

ここでは、従来から一般的に用いられている有限体積法の定式化に対して、コンピュータ・インプリメンテーションを念頭に入れた統一的な展開により有限体積法の定式化を論ずる。

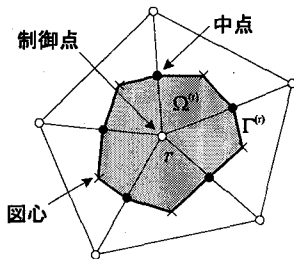


図1 制御点と制御体積

図1に示す網掛け部分は有限体積法のセル中心スキームにおける制御点 r に関する制御体積を示したものである。図中、 $\Omega^{(r)}$ が制御体積で、 $\Gamma^{(r)}$ がその閉境界を表している。また、○印が制御点を、●印が着目制御点と隣接する制御点とを結んだ線分の中点を、×印が着目制御点と隣接制御点で囲まれた領域の図心を表している。

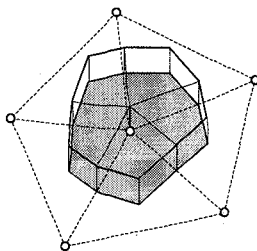


図2 有限体積法で用いられる一定な重み関数

有限体積法では全領域 Ω に対する離散体積として、制

御点 r に関する制御体積 $\Omega^{(r)}$ を考え、 $\Omega^{(r)}$ 上の重み関数として制御点 r の値で代表される一定な関数を考える。図2は有限体積法で用いられる重み関数を示したもので、図のように重み関数は制御体積内で一定で、その他では0となる。

このような一定の重み関数を考えると、式(7)の第1項は重み関数の1階微分が含まれるため零となり、弱形式は次のようになる。

$$\sum_{r=1}^R \left(\oint_{\Gamma^{(r)}} \mathbf{W}^t n \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} \mathbf{W}^t f d\Omega \right) = 0 \quad (8)$$

いま、制御点 r で代表される一定な重み関数 $\mathbf{W}^{(r)}$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{W}^{(r)} = I \quad \text{in } \Omega^{(r)} \quad \text{elsewhere} \quad \mathbf{W}^{(r)} = 0 \quad (9)$$

ここで、 I は単位行列である。

このとき、重み関数が制御点 r の値で代表されることを考慮すると式(8)は次のように整理される。

$$\sum_{r=1}^R \left[\left(\mathbf{W}^{(r)} \right)^t \left(\oint_{\Gamma^{(r)}} n \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (10)$$

一方、境界 $\Gamma(r)$ 上の変位 $\mathbf{u}$ は近似的に制御点 r および近傍の制御点の節点変位 $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ を用いて次のように補間できるものとする。

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathbf{N}^{(r)} \bar{\mathbf{u}}^{(r)} \quad (11)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{u}}^{(r)}$ は近似された変位関数、 $\mathbf{N}^{(r)}$ は基底関数である。このとき、ひずみは式(3)より次のように表される。

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(r)} \bar{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathbf{B}^{(r)} \bar{\mathbf{u}}^{(r)} \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{B}^{(r)} = \mathbf{L} \mathbf{N}^{(r)}$ である。

したがって、式(10)は、式(2)で示す応力ひずみ関係を考慮し、式(12)を用いて以下のように整理される。

$$\sum_{r=1}^R \left[\left(\mathbf{W}^{(r)} \right)^t \left(\oint_{\Gamma^{(r)}} n \mathbf{D} \mathbf{B}^{(r)} d\Gamma \bar{\mathbf{u}}^{(r)} + \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (13)$$

いま、全制御点における重みを並べた一次元配列を $\widetilde{\mathbf{W}}$ とすると、制御点 r における重み関数 $\mathbf{W}^{(r)}$ は以下のように関係付けられる。

$$\mathbf{W}^{(r)} = \mathbf{T}^{(r)} \widetilde{\mathbf{W}} \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{T}^{(r)}$ は全制御点における重みの配列と制御点 r の重みを関係付ける行列である。

同様に、制御点 r に関する節点変位 $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ と全制御点における節点変位を並べた一次元配列 $\mathbf{U}$ との間についても次の関係が成立する。

$$\bar{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathbf{A}^{(r)} \mathbf{U} \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{A}^{(r)}$ は全制御点における節点変位と着目制御点

に關係する節点変位を關係付ける行列である。

式(13)に式(14),(15)の關係を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{W}^t \left[\sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \left(\oint_{\Gamma^{(r)}} n DB^{(r)} d\Gamma \right) \mathcal{A}^{(r)} \right] U \\ + \tilde{W}^t \left[\sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、制御点における重み $\tilde{W}$ は任意であるため、最終的に次の支配方程式が得られる。

$$KU = P \quad (17)$$

ただし、 K は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} K &= \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t k^{(r)} \mathcal{A}^{(r)} \\ k^{(r)} &= - \oint_{\Gamma^{(r)}} n DB^{(r)} d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

また、 P についても同様に次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum_{r=1}^R (\mathcal{T}^{(r)})^t p^{(r)} \\ p^{(r)} &= \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

このように、有限体積法の支配方程式は離散化された連立1次方程式(17)に帰着し、左辺係数行列 K は式(18)に示すように、各制御点毎にその寄与 $k^{(r)}$ を組み合わせることにより構築する。同様に、右辺既知ベクトル P についても各制御点毎の寄与 $p^{(r)}$ を組み合わせることによって構築する。それぞれの寄与は式(18)、式(19)に示すように、制御体積 $\Omega^{(r)}$ および、その閉境界 $\Gamma^{(r)}$ について積分することにより求められる。

4. 線形変位場を仮定した古典的有限体積法

(1) 線形変位場

簡単のため説明を2次元平面状態で行う。式(11)で与えられる閉境界 $\Gamma^{(r)}$ 上の変位関数 $\hat{u}^{(r)}$ を定義するにあたり、図3の太線で示す3つの制御点 r, p, q で構成される三角形網 e の領域 $\Omega_e^{(r)}$ を考える。閉境界 $\Gamma^{(r)}$ も同様に三角形網内の着目制御体積の境界 $\Gamma_e^{(r)}$ で構成されるものとする。

