

構造物の 3 次元応力解析と自由振動解析への節点プリズム法の応用

APPLICATION OF FINITE NODE-PRISM METHOD TO THREE DIMENSIONAL STRESS AND FREE VIBRATION ANALYSIS OF STRUCTURES

林 正* ・ 渡辺 力**

Masa HAYASHI and Chikara WATANABE

*工博 長岡技術科学大学教授 工学部環境・建設系 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

**工修 函館工業高等専門学校講師 環境都市工学科 (〒042 函館市戸倉町 14-1)

Finite node-prism method has been proposed for the three dimensional stress and free vibration analysis of long thick-walled structures with cross beams and diaphragms. A node-prism element has nodal points as well as nodal lines of ordinary finite prism element, so that it is easily to connect the element with finite elements. As a result, the versatility and capability of the FPM are particularly enhanced. In this paper, the elements are formulated by coupling eight-node and twelve-node isoparametric shape function with polynomial series. The accuracy and convergency of the present elements is demonstrated by several examples, and the three dimensional stress and free vibration analysis of box-girder bridge with the cross beams and diaphragms is shown.

Key Word : *finite node-prism method, three dimensional stress analysis, free vibration analysis, dynamic condensation*

1. まえがき

ソリッド有限要素を用いた 3 次元応力解析や自由振動解析では、解析対象が少し大きくなると連立方程式や固有値問題の次元数が急激に増大して、計算可能な問題に制約が生じる。

それに対して、有限帯板法¹⁾を 3 次元問題に拡張された有限プリズム法 (FPM)²⁾では、変位関数を工夫した長大な要素を用いることができるので大型構造物の全体解析に適している。しかし、この解法では、節線方向の要素分割ができないので有限要素と結合する場合や中間支点を有する場合には解析が煩雑となり、その適用範囲は形状の単純な構造に限定されているようである。この解法を用いて、単純支持された箱桁橋の 3 次元応力解析も行われているが、横桁や隔壁を考慮しない簡単な計算モデルが用いられている³⁾。

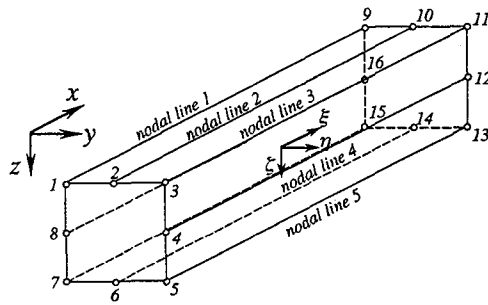
また、より高精度な解を得るために有限プリズム法を改良した解析法も提案されている。水澤・高木は、断面内の応力の精度を改善する目的で一方向に固有関数を仮定し、他の二方向に B-spline 関数を用いた Spline prism 法を開発し、厚板の 3 次元応力解析⁴⁾と自由振動解析⁵⁾を行っている。また、Cheung らは、二方向に固有関数を仮定し、厚さ方向に有限要素法の離散化の概念を適用した有限レイヤー法を開発し、長方形厚板の 3 次元応力解析と自由振動解析を行っている⁶⁾。しかし、これらの解法は、

厚板の解析を目的としたものであり、有限プリズム法を構造物の解析に適用した例は、有限帯板法に比べて極めて少ない。

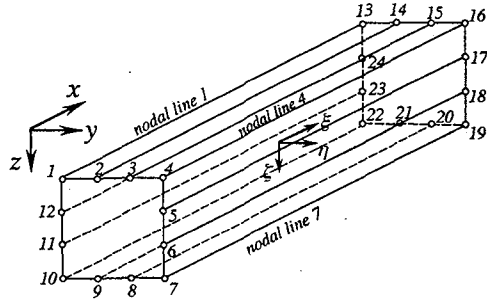
節点帯板法^{7),8)}を 3 次元問題に拡張した節点プリズム法 (NPM) を過去に提案している¹⁰⁾。この解法では、従来の有限プリズム要素の隅角点に節点自由度を付与したことにより、有限要素との結合や境界条件の処理を容易にし、有限プリズム法の適用範囲が大幅に拡張できる。しかし、この節点プリズム要素の一般化変位には、バブル節線 (内部節線) を用いていたので、ソリッド有限要素¹¹⁾を解析に組入れる場合には、有限要素との要素境界面で変位の適合条件が満たされず、有限要素との結合に問題が生じる。

本研究では、節点プリズム要素の応力の精度を改善し実用性を高める目的で、一般化変位にバブル節線の代わりに中間節線を採用し、この要素を用いて橋梁構造物などの 3 次元応力解析と自由振動解析を行うための全体解析法を開発する。構造物の 3 次元応力解析では、節点帯板法で用いたブロック要素の段階で節線自由度を消去するサブストラクチャー法⁹⁾を用い、自由振動解析では動的縮小法⁹⁾を用いて節線自由度の縮小を行う。

数値計算を行って、要素の精度と収束性、および全体解析法の効率性を検証し、本解析法を横桁と隔壁を有する箱桁橋の 3 次元応力解析と自由振動解析に用いた結果を報告する。



(a) 8-line element



(b) 12-line element

図-1 節点プリズム要素 (親要素)

2. 節点プリズム法

2.1 節点プリズム要素

3次元応力解析と自由振動解析に用いる節点プリズム要素として、図-1 (a) に示す 16 個の節点と 8 本の節線をもつ 8 節線要素と、図-1 (b) に示す 24 個の節点と 12 本の節線を有する 12 節線要素の 2 つの要素を用いる。これらの要素では、節線は相対する節点に結合されているものとし、これらの親要素の図心点に正規座標 (ξ, η, ζ) を定め、その変域を $[-1, 1]$ とする。

要素の自由度として、節点と節線の要素座標軸 (x, y, z) 方向の並進変位 u, v, w を用いる。これより、節点 n の一般化変位 d_n と、節線 i の第 m 項に関する一般化変位 d_{im} を次式で与える。

$$d_n = \{u_n \ v_n \ w_n\}^T \quad (1)$$

$$d_{im} = \{u_{im} \ v_{im} \ w_{im}\}^T \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

ここに、 $\{\}^T$ は転置記号である。

式(1),(2)を要素の全節点と全節線について集めたものを、それぞれ d_0, d_m とし、次式で表す。

$$d_0 = \{d_1^T, d_2^T, \dots, d_N^T\}^T \quad (N = 16 \text{ or } 24) \quad (3)$$

$$d_m = \{d_{1m}^T, d_{2m}^T, \dots, d_{Lm}^T\}^T \quad (L = 8 \text{ or } 12) \quad (4)$$

