

大型平板要素を用いた薄肉平板構造の弾塑性解析法に関する基礎的研究

A STUDY OF A ELASTO-PLASTIC ANALYSIS FOR THIN PLATE STRUCTURE
USING LARGE-SIZE PLATE ELEMENTS

岡村宏一 *, 島田 功 **, 竹村洋之 ***, 寺園めぐみ ***

Hirokazu OKAMURA, Isao SHIMADA, Hiroyuki TAKEMURA and Megumi TERAZONO

* 工博 大阪工業大学教授 工学部土木工学科 (〒 535 大阪市旭区大宮 5-16-1)

** 工博 東洋技研コンサルタント(株) 技術本部 (〒 532 大阪市淀川区新北野 1-14-11)

*** 国際航業(株) 関西事業本部 (〒 660 兵庫県尼崎市西長洲町 1-1-15)

This paper proposes a method of high precision elasto-plastic analysis for plate structures using large-size plate elements. The nonlinear stiffness matrices of each large-size plate element are derived by the combination of analytical method in a single trigonometric series and numerical method (point-matching method). In addition, a relaxation technique is also used for jointing the plate elements in longitudinal direction. If such a method is adopted, number of freedoms needed for numerical analysis can be drastically reduced. The accuracy of the results obtained in the numerical calculation confirms the usefulness of the method proposed herein.

Key Words : thin plate structure, elasto-plastic analysis, large-size plate element, relaxation method

1. まえがき

本文で提示する大形平板要素とは、平板構造の解析において、1パネルにわたるような非分割の要素を意味する。大規模な平板構造を解析する場合、このような要素を用いれば解の自由度やインプットデータ作成時の労力を大幅に低減することができる。近年、有限要素法においても、非分割の要素が研究されている[1]。

筆者はすでに、このような、曲げ、あるいは面内力を受ける、大形かつ高精度の四辺形弾性平板要素の剛性マトリックスを提案した[2,3]。また、剛性法によってこれらを接続する多格間平板構造の解析に、全体座標系は不必要で、部材座標系のみに依存するリラクゼーション法を用い、全体ならびに局所の挙動を同時に解析する方法を示した[3,4]。また、筆者の1人は、かつて応力法を用いて単一板、あるいは補剛板の弾塑性解析を行った[5]。本研究は、この手法を上述の弾性板の手法と組み合わせて再構成し、幾何学的非線形や弾塑性の問題の解析に発展させたものである。

一般に、薄板は、荷重によるたわみの増大に伴って、線形弾性状態から、膜作用を誘発する幾何学的非線形弾性状態(膜作用を伴う現象)になり、さらに、弾塑性状態に移行する。また、分岐現象がなければ最後は塑性膜に至る。このような力学的条件を支配するつりあい、および適合条件式は連立非線形偏微分方程式である。また、降伏条件も非線形である。これらの基礎式から出発する

場合、問題点の一つは、その線形化の方法である。しかしながら、幾何学的かつ材料非線形の問題であっても、その解には線形部分と非線形部分が内在し、それらの組み合わせによって問題の解が構成されているといえる。したがって、非線形問題の解の精度を上げるためには、線形解である弾性解の精度をあげるのも有効な方法の一つと考えられる。よって、本論文で提案する方法は次の2点に特徴を持っている。(1)弾性解は級数解で与え、その収束解を基本解としている。(2)支配方程式の非線形部分を荷重項に置換し、基本解である弾性解の重ね合わせによって、非線形解をつくり出す。弾性解については、本解法が精度および計算効率に優れていることは既往の研究で確認しているので、本論文では、非線形部分の状態量を離散的に取り扱うことによる解の精度と計算効率に大きな関心を寄せている。