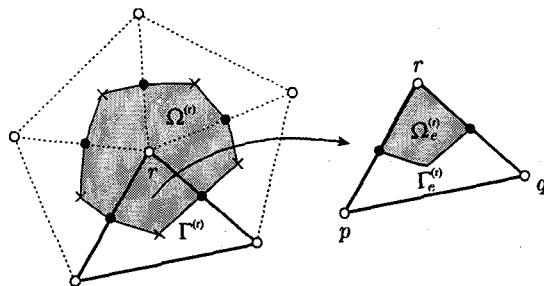


図3 線形変位場を仮定する三角形網

ここで、上付きの r は制御点 r に関係することを、ま

た、下付の e は三角形網 e に関係することを表している。

いま、3つの制御点で囲まれた三角形内における境界 $\Gamma_e^{(r)}$ 上の変位 $\hat{u}_e^{(r)}$ を、それぞれの制御点における節点変位 $\bar{u}_e^{(r)}$ により以下のように表す。

$$\hat{u}_e^{(r)} = N_e^{(r)} \bar{u}_e^{(r)} \quad (20)$$

$$N_e^{(r)} = \begin{bmatrix} N_r & 0 & N_p & 0 & N_q & 0 \\ 0 & N_r & 0 & N_p & 0 & N_q \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_e^{(r)} = [\bar{u}^{(r)} \quad \bar{v}^{(r)} \quad \bar{u}^{(p)} \quad \bar{v}^{(p)} \quad \bar{u}^{(q)} \quad \bar{v}^{(q)}]^t$$

であり、 N_r は有限要素法における定ひずみ要素の場合と同様に、以下の関係にある。

$$N_r = a_r + b_r x + c_r y \quad (21)$$

$$a_r = \frac{1}{2\Delta} (x_p y_q - x_q y_p)$$

$$b_r = \frac{1}{2\Delta} (y_p - y_q)$$

$$c_r = \frac{1}{2\Delta} (x_p - x_q)$$

$$2\Delta = (x_r - x_q)(y_p - y_q) - (y_q - y_r)(x_q - x_p)$$

ここで、 $(x_r, y_r), (x_p, y_p), (x_q, y_q)$ は、それぞれ三角形網の頂点 r, p, q における座標値である。 N_p, N_q についても同様な関係にある。

このとき、境界 $\Gamma_e^{(r)}$ 上のひずみは次のようになる。

$$\varepsilon = L \hat{u}_e^{(r)} = L N_e^{(r)} \bar{u}_e^{(r)} = B_e^{(r)} \bar{u}_e^{(r)} \quad (22)$$

ただし、 $B_e^{(r)}$ は以下の通りである。

$$B_e^{(r)} = L N_e^{(r)} = \begin{bmatrix} b_r & 0 & b_p & 0 & b_q & 0 \\ 0 & c_r & 0 & c_p & 0 & c_q \\ c_r & b_r & c_p & b_p & c_q & b_q \end{bmatrix} \quad (23)$$

(2) 古典的な有限体積法

古典的な有限体積法では、各制御点毎に式(18)で示される寄与 $k^{(r)}$ を組み合わせることによって左辺係数行列を構築する。いま、図3に示したように、制御体積 $\Omega^{(r)}$ は部分領域 $\Omega_e^{(r)}$ から構成され、閉境界 $\Gamma^{(r)}$ も同様に三角形網内の着目制御体積の境界 $\Gamma_e^{(r)}$ で構成されるため、以下の関係が成立する。

$$\Omega^{(r)} = \bigcup_{e=1}^{n_e^{(r)}} \Omega_e^{(r)}, \quad \Gamma^{(r)} = \bigcup_{e=1}^{n_e^{(r)}} \Gamma_e^{(r)} \quad (24)$$

ここで、 $n_e^{(r)}$ は制御点 r に関係する三角形網の数である。

このとき、三角形網を基準として線形変位場を仮定した場合の式(13)に対応する有限体積法の解式は次のようになる。

$$\sum_{r=1}^R \left[(\mathcal{W}^{(r)})^t \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \left(\oint_{\Gamma_e^{(r)}} n DB_e^{(r)} d\Gamma \bar{u}_e^{(r)} + \int_{\Omega_e^{(r)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (25)$$

ここで、 $\bar{u}_e^{(r)}$ は三角形網の3つの頂点のうちどれか1つの頂点が制御点 r に一致する三角形網の節点変位を並べ

た1次元配列をである。また、 $B_e^{(r)}$ の成分は式(23)のとおりである。式(25)の左辺第1項は、図4に示すように、三角形網内の制御体積に対する境界 $\Gamma_e^{(r)}$ 上における表面力 (σ_n, τ) の制御点 r に対する寄与を表している。

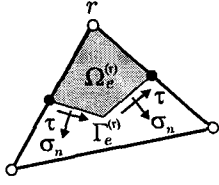


図4 境界 $\Gamma_e^{(r)}$ 上の表面力 (σ_n, τ)

いま、制御点 r に関係する三角形網すべての節点変位を並べた1次元配列を $\bar{u}^{(r)}$ とすると、 $\bar{u}_e^{(r)}$ との間に次の関係が成立する。

$$\bar{u}_e^{(r)} = Q_e^{(r)} \bar{u}^{(r)} \quad (26)$$

ここで、 $Q_e^{(r)}$ は制御点 r に関係する節点変位と三角網を構成する制御点の変位を関係付ける行列である。この関係を式(25)に代入し、重み関数 $W^{(r)}$ と変位 $\bar{u}^{(r)}$ に対して、式(14)(15)の関係を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{W}^t \left[\sum_{r=1}^R (T^{(r)})^t \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \left(\int_{\Gamma_e^{(r)}} n D B_e^{(r)} d\Gamma Q_e^{(r)} \right) A^{(r)} \right] U \\ + \bar{W}^t \left[\sum_{r=1}^R (T^{(r)})^t \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \int_{\Omega_e^{(r)}} f d\Omega \right] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、重み $\bar{W}$ は任意であるため、線形変位場を仮定した有限体積法の支配方程式が次のように得られる。

$$\bar{K} U = \bar{P} \quad (28)$$

ここで、 $\bar{K}$ は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K} &= \sum_{r=1}^R (T^{(r)})^t \bar{k}^{(r)} A^{(r)} \\ \bar{k}^{(r)} &= - \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \int_{\Gamma_e^{(r)}} n D B_e^{(r)} d\Gamma Q_e^{(r)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

同様に、右辺既知ベクトル $\bar{P}$ は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{P} &= \sum_{r=1}^R (T^{(r)})^t \bar{p}^{(r)} \\ \bar{p}^{(r)} &= \sum_{e=1}^{n_e^{(r)}} \int_{\Omega_e^{(r)}} f d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ここで示した方法は変位場の仮定の方法に特徴があるが、基本的に従来の有限体積法と同様、支配方程式は各制御点毎に寄与 $\bar{k}^{(r)}$ あるいは $\bar{p}^{(r)}$ を組み合わせ構築する。

5. 有限要素法と有限体積法

(1) 有限要素の概念を導入した有限体積法

ここでは、有限体積法に有限要素の概念を導入し、通常の有限要素アルゴリズムの範疇で有限体積法を取り扱

うための一般的な定式化について論ずる。また、前節で述べた変位場と同じ線形変位場を用い、三角網に着目して先の有限体積法の定式化を整理してみる。ただし、簡単のため、議論は2次元状態で行うものとする。