2.2 変位関数

任意点 (ξ, η, ζ) の変位成分は節点変位と節線変位の和によって次式で表される。

$$u = u_0 + u_i, \quad v = v_0 + v_i, \quad w = w_0 + w_i \quad (5)$$

ここに、添字 $(\)_0$ は節点の変位による成分、 $(\)_i$ は節線の変位による成分を表す。

まず、節点の変位関数を次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \sum f_{un}^T d_n \equiv \{f_{01}\}^T d_0, \quad v_0 = \sum f_{vn}^T d_n \equiv \{f_{02}\}^T d_0 \\ w_0 &= \sum f_{wn}^T d_n \equiv \{f_{03}\}^T d_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、 $\sum$ は節点 n に関する総和を表し、形状関数 f_{0i} は式(3)と同様に次のベクトルを全節点について集めたものである。

$$\left. \begin{aligned} f_{un} &= \{N_n, 0, 0\}^T, \quad f_{vn} = \{0, N_n, 0\}^T \\ f_{wn} &= \{0, 0, N_n\}^T \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)の形状関数 N_n は次式で与えられる。

$$N_n = f_0(\xi_0) f_n(\eta_0, \zeta_0) \quad (8)$$

$$f_0(\xi_0) = (1 + \xi_0) / 2 \quad (9)$$

ここに、 $f_n(\eta_0, \zeta_0)$ は 2 次と 3 次のセレンディピティの形状関数である。また、式中の ξ_0, η_0, ζ_0 は節点 n の座標値 (ξ_n, η_n, ζ_n) を用いて次式で定義される。

$$\xi_0 = \xi_n \xi, \quad \eta_0 = \eta_n \eta, \quad \zeta_0 = \zeta_n \zeta \quad (10)$$

次に、節線の変位関数を次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sum \sum X_m f_{ui}^T d_{im} \equiv \{f_{11}\}^T \sum X_m d_m \\ v_i &= \sum \sum X_m f_{vi}^T d_{im} \equiv \{f_{12}\}^T \sum X_m d_m \\ w_i &= \sum \sum X_m f_{wi}^T d_{im} \equiv \{f_{13}\}^T \sum X_m d_m \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに、二重和 $\sum \sum$ は、節線 i と級数項 m に関する総和を表し、形状関数 f_{1i} は式(4)と同様に次のベクトルを全節線について集めたものである。

$$\left. \begin{aligned} f_{ui}(\eta_0, \zeta_0) &= \{f_i(\eta_0, \zeta_0), 0, 0\}^T \\ f_{vi}(\eta_0, \zeta_0) &= \{0, f_i(\eta_0, \zeta_0), 0\}^T \\ f_{wi}(\eta_0, \zeta_0) &= \{0, 0, f_i(\eta_0, \zeta_0)\}^T \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

上式中の f_i には、要素に応じて式(8)の f_n と同じ式を用い、式(11)中の展開関数 X_m には文献(10)と同じ多項式の級数を用いる。

2.3 運動方程式

式(3),(4)の d_0, d_m を用いて、要素の自由振動における運動方程式が次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} k_{00} d_0 + m_{00} \ddot{d}_0 + \sum_n (k_{0n} d_n + m_{0n} \ddot{d}_n) &= 0 \\ k_{m0} d_0 + m_{m0} \ddot{d}_0 + \sum_n (k_{mn} d_n + m_{mn} \ddot{d}_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

($m = 1, 2, 3, \dots$)

ここに、 k_{00} などは文献(10)と同様の定式化で得られた節点プリズム要素の剛性行列で、質量マトリックス m_{00} などは次式で与えられる。

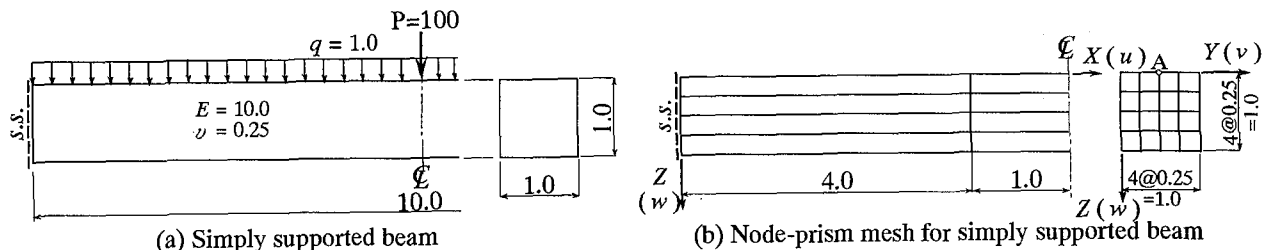


図-2 単純支持はり

表-1 等分布荷重を受ける単純支持はりの応力

Stress	Z	NPM										FPM ³⁾ 11terms	Exact ³⁾
		8-line element					12-line element						
		1 term	2 terms	3 terms	4 terms	5 terms	1 term	2 terms	3 terms	4 terms	5 terms		
σ_x	0.00	-75.256	-75.166	-75.254	-75.248	-75.246	-76.414	-75.267	-75.243	-75.241	-75.240	-75.277	-75.200
	0.25	-38.468	-37.418	-37.445	-37.449	-37.448	-38.911	-37.474	-37.434	-37.437	-37.437	-37.440	-37.413
	0.50	0.016	0.000	-0.002	-0.001	0.000	0.015	0.000	-0.002	-0.001	0.000	0.002	0.000
	0.75	38.485	37.426	37.441	37.442	37.443	38.932	56.366	37.438	37.438	37.438	37.444	37.413
	1.00	75.205	75.149	75.245	75.247	75.247	76.379	75.266	75.240	75.242	75.242	75.247	75.200
σ_z	0.00	-2.688	-1.174	-1.029	-1.036	-1.040	-4.465	-1.388	-0.972	-0.984	-0.991	-1.076	-1.000
	0.25	0.218	-0.748	-0.880	-0.877	-0.875	-0.500	-0.841	-0.839	-0.839	-0.840	-0.887	-0.844
	0.50	-0.508	-0.499	-0.500	-0.501	-0.500	-0.504	-0.500	-0.500	-0.501	-0.500	-0.503	-0.500
	0.75	-1.227	-0.264	-0.129	-0.128	-0.128	-0.495	0.118	-0.156	-0.157	-0.157	-0.128	-0.156
	1.00	1.767	0.207	0.045	0.045	0.044	3.560	0.443	0.005	0.003	0.003	-0.044	0.000