具体的に、本解法では、幾何学的非線形に伴う膜作用の領域に採った比較的小さい領域では、基礎式中の有限変形に伴う物理量は、平均化されてよいものとみなして、この式を線形化した。また、塑性化した領域にも、その影響値に対して同様の手法を適用した。したがって、本解法は、解の非線形部分には、有限小領域での平均化による誤差を含むが、精密に解析できる線形部分を含めて、構造のほとんどの部分で連続解を与える精度の高い解が期待できる。したがって、局所的な荷重による一部のパネルの塑性化が問題になる板構造を解析する場合は、変

形の微小な弾性領域にあるパネルの内点には選点を設ける必要がなく、それらの数は最小限に抑えられる。さらに、リラクセーション法の併用によって、インプットデータを構成する困難さを大幅に軽減することができる。

本研究では、比較的簡単な応用例において、本解法の精度、および収束性に関する照査を行った。

2. 大形平板要素の剛性方程式

2.1 基本解

図-1に示す、相対2辺が単純支持された一方向無限板に集中力(面外力: $P, M, \overline{M}$ 、面内力: S, T)が作用するときの解は次のような指数関数を含む単級数で表される[2]。

$$w = \sum_n w_n (P, M, \overline{M}) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x$$

$$\phi = \sum_n \phi_n (S, T) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 w はたわみ、 ϕ は応力関数で、 $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$ である。

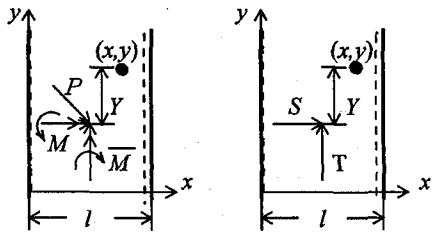


図-1 集中力を受ける一方向板

モーメント(M)、換算せん断力(V)、および面内力(N)は、 w, ϕ によって次のように表される。

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$V_x = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}$$

$$V_y = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}$$

$$R = 2M_{xy}$$

$$N_x = h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad N_y = h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 D は板剛度 $\{ = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \}$ 、 E はヤング率、

ν はポアソン比、 h は板厚、 R は隅角点拘束力である。

次に、剛性方程式を誘導する基本解は、図-2(a)~(c)に示すような一定の荷重強度をもつ分布荷重で与えるが、それらは、式(1)を分布幅に関して解析的に積分して作成する。なお、図-2(c)の基本解は、荷重項、および後述の非線形項を処理するためのものである。

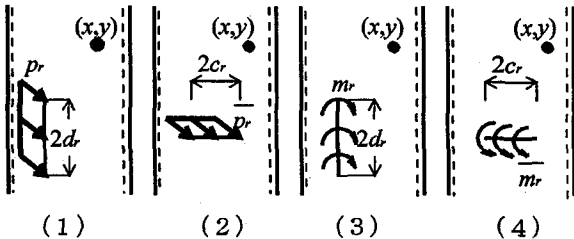


図-2 (a) 面外作用力に対する基本解

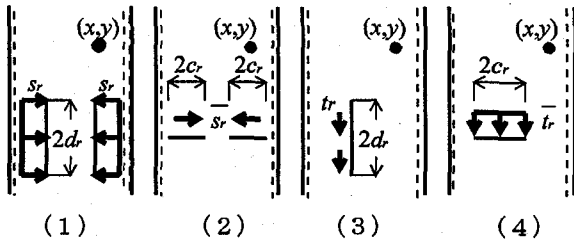


図-2 (b) 面内作用力に対する基本解

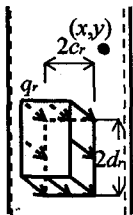


図-2 (c) 分布力に対する基本解

2.2 剛性方程式

図-3に示すような辺長 a, b の領域を有する大形の板要素の剛性方程式を作成する。4辺(i, j, k, l)に図-2(a)~(c)に示した基本解を適用して、任意の外力(仮想力)の分布を与え、隅角点を含めて任意の変形を生じさせる力系を組み立てる。