さて、有限体積法では全領域 Ω を部分領域 $\Omega^{(r)}$ の集合で考えていた。一方、領域 Ω を M 個の三角網、すなわち有限要素の集合と見なすこともできる。いま、三角網で囲まれた領域を Ω_m とすると以下の関係が成立している。

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^R \Omega^{(r)} = \bigcup_{m=1}^M \Omega_m \quad \text{ただし} \quad \Omega_m \cap \Omega_n = 0 \quad (m \neq n) \quad (31)$$

ただし、下付の添字 m は m 番目の三角網であることを示している。

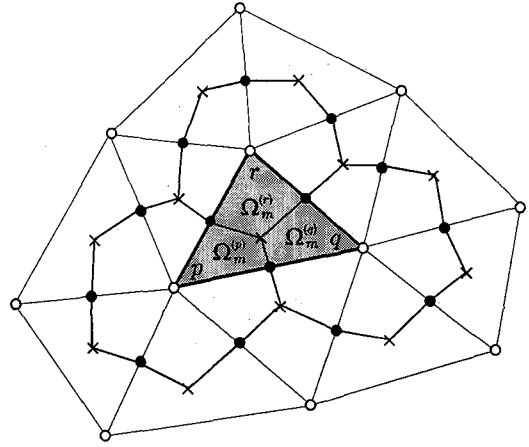


図5 有限要素と制御体積の関係

部分領域 Ω_m は、2次元平面問題の場合、図5に示すように3つの制御点 r, p, q に関する制御体積の一部 $(\Omega_m^{(r)}, \Omega_m^{(p)}, \Omega_m^{(q)})$ から構成されている。これらを Ω_m の部分領域と考えれば以下の関係が成立する。

$$\Omega_m = \Omega_m^{(r)} \cup \Omega_m^{(p)} \cup \Omega_m^{(q)} = \bigcup_{l=1}^3 \Omega_m^{(l)} \quad (32)$$

$$\text{ただし} \quad \Omega_m^{(r)} \cap \Omega_m^{(p)} = \Omega_m^{(p)} \cap \Omega_m^{(q)} = \Omega_m^{(q)} \cap \Omega_m^{(r)} = 0$$

ここで、上付きの r は制御点 r に関係する制御体積の一部であることを示しており、下付きの m はその領域が部分領域 Ω_m に含まれていること示している。

このとき、全領域 Ω は以下のように表すことができる。

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^M \Omega_m = \bigcup_{m=1}^M \left(\bigcup_{l=1}^3 \Omega_m^{(l)} \right) \quad (33)$$

また、制御体積 r の領域 $\Omega^{(r)}$ に関する閉境界 $\Gamma^{(r)}$ は、式(24)で示したように、制御体積 $\Omega^{(r)}$ の閉境界 $\Gamma^{(r)}$ に対する要素 m の占める部分境界の和集合として表されていた。これは、三角網の領域 Ω_m に着目すると、図6に示すように、その部分領域 $\Omega_m^{(r)}, \Omega_m^{(p)}, \Omega_m^{(q)}$ の三角網内の境界 $\Gamma_m^{(r)}, \Gamma_m^{(p)}, \Gamma_m^{(q)}$ と一致する。したがって、制御体積の境界の和集合は、三角網内の部分領域における境界の和集合をすべての三角網について考えたものと一致する。

$$\bigcup_{r=1}^R \Gamma^{(r)} = \bigcup_{r=1}^R \left(\bigcup_{e=1}^{n_e^{(r)}} \Gamma_e^{(r)} \right) = \bigcup_{m=1}^M \left(\Gamma_m^{(r)} \cup \Gamma_m^{(p)} \cup \Gamma_m^{(q)} \right) = \bigcup_{m=1}^M \left(\bigcup_{l=1}^3 \Gamma_m^{(l)} \right) \quad (34)$$

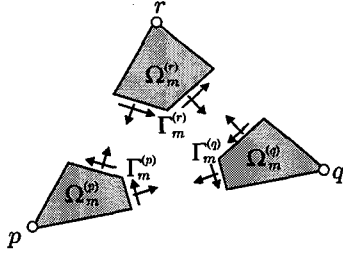


図6 三角網 Ω_m の部分領域とその境界

これらの関係を考慮して有限体積法に関する弱形式(8)を書き改めると次のようになる。

$$\sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^3 \left(\int_{\Gamma_m^{(l)}} W_m^t n \sigma d\Gamma + \int_{\Omega_m^{(l)}} W_m^t f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (35)$$

上式は、三角形網毎に結合する制御点に関する寄与を計算し、それを一旦組み合わせた後、全三角形網（有限要素法的に考えるなら要素）について重ね合わせている。この手順は有限要素法の剛性行列作成手順と等価である。

式(35)において、重み関数 W は三角形網の l 番目の制御点の重みが用いられたため、これを $W_m^{(l)}$ とすると

$$\sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^3 \left(W_m^{(l)} \right)^t \left(\int_{\Gamma_m^{(l)}} n \sigma d\Gamma + \int_{\Omega_m^{(l)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (36)$$

一方、境界 $\Gamma_m^{(l)}$ 上の変位は部分領域 Ω_m を構成する制御点の変位により式(20)のように補間できるものとし、以下のように表す。

$$u \approx \hat{u} = N_m \bar{u}_m \quad (37)$$

ここで、 $\bar{u}_m$ は部分領域 Ω_m を構成する全ての制御点における節点変位を並べた1次元配列であり、 N_m は部分領域 Ω_m に対する式(20)に示した行列である。

このとき、境界 $\Gamma_m^{(l)}$ 上のひずみは、

$$\varepsilon = L \hat{u} = L N_m \bar{u}_m = B_m \bar{u}_m \quad (38)$$

となり、これと式(2)の応力-ひずみ関係を式(36)に代入すると以下の関係が得られる。

$$\sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^3 \left(W_m^{(l)} \right)^t \left(-k_m^{(l)} \bar{u}_m + p_m^{(l)} \right) \right] = 0 \quad (39)$$