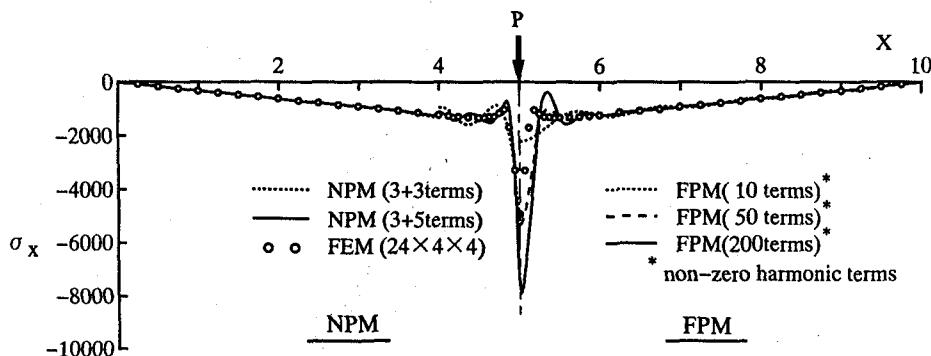


図-3 集中荷重を受ける単純支持はりの応力

$$\left. \begin{aligned} m_{00} &= \rho \int_V (f_{01} f_{01}^T + f_{02} f_{02}^T + f_{03} f_{03}^T) dV \\ m_{0n} &= \rho \int_V X_n (f_{01} f_{11}^T + f_{02} f_{12}^T + f_{03} f_{13}^T) dV \\ &= m_{n0}^T \\ m_{mn} &= \rho \int_V X_m X_n (f_{11} f_{11}^T + f_{12} f_{12}^T + f_{13} f_{13}^T) dV \end{aligned} \right\} (14)$$

ここに、 ρ は密度である。

2.4 全体解析法

構造物を構成する基本要素として、節点プリズム要素と有限要素を用いる。これらの要素を用いて全体解析を行うときには、次のようなサブストラクチャー法を用いる⁸⁾。

まず、構造物の3次元応力解析では、節点プリズム要素を用いてブロック要素を組立て、節線自由度をすべて消去したスーパー要素を作成する。このとき、スーパー要素の内部自由度をすべて消去し、このスーパー要素を組立て、隔壁や横桁の有限要素を組込んで全体構造が得

られる。

また、自由振動解析では、式(13)を用いてブロック要素の運動方程式を組立て、動的縮小法を用いて節線自由度を n_c 自由度に縮小する。これらを構造全体に組み上げ、最後に有限要素を組み込んで構造全体の固有値問題を作成する⁹⁾。固有値問題の解法には、サブスペース法を用いる。

3. 数値計算例による精度の検証

数値計算により、3次元応力解析と自由振動解析での解の収束性と精度、および全体解析法の効率性について検討する。なお、節点プリズム要素と有限要素との結合に関しては文献(13)で十分な検討を行っている。また、比較解に用いる有限要素には汎用構造解析システムNISA¹²⁾の20節点6面体要素を用いる。

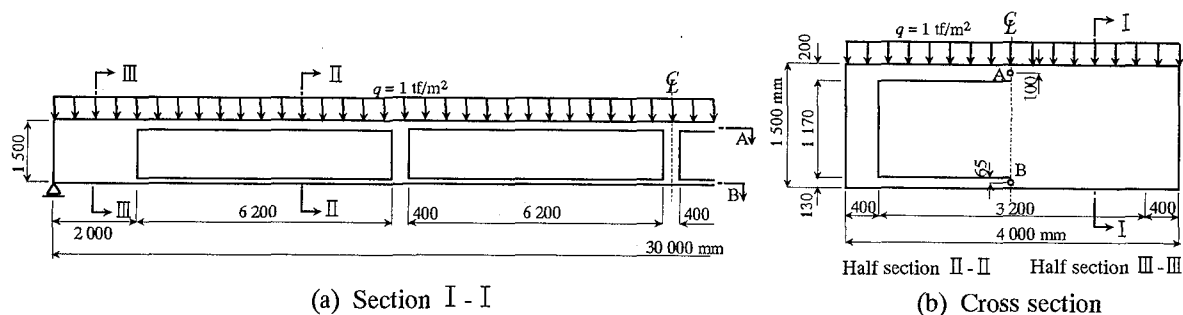


図-4 一室箱桁

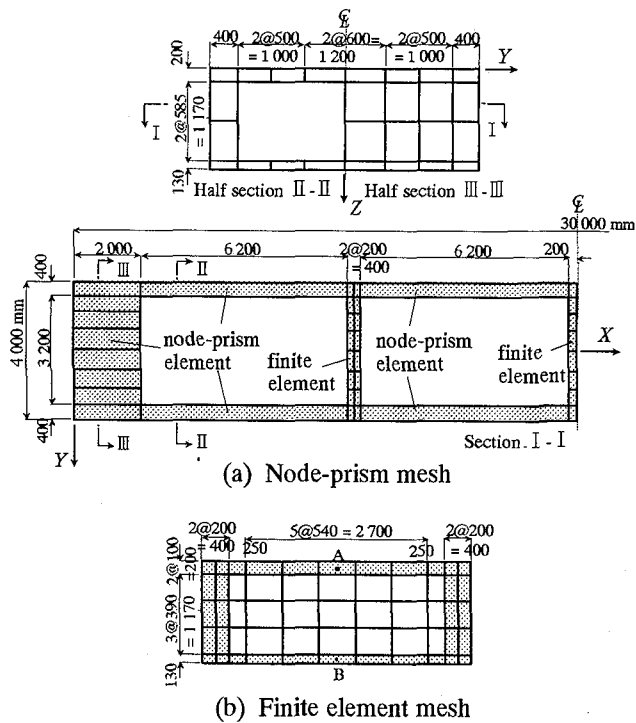


図-5 一室箱桁の要素分割

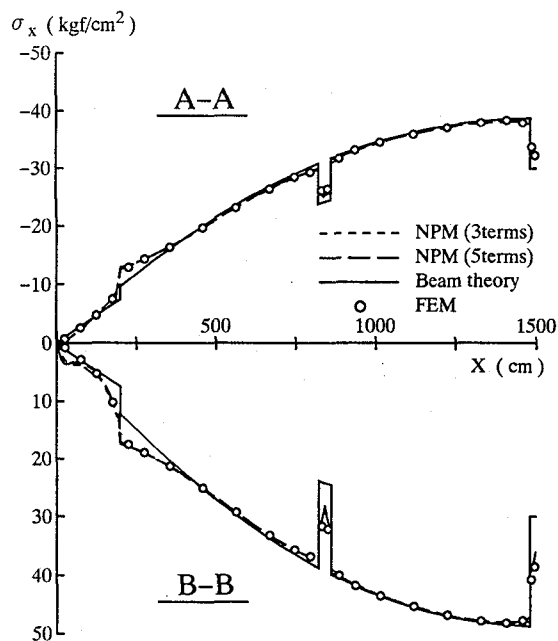


図-6 一室箱桁の応力

3.1 3次元応力解析

(1) 単純支持はり

図-2に示す等分布荷重 q および集中荷重 P が作用する単純支持はり（ヤング係数 $E=10.0$ ，ポアソン比 $\nu=0.25$ ）の応力解析を行って，有限プリズム法と本解法の解析精度と集中荷重に対する収束性を比較する．NPM の要素分割は，図-2(b)のように $1/2$ 領域を級数方向に2分割し，横断面内には 4×4 分割する．FPM³⁾では，横断面内の形状関数に8節線要素と同じ2次式を用いて，要素分割数も同じ 4×4 分割を用いる．なお，境界条件は，FPMと同じダイヤフラム形の単純支持とするために，支点上の変位 v, w と支間中央での変位 u を断面内にすべて固定している．