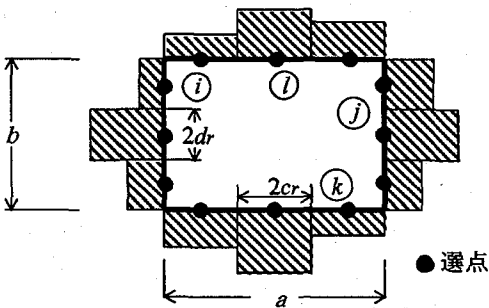


図-3 剛性方程式を求めるための仮想力

このような力系は、図-4(a),(b)に示すような外力系の重ねあわせによって与える。

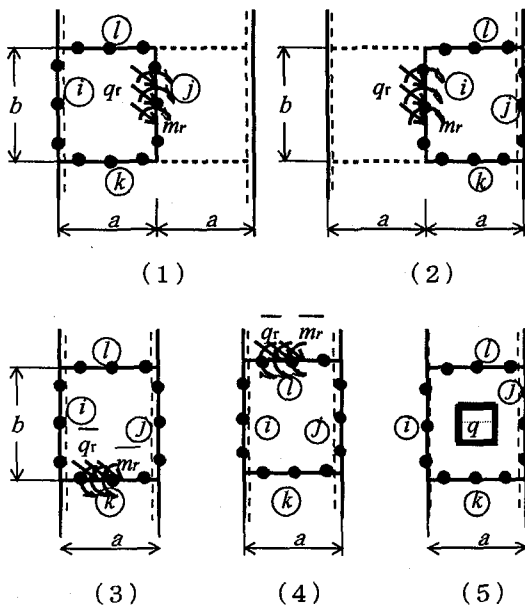


図-4(a) 曲げ作用の剛性方程式を求めるための基本解の適用

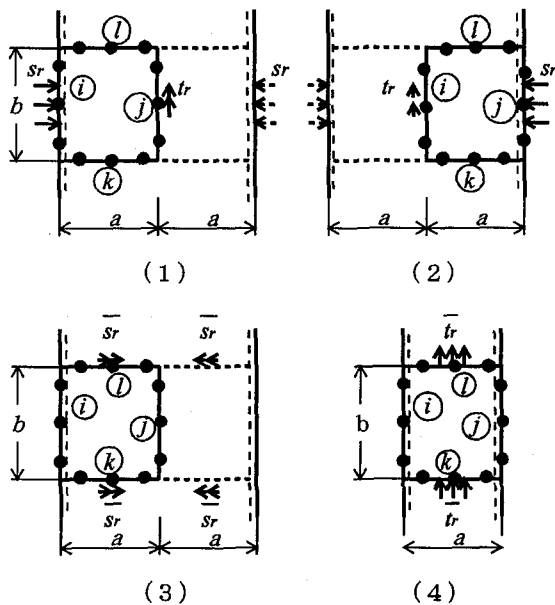


図-4(b) 面内力作用の剛性方程式を求めるための基本解の適用

このような操作によって、4辺 (i, j, k, l) を持つ大型要素の選点 (分割された区間の重心点) に対して、材端力と材端変位に関する次の関係式を得る。

$$\{f_b\} = [A]\{p_b\}$$

$$\{\delta_b\} = [B]\{p_b\} \quad (3)$$

ここに、 $\{f_b\}$ は材端力 (M, V, N, etc.)、 $\{\delta_b\}$ は材端変位 (θ , w, u, v, etc.) のベクトルである。 $\{p_b\}$

は、大型要素の4辺に対応する位置に作用させた、外力 (仮想力) (m , p , s , t , etc.) のベクトルで、 $[A]$ 、 $[B]$ は、基本解より得られる仮想力に対する影響係数のマトリックス (正方行列) である。

剛性方程式は、式(3)より、仮想力のベクトル $\{p_b\}$ を消去して、次のように得られる。

$$\begin{aligned} \{f_b\} &= [A][B]^{-1} \{\delta_b\} \\ &= [K_b] \{\delta_b\} \quad (4) \end{aligned}$$