ここで、 $k_m^{(l)}$ 、 $p_m^{(l)}$ は以下のとおりである。

$$k_m^{(l)} = - \int_{\Gamma_m^{(l)}} n D B_m d\Gamma \quad (40)$$

$$p_m^{(l)} = \int_{\Omega_m^{(l)}} f d\Omega \quad (41)$$

三角形網（要素） m の l 番目の制御点（節点）の重み $W_m^{(l)}$ は、三角形網を構成する全ての制御点における節点

変位を並べた1次元配列 $\bar{u}_m$ と同様に、重みを並べた1次元配列 W_m から対応するものを選び出せばよいことに着目すると次のように表すことができる。

$$W_m^{(l)} = \mathcal{H}_m^{(l)} W_m \quad (42)$$

ここで、 $\mathcal{H}_m^{(l)}$ は制御点 r の重みと三角形網を構成する制御点の重みを関係付ける行列である。

式(42)を式(39)に代入することにより次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^M [W_m^t (-k_m \bar{u}_m + p_m)] = 0 \quad (43)$$

$$k_m = \sum_{l=1}^3 \left(\mathcal{H}_m^{(l)} \right)^t k_m^{(l)} \quad (44)$$

$$p_m = \sum_{l=1}^3 \left(\mathcal{H}_m^{(l)} \right)^t p_m^{(l)} \quad (45)$$

ここで、三角形網 m に関する制御点の変位 $\bar{u}_m$ や、重み W_m は全ての制御点における変位を並べた1次元配列 U と重みを並べた1次元配列 $\bar{W}$ により以下のように表すことができる。

$$W_m = \mathcal{A}_m \bar{W} \quad (46)$$

$$\bar{u}_m = \mathcal{A}_m U \quad (47)$$

この関係を式(43)に代入すると次式が得られる。

$$\bar{W}^t \left[\sum_{m=1}^M (-\mathcal{A}_m^t k_m \mathcal{A}_m U + \mathcal{A}_m p_m) \right] = 0 \quad (48)$$

ここで、重み $\bar{W}$ は任意であることより、支配方程式が以下のように得られる。

$$\hat{K} U = \hat{P} \quad (49)$$

$$\hat{K} = \sum_{m=1}^M \mathcal{A}_m^t k_m \mathcal{A}_m \quad (50)$$

$$\hat{P} = \sum_{m=1}^M \mathcal{A}_m p_m \quad (51)$$

以上の展開により、有限要素の概念を導入した有限体積法の支配方程式は古典的有限体積法と同じ離散化された連立1次方程式(49)に帰着し、左辺係数行列 $\hat{K}$ は式(50)より、各要素毎のその寄与 k_m を重ね合わせることで構築される。同様に、右辺既知ベクトル $\hat{P}$ についても式(51)のように、各要素毎の寄与 p_m を重ね合わせることで構築することができる。この手順は有限要素法における重ね合わせの手順と全く同じである。

(2) FEM 定ひずみ要素との等価性

式(50)で示される係数行列 $\hat{K}$ は三角形網を基本とする線形変位場の場合、結果的に対称行列となる。ここでは、2次元平面状態を例に、この係数行列が有限要素法における剛性行列と等価であることを具体的に示す。

図7は三角形網で表される部分領域 Ω_m を取り出して

示したものである。図中、 (x_r, y_r) 等は三角形の頂点における座標値を表している。 $n_1^{(r)}, n_2^{(r)}$ は、図7に示すように、三角形の頂点、すなわち制御点 r に関する部分領域 $\Omega_m^{(r)}$ の境界における法線ベクトルを、また、 $L_1^{(r)}, L_2^{(r)}$ は境界辺の長さを表している。

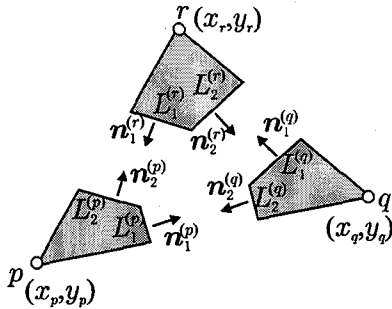


図7 部分領域 Ω_m の法線ベクトルと境界辺の長さ

式(40)および式(41)より、図に示す要素の寄与は以下のように与えられる。

$$k_m = \sum_{l=1}^3 \left[\left(\mathcal{H}_m^{(l)} \right)^t \left(- \int_{\Gamma_m^{(l)}} n D B_m d\Gamma \right) \right] \quad (52)$$

ここで、線形変位場の場合 D および B_m は一定であるから積分の外にだすことができ、

$$k_m = \sum_{l=1}^3 \left[\left(\mathcal{H}_m^{(l)} \right)^t \left(- \int_{\Gamma_m^{(l)}} n d\Gamma \right) \right] D B_m \quad (53)$$

となる。上式の[]内を具体的に求めると次のようになる。

$$= - \begin{bmatrix} L_1^{(r)} n_{x1}^{(r)} + L_2^{(r)} n_{x2}^{(r)} & 0 & L_1^{(r)} n_{y1}^{(r)} + L_2^{(r)} n_{y2}^{(r)} \\ 0 & L_1^{(r)} n_{x1}^{(r)} + L_2^{(r)} n_{x2}^{(r)} & L_1^{(r)} n_{y1}^{(r)} + L_2^{(r)} n_{y2}^{(r)} \\ L_1^{(p)} n_{x1}^{(p)} + L_2^{(p)} n_{x2}^{(p)} & 0 & L_1^{(p)} n_{y1}^{(p)} + L_2^{(p)} n_{y2}^{(p)} \\ 0 & L_1^{(p)} n_{x1}^{(p)} + L_2^{(p)} n_{x2}^{(p)} & L_1^{(p)} n_{y1}^{(p)} + L_2^{(p)} n_{y2}^{(p)} \\ L_1^{(q)} n_{x1}^{(q)} + L_2^{(q)} n_{x2}^{(q)} & 0 & L_1^{(q)} n_{y1}^{(q)} + L_2^{(q)} n_{y2}^{(q)} \\ 0 & L_1^{(q)} n_{x1}^{(q)} + L_2^{(q)} n_{x2}^{(q)} & L_1^{(q)} n_{y1}^{(q)} + L_2^{(q)} n_{y2}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (54)$$

ここで、 $n_{x1}^{(r)}$ および $n_{y1}^{(r)}$ は法線ベクトル $n_1^{(r)}$ の成分であり、その他についても同様である。

式(54)を具体的に計算すると

$$\sum_{l=1}^3 \left[\left(\mathcal{H}_m^{(l)} \right)^t \left(- \int_{\Gamma_m^{(l)}} n d\Gamma \right) \right] = \Delta B_m^t \quad (55)$$

となり、 B_m の転置行列に面積を乗じたものと等しいことが分かる。したがって、式(53)は次のようになる。

$$k_m = \Delta B_m^t D B_m \quad (56)$$

一方、有限要素法における定ひずみ要素の変位-ひずみ変換行列 B は

$$B = \begin{bmatrix} b_r & 0 & b_p & 0 & b_q & 0 \\ 0 & c_r & 0 & c_p & 0 & c_q \\ c_r & b_r & c_p & b_p & c_q & b_q \end{bmatrix} \quad (57)$$

であるから、有限体積法による寄与 k_m は有限要素法における定ひずみ要素の要素剛性行列と全く同じであることが理解できる。

有限要素法と有限体積法の積分スキームを三角形要素について比較してみると、図8に示すような相違がある。しかし、要素内でひずみが一定の場合、得られる要素剛性行列が一致することは先に述べたとおりである。