表-1には，等分布荷重を受ける場合の支間中央での高さ方向の垂直応力 σ_x, σ_z の分布を示す．NPMでは級数に1～5項と使い，FPMでは11項（非零項）を用いている．また，比較のために厳密解³⁾も示してある．

応力 σ_x は，級数に1項用いただけで厳密解に良く一致しており，その収束値は厳密解に対して0.1%以下の誤差

となっている．また，応力 σ_z の上面の値は，8節線要素で4%程度誤差となっているが，12節線要素では級数に5項用いると1%以下の誤差となっている．下面での値は，ほぼ0となっており応力の境界条件を満たしている．

図-3には，集中荷重が作用した場合のはりの上縁A線上の応力 σ_x を示す．図の左半分には8節線要素を用いたNPMによる計算値を，右半分にはFPMによる計算値を示している．比較のために， $1/2$ 領域を横断面内に 4×4 分割， X 軸方向に24分割したFEMの平均節点応力を○印で示してある．

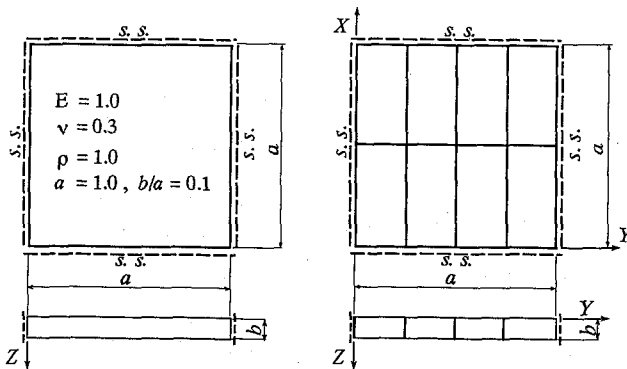
NPMでは，級数に3項用いただけで細分割したFEM解と良く一致しているが，載荷点側の要素で応力が振動している．そこで，載荷点側の要素の級数に5項用いると振動もおさまっている．それに対して，はりの中央で分割できないFPMでは，集中荷重作用点近傍での収束性が悪く，NPMと同程度の計算値を得るために200項（非零項）が必要であった．

以上より，NPMではFPMに比べ少ない級数項で良い値が得られており，集中荷重に対する収束性が極めて良

表-2 正方形厚板の固有振動数（厳密解に対する比）

ELEMENT	TERMS	Flexural Mode						In-plane Mode				
		I-A						I-S (thickness-twist)				II-S
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(3,2)	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(1,1)
8-LINE	1	1.027	1.086	1.038	1.055	*	*	1.004	1.048	1.006	1.084	1.001
	2	1.006	1.041	1.034	1.038	1.122	1.092	1.000	1.004	1.004	1.006	1.000
	3	1.006	1.008	1.034	1.023	1.023	1.028	1.000	1.000	1.004	1.004	1.000
	4	1.006	1.008	1.034	1.023	1.013	1.021	1.000	1.000	1.004	1.004	1.000
	5	1.006	1.008	1.034	1.023	1.012	1.021	1.000	1.000	1.004	1.004	1.000
12-LINE	1	1.021	1.076	1.006	1.032	*	*	1.004	1.048	1.001	1.080	1.001
	2	1.001	1.031	1.002	1.015	1.104	1.069	1.000	1.004	1.000	1.002	1.000
	3	1.001	1.000	1.002	1.002	1.011	1.008	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	4	1.001	1.000	1.002	1.002	1.001	1.002	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	5	1.001	1.000	1.002	1.002	1.000	1.002	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
EXACT ⁶⁾		1.000 (0.0919)	1.000 (0.2197)	1.000 (0.2197)	1.000 (0.3376)	1.000 (0.4117)	1.000 (0.5171)	1.000 (0.4385)	1.000 (0.6937)	1.000 (0.6937)	1.000 (0.8770)	1.000 (0.7401)

* These are deformed modes which are missed.



(a) Thick rectangular plate (b) Node-prism mesh
図-7 正方形厚板

いことがわかる。

(2) 横桁と隔壁を有する箱桁

全体解析法の適用性を検証するために、図-4 に示す満載等分布荷重 $q=1\text{tf/m}^2$ (9807Pa) を受ける支間 30m の単純支持一室箱桁（ヤング係数 $E=210000\text{ kgf/cm}^2$ (20.59GPa), ポアソン比 $\nu=0.2$) の応力解析を行う。解析モデルは、上スラブ厚 20cm, 下スラブ厚 13cm, ウェブ厚 40cm で、支点部に厚さ 2m の端横桁と 6.2m 間隔に厚さ 40cm の 3 枚の隔壁を有している。

要素分割は、桁の 1/2 領域を図-5(a)のように、X 軸方向に隔壁（横桁）と箱桁の結合する位置で行い、1つの横桁ブロックと 2つの箱桁ブロックに分ける。それぞれのブロックでは、級数方向に分割せずに図-5(a)のように横断面内に要素分割を行う。また、隔壁は有限要素（20 節点 6 面体要素）を用いてモデル化する。以上より、節点プリズム要素数 72, 有限要素数 72, 節点数 982 を用いている。

比較解として、横断面内に図-5(b)のように分割し、X 軸方向に 24 分割と細分割した有限要素解（要素数 984, 節点数 5912）とはり理論による解を用いる。上スラブの A 線上と下スラブの B 線上の応力 σ_x を図-6 に示す。