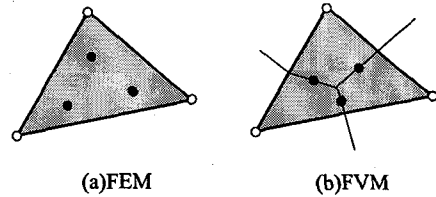


図8 三角形要素の積分スキーム

一方、四角形要素の場合の両者の相違は図9に示すとおりである。

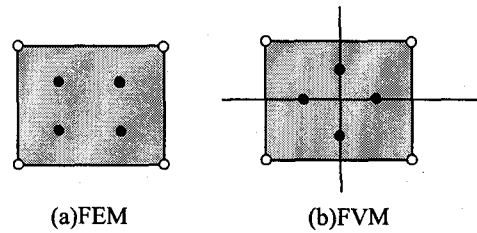


図9 四角形要素の積分スキーム

6. 剛体ばねモデルと有限体積法

ここでは、変位場として剛体変位場を仮定して有限体積法から見た剛体ばねモデルの一般的な定式化について論じ、有限体積法から導いた係数行列が、要素境界边上の集中化されたエネルギーより誘導した剛体ばねモデルの剛性行列と等価になることを示す。

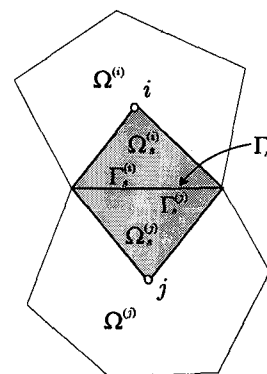


図10 境界辺を基準とした部分領域

さて、有限体積法では全領域 Ω を部分領域 $\Omega^{(r)}$ の集合で考えていた。一方、領域 Ω を図10の網掛け部分で示すような隣接する2つの制御点と境界から構成される2つの三角形の集合と見なすこともできる。いま、2つの三角形領域を、それぞれ、 $\Omega_s^{(i)}$ 、 $\Omega_s^{(j)}$ とすると、全領域 Ω は次のように表すことができる。

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^R \Omega^{(r)} = \bigcup_{s=1}^N \left(\Omega_s^{(i)} \cup \Omega_s^{(j)} \right) \quad (58)$$

ただし $\Omega_s^{(i)} \cap \Omega_s^{(j)} = 0 \quad (i \neq j)$

ここで、 N は境界辺の数であり、下付の s は s 番目の境界辺に関係していることを、上付きの (i) は制御点 i に関係していることを表している。

一方、 $\Omega_s^{(i)}$ 、 $\Omega_s^{(j)}$ の境界は、それぞれの制御体積 (i) 、 (j) の領域 $\Omega^{(i)}$ 、 $\Omega^{(j)}$ の閉境界 $\Gamma^{(i)}$ 、 $\Gamma^{(j)}$ に関して、図10に示すような隣接する制御点で挟まれた部分境界 $\Gamma_s^{(i)}$ 、 $\Gamma_s^{(j)}$ で表される。このとき、以下の関係が成立している。

$$\bigcup_{r=1}^R \Gamma^{(r)} = \bigcup_{s=1}^N \left(\Gamma_s^{(i)} \cup \Gamma_s^{(j)} \right) \quad (59)$$

ここで、 $\Gamma_s^{(i)}$ 、 $\Gamma_s^{(j)}$ は同じ境界辺で法線ベクトルの向きが異なる。

これらを考慮して有限体積法に関する弱形式(8)を書き改めると次のようになる。

$$\sum_{s=1}^N \left[\sum_{l=1}^2 \left(\int_{\Gamma_s^{(l)}} \mathbf{W}^t \mathbf{n} \sigma d\Gamma + \int_{\Omega_s^{(l)}} \mathbf{W}^t f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (60)$$

式(60)は、個々の三角形について、その結合する制御点に関する評価を行い、それを一旦、組み合わせた上で、さらに、全境界辺に対して重ね合わせをおこなっている。この手順は剛体ばねモデルにおける剛性行列作成手順と等価である。

式(60)において、重み関数 $\mathbf{W}$ は三角形に含まれる l 番目の制御点の重みが用いられたため、これを $\mathbf{W}_s^{(l)}$ とすると次のようになる。

$$\sum_{s=1}^N \left[\sum_{l=1}^2 \left(\mathbf{W}_s^{(l)} \right)^t \left(\int_{\Gamma_s^{(l)}} \mathbf{n} \sigma d\Gamma + \int_{\Omega_s^{(l)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (61)$$

ただし、上付きの (l) は l 番目の制御体積である部分領域 $\Omega^{(l)}$ に関係していること示しており、下付きの s は2つの制御体積で挟まれた s 番目の境界辺に関係していることを示している。

(1) 回転自由度を無視した剛体変位場とRBSM

制御体積 r 内の変位場として、以下に示す剛体変位場を仮定する。

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathbf{N}^{(r)} \bar{\mathbf{u}}^{(r)} \quad (62)$$

ただし、2次元平面問題の場合、これは次の関係にある。

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}^{(r)} \\ \hat{v}^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}^{(r)} \\ \bar{v}^{(r)} \end{Bmatrix} \quad (63)$$

図11は、2次元平面問題における隣接する2つの制御体積内の剛体変位を表したものである。ここで、添え字の数字は制御点の番号を表している。

有限体積法では、重み関数として制御点で代表される一定関数を考えている。このとき、式(62)のように剛体

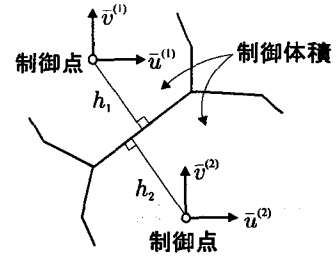


図11 隣接する制御体積内の剛体変位

変位場を仮定すると、重み関数と変位関数が同じ関数となり、変位関数を最も低次の関数により近似する Glerkin 近似の一つであると考えることができる。しかし、このままでは変位の一階以上の微分を表現することができないため、何らかの近似を導入する必要がある。

いま、式(62)を2つの制御点で挟まれた境界辺 s 上の局所座標系の成分に座標変換する。

$$\hat{\mathbf{u}}_n^{(r)} = \mathbf{R}_s^{(r)} \bar{\mathbf{u}}^{(r)} = \mathbf{R}_s^{(r)} \mathbf{N}^{(r)} \bar{\mathbf{u}}^{(r)} \quad (64)$$

ここで、 $\mathbf{R}_s^{(r)}$ は座標変換行列である

この場合、2要素間の法線方向 $\mathbf{n}$ に対して、変位場の法線方向の微分 $\partial \hat{\mathbf{u}}_n^{(r)} / \partial n$ がジャンプする。分布定理によれば、境界におけるこのジャンプは平均的な量で与えられる[2]。そこで、これを次のように近似し、境界 Γ_s 上の法線方向および、それと垂直な方向のひずみを定義する。

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_n}{\partial n} = \frac{1}{h_1 + h_2} \left(\hat{\mathbf{u}}_n^{(1)} + \hat{\mathbf{u}}_n^{(2)} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 + h_2} \left(\mathbf{R}_s^{(1)} \mathbf{N}^{(1)} \bar{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{R}_s^{(2)} \mathbf{N}^{(2)} \bar{\mathbf{u}}^{(2)} \right) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{l=1}^2 \left(\mathbf{R}_s^{(l)} \mathbf{N}^{(l)} \bar{\mathbf{u}}^{(l)} \right) \end{aligned} \quad (65)$$

ここで、上付きの $()$ 内の数字は制御体積1および2の変位場を表している。また、 h_1 および h_2 はそれぞれの制御点から境界辺 Γ_s に下した垂線の高さであり、 $h = h_1 + h_2$ である。

式(65)において、座標変換行列 $\mathbf{R}_s^{(1)}$ と $\mathbf{R}_s^{(2)}$ には、

$$\mathbf{R}_s^{(1)} = -\mathbf{R}_s^{(2)} \quad (66)$$

なる関係がある。これを考慮すると、

$$\left[\mathbf{R}_s^{(1)} \mid \mathbf{R}_s^{(2)} \right] = \left[\mathbf{I} \mid -\mathbf{I} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_s^{(1)} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{R}_s^{(1)} \end{array} \right] = \mathbf{M}_s \mathbf{R}_s \quad (67)$$

と表すことができる。ここで、 $\mathbf{I}$ は単位行列である。また、

$$\mathbf{N}_s = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{N}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{N}^{(2)} \end{array} \right], \quad \bar{\mathbf{u}}_s = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{u}}^{(1)} \\ \bar{\mathbf{u}}^{(2)} \end{array} \right\} \quad (68)$$

とおけば、式(65)は次のように表すことができる。

$$\epsilon_n = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^2 \left(\mathbf{R}_s^{(l)} \mathbf{N}^{(l)} \bar{\mathbf{u}}^{(l)} \right) = \frac{1}{h} \mathbf{M}_s \mathbf{R}_s \mathbf{N}_s \bar{\mathbf{u}}_s = \frac{1}{h} \mathbf{B}_s \bar{\mathbf{u}}_s \quad (69)$$

ただし、 $\mathbf{B}_s = \mathbf{M}_s \mathbf{R}_s \mathbf{N}_s$ である。

さて、RBSM では、境界辺上の表面力を、境界辺上に分布したばねという概念を用いて以下の関係から求めている[8].

$$\sigma_n = D_n \varepsilon_n \quad (70)$$

ここで、 σ_n は要素境界辺上の単位面積あたりの表面力であり、 ε_n は垂線の高さを基準とした単位長さ当たりの相對変位、 D_n はばね行列である[7]. 2次元平面問題の場合、これは次のように表される.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (71)$$

ここで、 k_n は境界辺に垂直な方向、 k_s は境界辺に沿った方向の相對変位に抵抗するばねである.

式(69)より、式(70)は次のように表すことができる.

$$\sigma_n = D_n \varepsilon_n = \left(\frac{D_n}{h} \right) B_s \bar{u}_s \quad (72)$$

したがって、制御点 r に寄与する表面力は次のように表すことができる.

$$n\sigma = (R_s^{(r)})^t \sigma_n = (R_s^{(r)})^t D_n \varepsilon_n = (R_s^{(r)})^t \left(\frac{D_n}{h} \right) B_s \bar{u}_s \quad (73)$$

これを式(61)に代入すると、以下の式が得られる.

$$\sum_{s=1}^N \left[\sum_{l=1}^2 (W_s^{(l)})^t \left(\int_{\Gamma_s^{(l)}} (R_s^{(l)})^t \bar{D}_n B_s \bar{u}_s d\Gamma + \int_{\Omega_s^{(l)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (74)$$

ただし、 $\bar{D}_n = D_n/h$ である.

式(74)において、境界辺 s に関する制御点 l の重み $W_s^{(l)}$ は、境界辺 s に関する制御点における節点変位を並べた1次元配列 $\bar{u}_s$ と同様に重みを並べた1次元配列 W_s から対応するものを選び出せばよいことに着目すると次のように表すことができる.

$$W_s^{(l)} = \mathcal{M}_s^{(l)} W_s \quad (75)$$

ここで、 W_s は境界辺を挟む2つの制御点に関する重みであるため、

$$W_s = \left\{ W_s^{(1)} \quad W_s^{(2)} \right\}^t \quad (76)$$

である. ただし、上付きの()内の数字は制御点番号を表している. したがって、 $\mathcal{M}_s^{(l)}$ は次のようになる.

$$\mathcal{M}_s^{(1)} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_s^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (77)$$

ここで、 I は単位行列である.

式(75)を式(74)に代入し、整理すると次式が得られる.

$$\sum_{s=1}^N [W_s^t (-k_s \bar{u}_s + p_s)] = 0 \quad (78)$$

ただし、

$$k_s = - \sum_{l=1}^2 (\mathcal{M}_s^{(l)})^t \int_{\Gamma_s^{(l)}} (R_s^{(l)})^t \bar{D}_n B_s d\Gamma \quad (79)$$

$$p_s = \sum_{l=1}^2 (\mathcal{M}_s^{(l)})^t \int_{\Omega_s^{(l)}} f d\Omega \quad (80)$$

いま、式(79)は次のように書き下すことができる.

$$k_s = - \int_{\Gamma_s^{(1)}} (\mathcal{M}_s^{(1)})^t (R_s^{(1)})^t \bar{D}_n B_s d\Gamma - \int_{\Gamma_s^{(2)}} (\mathcal{M}_s^{(2)})^t (R_s^{(2)})^t \bar{D}_n B_s d\Gamma \quad (81)$$

ここで、式(67)および式(77)の関係を用い、積分の向きを考慮すると以下の関係が得られる.

$$k_s = - \int_{\Gamma_s} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_s^{(1)} & 0 \\ 0 & R_s^{(1)} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \bar{D}_n B_s d\Gamma \quad (82)$$

剛体変位場を仮定した場合、 $N^{(1)}$ 、 $N^{(2)}$ は単位行列となるため、

$$N_s = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 \\ 0 & N^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (83)$$

なる関係がある. したがって、式(81)は以下のように整理できる.

$$k_s = \int_{\Gamma_s} [M_s R_s N_s]^t \bar{D}_n B_s d\Gamma = \int_{\Gamma_s} B_s^t \bar{D}_n B_s d\Gamma \quad (84)$$

このように寄与 k_s は対称行列となり、その成分は剛体ばねモデルの剛性行列と同一である.