NPM では、級数に 3 項および 5 項を用いているが、3

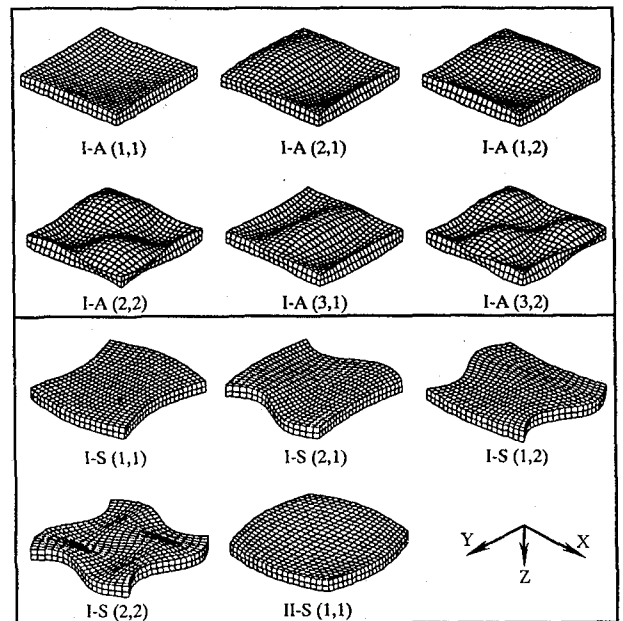


図-8 正方形厚板の振動波形

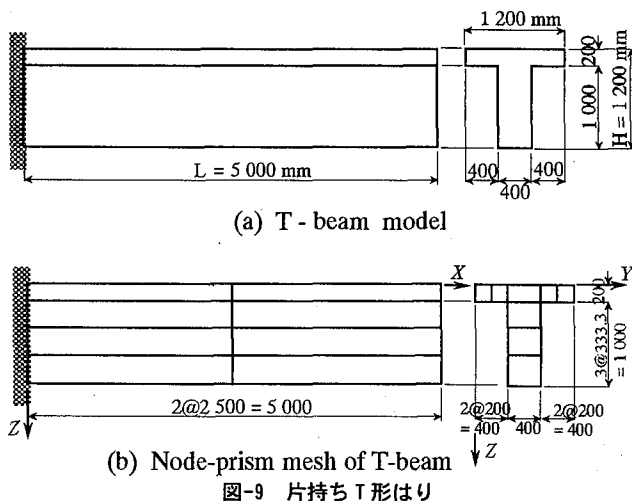
項用いると収束しており、全体挙動ははり理論と良く一致している。また、端横桁近傍では、はり理論による解より大きな値となっているが、細分割した FEM 解と良く一致している。

このことから、スーパー要素を用いた全体解析法に問題はなく、横桁や隔壁を有する構造に対して局所的な応力も精度良く求めることができる。なお、図に示した本解法の計算値には、応力の平滑化は行っていない。

3.2 自由振動解析

(1) 正方形厚板

節点プリズム要素の収束性と精度を調べるために、図-7(a)に示す単純支持された正方形厚板（ヤング係数 $E=1.0$, ポアソン比 $\nu=0.3$, 密度 $\rho=1.0$, $a=1.0$, $b/a=0.1$ ）を計算する。要素分割は、図-7(b)に示すように横断面（Y, Z）内



に 4×1 分割し、級数方向に 2 分割する。

表-2 には、級数に 1~5 項用いたときの固有振動数の計算値と厳密解⁶⁾との比を、振動波形毎に曲げ振動と面内振動とで分類して示してある。表中の(m, n)は、曲げ振動では X, Y 軸方向の半波長数を示し、面内振動では X 軸および Y 軸に沿った辺の半波長数を示している (図-8)。

級数に 3 項も用いるとほぼ収束しており、曲げ振動では、厳密解と比較して 8 節線要素で 3% 程度の誤差が生じているが、12 節線要素では 1% 以下の誤差となっている。面内振動では、どちらの要素も 1% 以下の誤差となっており、精度の良い解が得られている。

(2) 片持ち T 形はり

動的縮小法を用いた全体解析法の効率性を調べるために、図-9(a)に示す一端固定、多端自由の T 形断面はり (長さ L=5m, ヤング係数 E=210000 kgf/cm², ポアソン比 ν=0.2, 質量密度 ρ=2.55×10⁻⁶ kg·sec²/cm⁴) を高次モードまで計算する。比較解には、断面内にフランジを 8×2 分割、ウェブを 2×5 分割し、長手方向に 45 分割した FEM 解を用いる。

NPM の要素分割は、図-9(b)に示すように桁を 2 つのブロックに分割し、各ブロック内ではフランジに 12 節線要素を 5 要素、ウェブに 12 節線要素を 3 要素を用いる。これより、構造全体を 16 要素、204 節点でモデル化する。級数はすべてのブロックで 5 項を用いて、各ブロックの節線自由度 (68 節線×5 項×3 成分=1020 自由度) を n_c=0~30 自由度に縮小する。

表-3 は節線自由度の縮小を行わずに計算したときの 1~30 次までの固有振動数、および各ブロックの節線自由度を n_c 自由度に縮小したときの固有振動数の相対誤差 (節線自由度の縮小を行わない場合に対する) を示したものである。節線自由度の縮小を行わない場合には、細分割した FEM 解と良く一致しており、17, 19, 27 次モードで 2~3% 程度の誤差である他はすべてのモードで 0~1.5% 程度の誤差となっている。振動波形も 1~30 モードまです

表-3 T 形はりの固有振動数

Mode No.	FEM (HZ)	NPM (HZ)	(λ - λ) / λ × 100 (%)					
			n _c =0	n _c =1	n _c =5	n _c =10	n _c =20	n _c =30
1	14.27	14.29	0.00	-0.11	-0.14	-0.15	-0.15	-0.15
2	22.54	22.55	-0.18	-0.18	-0.42	-0.42	-0.43	-0.43
3	43.95	44.00	1.08	0.28	-0.26	-0.27	-0.29	-0.29
4	76.61	76.69	2.00	0.68	-0.06	-0.30	-0.32	-0.32
5	108.94	109.12	2.92	2.92	0.31	-0.36	-0.59	-0.61
6	137.65	137.79	6.70	3.06	0.43	-0.15	-0.20	-0.22
7	143.77	143.80	4.77	2.24	2.24	-0.17	-0.19	-0.21
8	176.36	176.61	40.89	5.27	0.33	0.13	0.08	0.06
9	237.64	238.59	52.15	23.58	1.49	0.13	-0.22	-0.26
10	250.10	250.60	51.82	44.86	1.47	0.25	0.09	0.03
11	286.46	286.91	37.60	32.07	2.35	1.14	-0.20	-0.24
12	304.61	309.87	43.50	27.21	1.00	0.68	-0.08	-0.11
13	330.31	335.57	44.46	21.87	3.39	0.45	0.17	-0.10
14	352.39	355.54	38.37	36.45	8.61	2.00	-0.03	-0.16
15	361.76	364.21	39.95	35.06	6.72	1.85	0.15	0.05
16	385.23	389.97	41.63	30.76	6.25	0.44	0.11	-0.05
17	394.88	405.29	56.97	54.65	7.82	1.59	0.01	-0.11
18	407.21	408.61	81.15	55.60	19.04	2.21	-0.07	-0.10
19	410.67	420.57	85.29	76.28	20.22	3.30	0.29	-0.12
20	430.04	430.65	97.81	80.96	20.42	1.51	1.33	-0.01
21	442.66	449.67	102.32	85.00	17.07	1.84	-0.06	-0.09
22	459.47	463.28	99.36	87.49	21.55	2.28	-0.17	-0.19
23	463.93	472.25	101.77	84.60	47.16	5.29	0.14	-0.10
24	476.35	480.03	98.67	90.22	51.31	5.88	-0.21	-0.27
25	522.10	529.22	87.04	75.54	42.22	7.06	-0.04	-0.50
26	526.01	533.84	89.59	78.79	52.53	8.86	1.06	-0.18
27	547.71	558.69	101.67	77.56	52.67	8.18	0.97	-0.37
28	572.33	579.37	102.88	85.32	48.89	5.22	-0.48	-0.78
29	607.28	609.61	96.00	78.07	45.93	3.78	0.02	-0.01
30	625.71	633.07	90.66	83.23	49.61	16.00	-0.30	-0.43
DOF	21561	2652	612	613	617	622	632	642

べて FEM と一致している。

また、節線自由度の縮小を行ったときには、表中の太枠内の振動波形が節線自由度を縮約せずに計算したときと一致しており、全節線自由度を消去した n_c=0 (Guyan の静的縮約) の場合には 5 次まで、n_c=5 とすると 13 次、n_c=10 では 22 次、n_c=20 では 30 次すべてのモードが一致している。また、n_c の数を 20 程度も探ると誤差はほぼ 1% 以下になっている。

なお、本計算例では、全自由度数は 1/4 以下に縮小されており、計算時間は節線自由度の縮約を行わないときに対して、n_c=0 のときに約 1/15、n_c=20 のときに約 1/5 に短縮されている。

図-10 にモード図を示す。1 次モードでは弱軸まわりの曲げ振動、2 次モードで強軸まわりの曲げ振動、3 次モードでねじり振動、7 次モードで縦振動が卓越している。その他のモードでは断面変形を伴った複雑な連成振動モードが多くなっている。

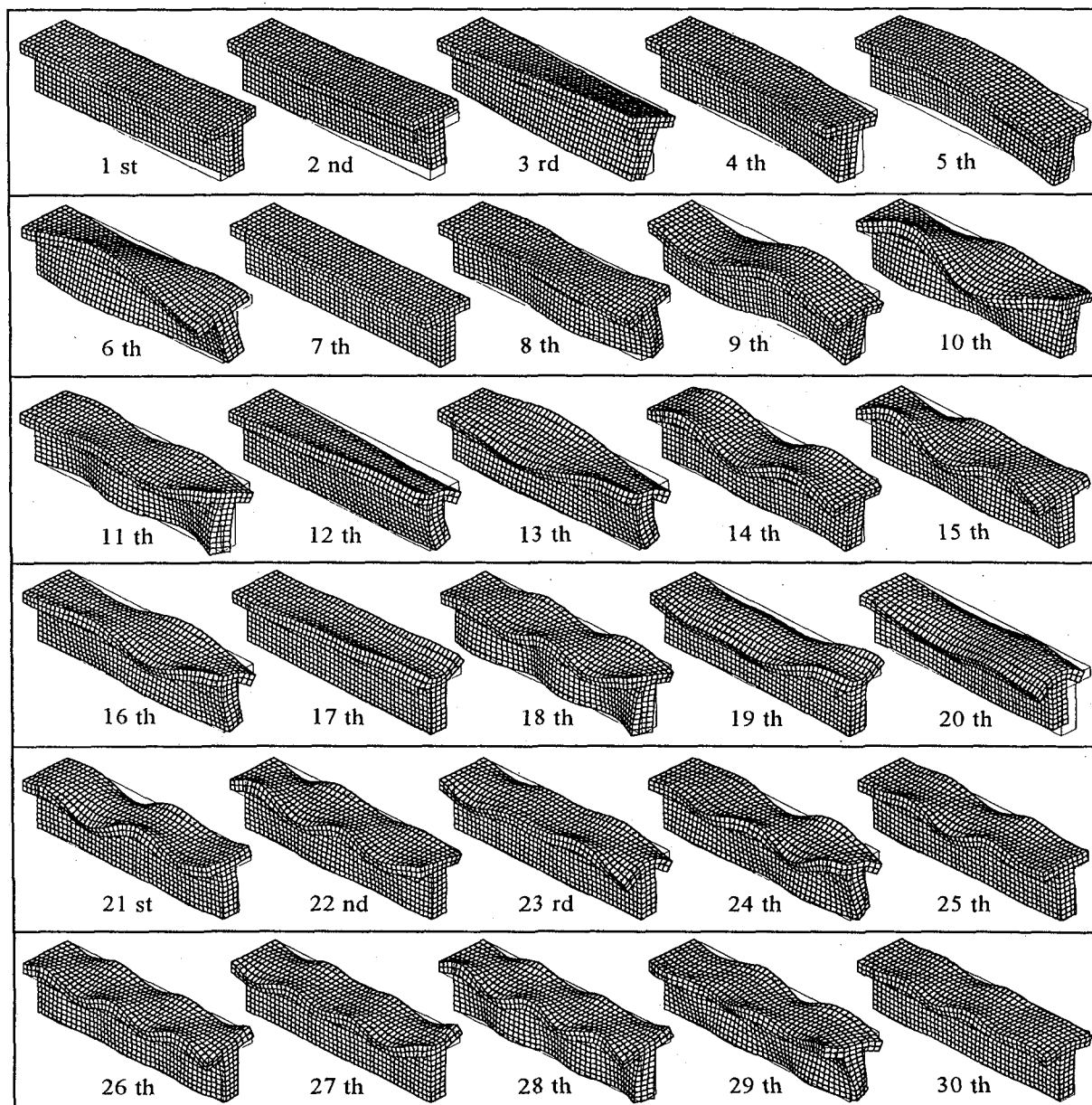


図-10 T形はりの振動波形

4. 横桁と隔壁を有する箱桁橋の解析

4.1 解析モデル

解析モデルは、図-11(a)に示す支間 40m の箱桁橋（ヤング係数 $E=210000\text{kgf/cm}^2$ ，ポアソン比 $\nu=0.2$ ，単位体積重量 $\gamma_c=2.5\text{t/m}^3$ ，質量密度 $\rho=2.55 \times 10^{-6}\text{kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}^4$ ）である。上スラブ厚 20cm，下スラブ厚 13cm，ウェブ厚 40cm で，端支点部に厚さ 3m の端横桁と 8.2m 間隔に厚さ 40cm の隔壁を 3 枚有している。

要素分割は， X 軸方向に隔壁（横桁）と箱桁の結合する位置で行い，橋全体を 2 つの端横桁ブロックと 4 つの箱桁ブロック，3 つの隔壁ブロックに分割する。各ブロック内では，8 節線要素を用いて X 軸方向に分割せずに図-11(d)のような要素分割を用い，級数には，端横桁ブロッ

クと箱桁ブロックに 5 項，隔壁ブロックに 3 項を採用している。また，境界条件は下スラブのみを線支持とし，橋軸方向変位 u は $X=0$ の下フランジを，橋軸直角方向変位 v は $X=0$ と $X=40\text{m}$ の下フランジ中央点 2 点を固定する。以上より，節点プリズム要素数 312，節点数 1610 を用いている。