ここで、境界辺 s に関する制御点の変位 $\bar{u}_s$ や、重み W_s は全ての制御点における変位を並べた1次元配列 U と重みを並べた1次元配列 $\bar{W}$ により以下のように表すことができる.

$$W_s = \mathcal{A}_s \bar{W} \quad (85)$$

$$\bar{u}_s = \mathcal{A}_s U \quad (86)$$

これを式(78)に代入すると次式が得られる.

$$\bar{W}^t \left[\sum_{s=1}^N (-\mathcal{A}_s^t k_s \mathcal{A}_s U + \mathcal{A}_s p_s) \right] = 0 \quad (87)$$

ここで、重み $\bar{W}$ は任意であることより、支配方程式が以下のように得られる.

$$\bar{K} U = \bar{P} \quad (88)$$

$$\bar{K} = \sum_{s=1}^N \mathcal{A}_s^t k_s \mathcal{A}_s \quad (89)$$

$$\bar{P} = \sum_{s=1}^N \mathcal{A}_s p_s \quad (90)$$

以上の展開により、剛体ばねモデルの支配方程式は古典的有限体積法と同じ離散化された連立1次方程式(88)に帰着し、左辺係数行列 $\bar{K}$ は式(89)より、各境界辺毎の

その寄与 k_s を重ね合わせることににより構築される。同様に、右辺既知ベクトル $\bar{p}$ についても式(90)のように、各境界辺毎の寄与 p_m を重ね合わせることによって構築することができる。この手順は、もちろん、剛体ばねモデルにおける重ね合わせの手順と同じである。

(2) 回転自由度を考慮した剛体変位場と RBSM

剛体ばねモデルでは、剛体回転を自由度に含めて解析するのが一般的である。そこで、式(62)で示した剛体変位場に剛体回転を考慮し、解式の展開を行う。

いま、式(62)において剛体回転を考慮すると次の関係式が得られる。

$$u \approx \hat{u}^{(r)} = \left[N^{(r)} \mid y^{(r)} \right] \left\{ \frac{\bar{u}^{(r)}}{\bar{\theta}^{(r)}} \right\} \quad (91)$$

ここで、 $\bar{\theta}^{(r)}$ は回転自由度であり、 $N^{(r)}$ と $\bar{u}^{(r)}$ は式(62)と同一である。また $y^{(r)}$ は回転自由度にかかる座標の関数で、2次元平面問題の場合、これは次のように表される。

$$y^{(r)} = \begin{Bmatrix} -(y - y_r) \\ (x - x_r) \end{Bmatrix} \quad (92)$$

ここで、図12に示すように、 (x_r, y_r) は制御点 r の座標値である。また、 $\bar{\theta}^{(r)}$ は制御点 r における剛体回転を表している。

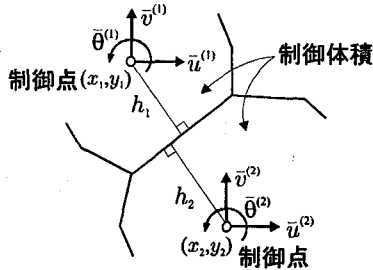


図12 剛体回転を考慮した制御体積内の剛体変位

このとき、式(64)で表される境界辺に沿った局所座標系への座標変換は次のようになる。

$$\hat{u}_n^{(r)} = R_s^{(r)} \hat{u}^{(r)} = R_s^{(r)} \left[N^{(r)} \mid y^{(r)} \right] \left\{ \frac{\bar{u}^{(r)}}{\bar{\theta}^{(r)}} \right\} \quad (93)$$

剛体回転を考慮した剛体変位場の場合においても、2要素間の法線方向 n に対して、変位場の法線方向の微分 $\partial \hat{u}_n^{(r)} / \partial n$ がジャンプすることには変わりはなく、式(65)で示した近似を適用して境界 Γ_s 上の法線方向および、それと垂直な方向のひずみを以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial n} = \frac{1}{h} \left(\hat{u}_n^{(1)} + \hat{u}_n^{(2)} \right) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{l=1}^2 \left(R_s^{(l)} \left[N^{(l)} \mid y^{(l)} \right] \left\{ \frac{\bar{u}^{(l)}}{\bar{\theta}^{(l)}} \right\} \right) \end{aligned} \quad (94)$$

ここで、式中の記号の意味は式(65)の場合と同じである。

また、座標変換行列 $R_s^{(1)}$ と $R_s^{(2)}$ についても、式(66)ならびに式(67)の関係がある。一方、

$$N_s = \left[\begin{array}{cc|cc} N^{(1)} & y^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(2)} & y^{(2)} \end{array} \right], \quad \bar{u}_s = \begin{Bmatrix} \bar{u}^{(1)} \\ \bar{\theta}^{(1)} \\ \bar{u}^{(2)} \\ \bar{\theta}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (95)$$

とおけば、式(94)は次のように表すことができる。

$$\epsilon_n = \frac{1}{h} M_s R_s N_s \bar{u}_s = \frac{1}{h} B_s \bar{u}_s \quad (96)$$

また、単位面積当たりの表面力と単位長さ当たりの相対変位の間の関係についても、式(70)～式(72)の関係が成立しており、制御点 r に寄与する表面力についても式(73)の関係が成立しているため、剛体回転を考慮した変位場に対しても式(74)と同じ、以下の式が得られる。

$$\sum_{s=1}^N \left[\sum_{l=1}^2 (W_s^{(l)})^t \left(\int_{\Gamma_s^{(l)}} (R_s^{(l)})^t \bar{D}_n B_s \bar{u}_s d\Gamma + \int_{\Omega_s^{(l)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (97)$$

また、剛体回転を考慮した場合においても、式(75)～式(77)の関係が成立しているため、次式が得られる。

$$\sum_{s=1}^N \left[W_s^t \left\{ \sum_{l=1}^2 (M_s^{(l)})^t \left(\int_{\Gamma_s^{(l)}} (R_s^{(l)})^t \bar{D}_n B_s \bar{u}_s d\Gamma + \int_{\Omega_s^{(l)}} f d\Omega \right) \right\} \right] = 0 \quad (98)$$

ここで、式(67)、式(77)の関係をを用い、 $N^{(1)}$ 、 $N^{(2)}$ が単位行列となることを考慮すると式(98)は次のようになる。

$$\int_{\Gamma_s} \left[\begin{array}{cc|cc} N^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(2)} & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|cc} R_s^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s^{(1)} & 0 \end{array} \right]^t \left[\begin{array}{c} I \\ -I \end{array} \right] \bar{D}_n B_s d\Gamma \bar{u}_s + \bar{p}_s = 0 \quad (99)$$

$$\bar{p}_s = \left\{ \int_{\Omega_s^{(1)}} f d\Omega \mid \int_{\Omega_s^{(2)}} f d\Omega \right\}^t \quad (100)$$

しかし、式(99)で与えられる方程式には回転自由度が含まれているため、方程式数が不足して、実際には解くことができず、何らかの条件を追加する必要がある。剛体ばねモデルでは、 x 、 y 方向の力の釣り合いの他、表面力によるモーメントの釣り合いが考慮されており、ここでも、この関係を導入する。