3 次元応力解析では，荷重として等分布荷重 $q=350\text{kgf/m}^2$ (3432Pa) を幅員に満載させ，自重を物体力として作用させる。自由振動解析では，各ブロックの節線自由度を $n_c=20$ に縮小する。

4.2 解析結果

図-12 には，上スラブ上縁の $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ の応力分布図と A-A 断面 ($X=2000\text{cm}$)，B-B 断面 ($X=1570\text{cm}$)，C-C 断面 ($X=710\text{cm}$)，D-D 断面 ($X=150\text{cm}$) での $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{zx}$ の

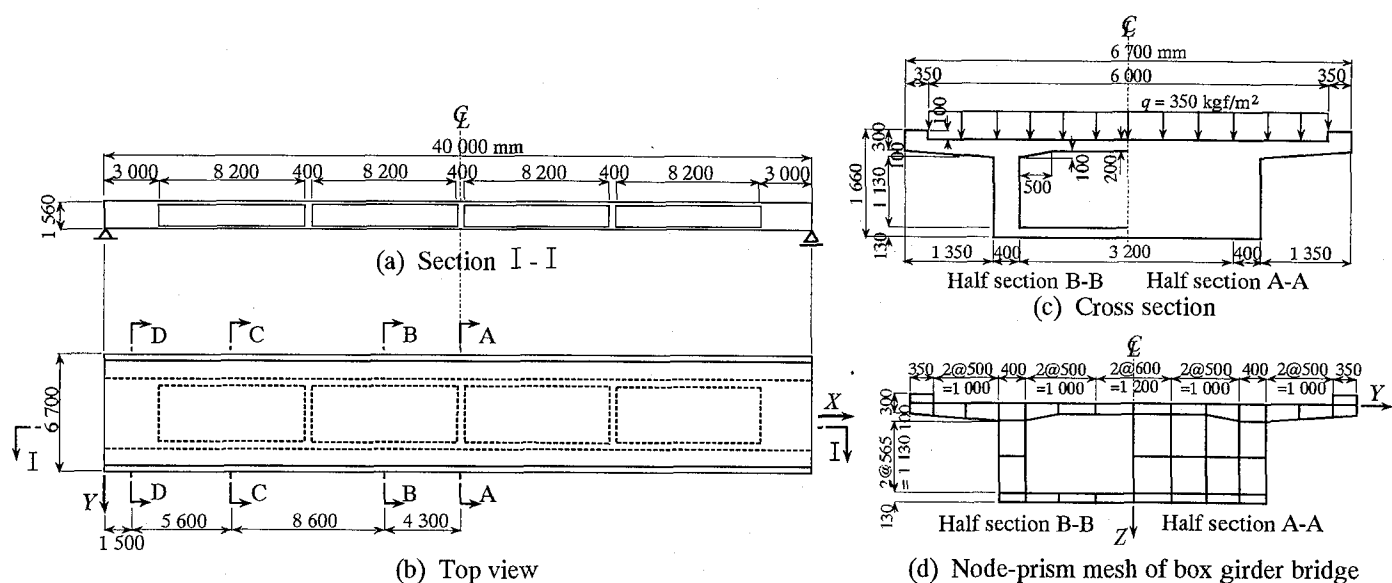


図-11 横桁と隔壁を有する箱桁橋

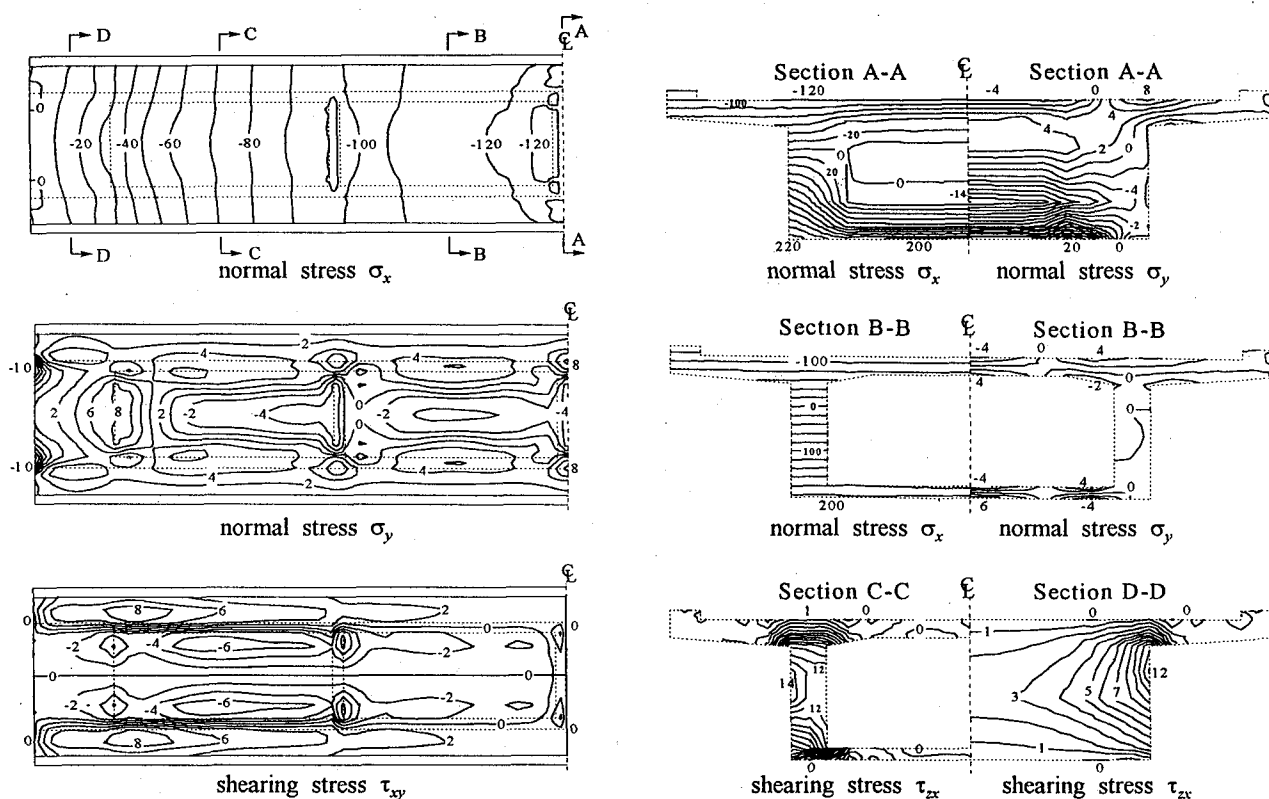


図-12 横桁と隔壁を有する箱桁橋の応力分布図 (単位 kgf/cm²)