境界辺上の表面力 X_n によって制御点 r に生ずるモーメントは次式で与えられる。

$$M^{(r)} = \int_{\Gamma_s^{(r)}} y^{(r)} X_n d\Gamma = \int_{\Gamma_s^{(r)}} (y^{(r)})^t (R_s^{(r)})^t \bar{D}_n B_s \bar{u}_s d\Gamma \quad (101)$$

ここで、式(67)関係を用い、積分の向きを考慮すると以下の関係が得られる。

$$\left\{ \frac{M^{(1)}}{M^{(2)}} \right\} = \int_{\Gamma_s} \left\{ \frac{y^{(1)}}{y^{(2)}} \right\} \left[\begin{array}{cc|cc} R_s^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s^{(1)} & 0 \end{array} \right]^t \left[\begin{array}{c} I \\ -I \end{array} \right] \bar{D}_n B_s \bar{u}_s d\Gamma \quad (102)$$

式(99)と式(102)を連立させると以下の関係が得られる。

$$\sum_{s=1}^N [\mathbf{W}_s^t (-\mathbf{k}_s \bar{\mathbf{u}}_s + \mathbf{p}_s)] = 0 \quad (103)$$

ただし、

$$\mathbf{k}_s = - \int_{\Gamma_s} [\mathbf{M}_s \mathbf{R}_s \mathbf{N}_s]^t \bar{\mathbf{D}}_n \mathbf{B}_s d\Gamma = - \int_{\Gamma_s} \mathbf{B}_s^t \bar{\mathbf{D}}_n \mathbf{B}_s d\Gamma \quad (104)$$

$$\mathbf{p}_s = \left\{ \int_{\Omega_s^{(1)}} f d\Omega \quad \mathbf{M}^{(1)} \mid \int_{\Omega_s^{(2)}} f d\Omega \quad \mathbf{M}^{(2)} \right\}^t \quad (105)$$

ここで、境界辺 s に関する制御点の変位 $\bar{\mathbf{u}}_s$ や、重み $\mathbf{W}_s$ は全ての制御点における変位を並べた 1 次元配列 $\mathbf{U}$ と重みを並べた 1 次元配列 $\bar{\mathbf{W}}$ により以下のように表すことができる。

$$\mathbf{W}_s = \mathbf{A}_s \bar{\mathbf{W}} \quad (106)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{U} \quad (107)$$

したがって、式(103)は次のようになる。

$$\bar{\mathbf{W}}^t \left[\sum_{s=1}^N (-\mathbf{A}_s^t \mathbf{k}_s \mathbf{A}_s \mathbf{U} + \mathbf{A}_s \mathbf{p}_s) \right] = 0 \quad (108)$$

式(108)において、重み $\bar{\mathbf{W}}$ は任意であることより、支配方程式が以下のように得られる。

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \bar{\mathbf{P}} \quad (109)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{s=1}^N \mathbf{A}_s^t \mathbf{k}_s \mathbf{A}_s \quad (110)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \sum_{s=1}^N \mathbf{A}_s \mathbf{p}_s \quad (111)$$

以上の展開により、剛体回転自由度を考慮した剛体ばねモデルの支配方程式が古典的有限体積法と同じ離散化された連立 1 次方程式とモーメントの釣り合いを連立させることにより得られることを示すことができた。式(110)によって与えられる左辺係数行列 $\bar{\mathbf{K}}$ は剛体ばねモデルの剛性行列と同一であり、各境界辺毎のその寄与 $\mathbf{k}_s$ を重ね合わせることで構築される点も同じである。

7. まとめ

本論では、有限体積法の定式化を統一的見地からまとめ、固体力学諸問題に有限体積法を適用するための方法を示した。有限体積法では、変位関数とは必ずしも一致しない一定な重み関数、すなわち非 Galerkin 重みを使用しており、この重みを一定仮想変位場と解釈すれば、有限要素法の特殊なケースであると考えられることを示した。

変位場として線形関数を仮定した有限体積法による定式化では、結果として得られる方程式は、2 次元平面問題の場合、定ひずみ要素を用いた有限要素法の解式と同一であり、有限体積法を有限要素要素解析アルゴリズムの範疇で取り扱うことのできる定式を示すことができた。

これにより有限要素プログラムがそのまま有限体積法のために用いることができるのみならず、有限体積法の観点からの新しい有限要素の開発を示唆することができた。

一方、変位場として剛体変位場を仮定すると、重み関数と変位関数が同一の関数となり、最も低次の近似関数を用いた離散化手法と考えることができる。しかし、支配方程式には、変位に関する導関数が含まれるため、何らかの近似を導入する必要がある。本論文では、隣接する 2 制御点間で中間値の定理によりこれを近似した[2]。このとき、剛体ばねモデルで用いられているばねの考え方を導入すると、最終的に剛体ばねモデルと全く同じ解式が得られること示した。

線形変位場の場合、有限体積法と有限要素法では同じ係数行列が得られるが、応力評価点の位置、すなわち積分点の位置が異なっているが、剛体変位場の場合は積分点も含めて全て剛体ばねモデルと同一の結果が得られる。

有限体積法の利点は、辺を基にしたデータ構造を扱うことにより、隣接した要素によって与えられる情報を、コントロールボリュームの境界辺に沿った境界積分を用いて要素行列やベクトルを計算することにある。これは、クラックの進展などの不連続な現象を扱う場合、節点で変位の連続性が要求される有限要素法より、容易に不連続現象の導入が可能であり、この種の問題に対する効果的な解析法の開発につながると思われる。

参考文献

- 1) P. Chow and M. Cross : An enthalpy control-volume-unstructured-mesh(CV-UM) algorithm for solidification by conduction only, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.35, pp1849-1870, 1992
- 2) E. Onate, M. Cervera and O.C. Zienkiewicz : A finite volume formulation for structural mechanics, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.37, pp181-201, 1994
- 3) Y.D. Fryer et al : A control volume procedure for solving the elastic stress-strain equations on an unstructured mesh, Appl. Math. Modelling, Vol.15, Nov./Dec., pp639-645, 1991
- 4) S.R. Idelsohn and E. Onate : Finite volumes and finite element: Two 'good friends', Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.37, pp3323-3341, 1994
- 5) C. Bailey and Cross : A finite volume procedure to solve elastic solid mechanics problems in three dimensions on an unstructured mesh, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.38, pp1757-1776, 1995
- 6) 武田洋, 竹内則雄, 佐藤一雄 : 有限体積法の固体力学への応用, 日本計算工学会計算工学講演論文集, Vol.2, No.2, pp403-406, 1997
- 7) T. Kawai : New element models in discrete structural analysis, J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.141, pp187-193, 1977

(1997年9月26日受付)