応力分布図を示す。

上スラブ上縁の応力 σ_x の分布図は横桁および隔壁上で大きく乱れており、箱桁 (B-B) 断面では高さ方向に一樣に分布している。それに対して、中間隔壁 (A-A) 断面では高さ方向に大きく乱れていることがわかる。応力 σ_y と τ_{xy} , τ_{zx} の複雑な応力分布も良く表している。

図-13 には、10 次までの固有振動数と構造全体および B-B 断面の振動波形を示す。1 次モードでは弱軸まわりの曲げ振動、2 次モードで強軸まわりの曲げ振動が卓越して

おり、その他のモードでは複雑な連成波形が多くなっている。

以上のように、横桁や隔壁をもった構造に対しても効率良く 3 次元応力解析と自由振動解析を行うことができる。

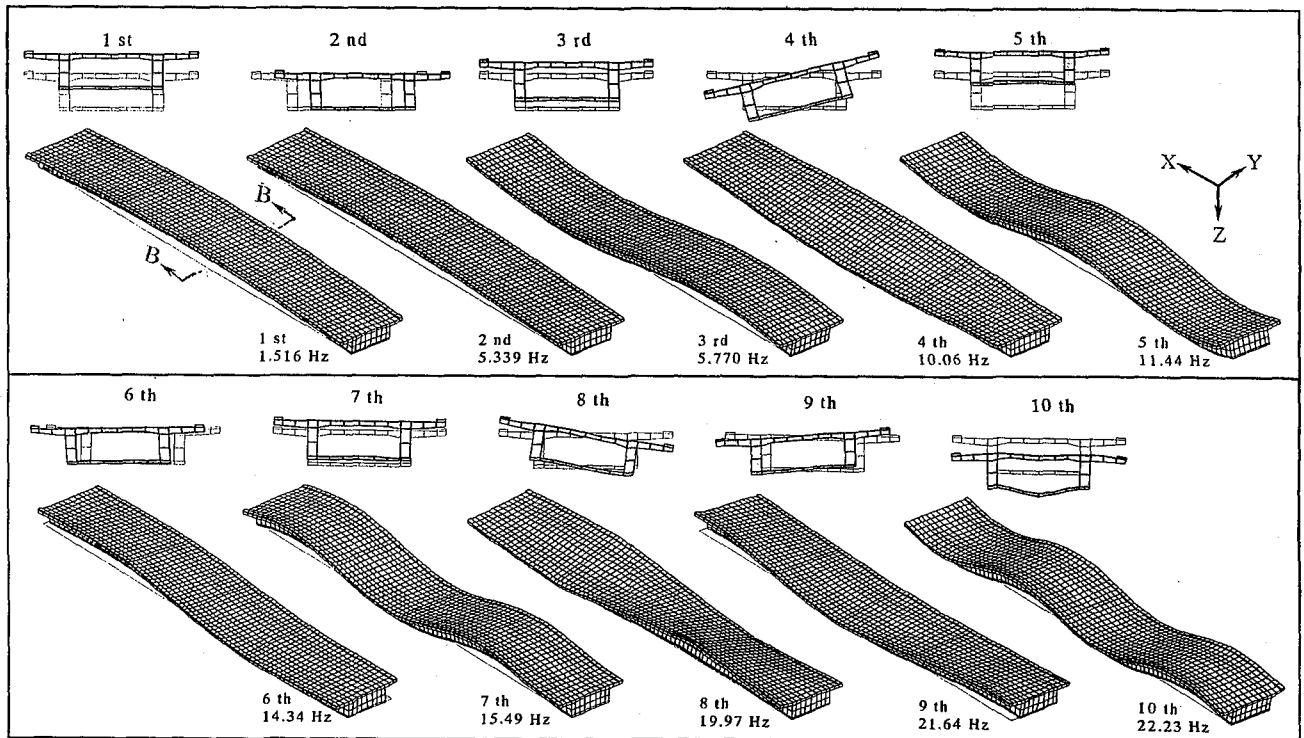


図-13 横桁と隔壁を有する箱桁橋の固有振動数と振動波形

5. 結 論

構造物の3次元応力解析と自由振動解析において、一般化変位にバブル節線を用いずに中間節線を用いた節点プリズム要素による全体解析法を種々の数値計算例により検証した結果より次のようなことがいえる。

- 1) 3次元応力解析と自由振動解析において、中間節線を用いた節点プリズム要素では、解の収束性が良く、級数に3項程度用いただけで、精度の良い収束値を得ることができる。
- 2) 3次元応力解析において、有限プリズム法に比べ、少ない級数項で収束値を得ることができ、集中荷重に対する収束性が極めて良い。さらに、有限要素との結合や境界条件の処理が容易であり、有限プリズム法の適用範囲を大幅に拡張できる。
- 3) 動的縮小法を用いた節点プリズム法によって、大型構造物の自由振動解析を高精度に、効率良く計算できる。
- 4) 本解法では、従来のプリズム法と同様に長大要素を用いて解析ができるので、有限要素法に比べ計算効率が良い。

参考文献

- 1) Cheung, Y.K. : *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, 1976.
- 2) 前掲 1), pp.173-198.
- 3) Zienkiewicz, O.C. and Too, J.J.M. : The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes, *Proc. Instit. Civil Eng.*, Vol.53, pp.147-172, 1972.
- 4) 水澤富作・高木信治 : Spline Prism 法を用いた長方形厚板の三次元曲げ解析について, 土木学会論文集, NO.489/I-27, pp.101-110, 1994.
- 5) 水澤富作・高木信治 : Spline Prism 法を用いた長方形厚板の振動解析について, 構造工学論文集, Vol.39A, pp.1-12, 1993.
- 6) Cheung, Y.K. and Chakrabarti, S. : Free vibration of thick, layered rectangular plates by a finite layer method, *J. sound vib.*, Vol.21, pp.277-284, 1972.
- 7) 林 正・坂口隆紀 : Mindlin 節点帯板要素による厚板と薄板の曲げ解析, 土木学会論文集, No.459/I-22, pp.93-101, 1993.
- 8) 林 正・渡辺 力 : 節点帯板法による薄肉構造物の立体解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.435-442, 1995.
- 9) 林 正・渡辺 力 : 節点帯板法による薄肉構造物の自由振動解析, 土木学会論文集, NO.549/I-37, pp.141-148, 1996.
- 10) 林 正・小林亨市 : 節点プリズム法による3次元応力解析, 土木学会論文集, NO.450/I-20, pp.95-101, 1992.
- 11) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (矢川元基訳) : マトリックス有限要素法 I, 改訂新版, 科学技術出版社, pp.132-138, 1996.
- 12) NISA II ユーザーズ・マニュアル version 93.0 :

Engineering Mechanics Research Corporation, 1994.

演会講演概要集, 第1部(A), pp.210-211, 1996.

- 13) 渡辺 力・林 正 : 8節線を有する節点プリズム要素
による3次元応力解析, 土木学会第51回年次学術講

(1997. 9. 26 受付)