ここに、 $[K_b] = [A][B]^{-1}$ は、大型要素の剛性マトリックスである。

一方、板内荷重に対する荷重項 $\{f_f\}$ は、図-4(a) (5) の外力系を適用し、大型要素の4辺に対応する選点位置での変位を、式(4)を用いて消去して、次のように得られる。

$$\{f_f\} = \{f_q\} - [K_b] \{\delta_q\} \quad (5)$$

ここに、 $\{f_q\}$ 、 $\{\delta_q\}$ は、板内荷重 q による、4辺に対応する選点位置の断面力、および変位のベクトルである。

なお、板の曲げにたいしては、境界条件に Kirchhoff の仮定を導入しているため、図-3に示す板要素の隅点には、ねじりモーメントに起因する拘束力 R が残る。そこで、隅点には小さな分布幅をもつ分布力を与え、この拘束力を調整する操作を行う。

4. 3 大型要素内の変位と断面力

解析結果として得られた各要素周辺 (節線) の選点における材端変位より、要素内の変位と断面力を求める。

図-3において、選点における材端変位 $\{\delta_b\}$ より仮想力の分布 $\{p_b\}$ が次のように得られる。

$$\{p_b\} = [B]^{-1} \{\delta_b\} \quad (6)$$

仮想力の分布 $\{p_b\}$ は、図-4(a), (b) に示す外力系でのものであり、この外力系のもとで、対応する要素内点の断面力、変位と仮想力の関係が次のようにえられる。

$$\{F_N\} = [A_N] \{p_b\}$$

$$\{\delta_N\} = [B_N] \{p_b\} \quad (7)$$

ここに、 $[A_N]$ 、 $[B_N]$ は、図-4(a), (b) の外力系と要素内点の断面力、変位の関係を表す影響マトリックスである。

一方、要素に部分分布荷重が作用する場合の荷重項 $\{F_{Nf}\}$ 、 $\{\delta_{Nf}\}$ は、図-4(a) (5) の力系と、要素周辺の変位を消去する仮想力系を重ねることにより、次のように得られる。

$$\{F_{Nf}\} = \{F_{Nq}\} + [A_N] \{p_{bf}\}$$

$$\{\delta_{Nf}\} = \{\delta_{Nq}\} + [B_N] \{p_{bf}\} \quad (8)$$

ここに、 $\{F N q\}$ 、 $\{\delta N q\}$ は、板内荷重 q による図4(a)(5)の力系における断面力と変位のベクトルで、 $\{p b f\}$ は式(5)の一 $[K b]$ $\{\delta q\}$ で与えられる要素周辺の変位を消去する仮想力のベクトルである。このようにして求めた周辺固定板における板内点の値を式(7)による値に付加する。

3. 幾何学的非線形をともなう弾塑性問題の解式

3. 1 基本的仮定

- (1) 材料は弾完全塑性体とする。
- (2) 応力とひずみの関係は、関連流動則に支配されるものとする。
- (3) 平面保持の仮定を容認し、薄板断面内は同時に塑性化するものとする。
- (4) 塑性化した断面の降伏曲面として、面内および面外の近似相関曲面を採用する。

3. 2 板の基礎式

幾何学的非線形を考慮した、板のつりあい、ならびに適合条件式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\ & = -q - (N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) \\ & \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2} \\ & = (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

内部エネルギーの逸散関数 Θ を次式で表す。

$$\begin{aligned} \Theta = & N_P (m_x \dot{\kappa}_x' + m_y \dot{\kappa}_y' + m_{xy} \dot{\kappa}_{xy}') \\ & + n_x \dot{\epsilon}_x' + n_y \dot{\epsilon}_y' + n_{xy} \dot{\gamma}_{xy}') \dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに、 $m_x = M_x / M_P$ 、 $m_y = M_y / M_P$ 、

$$m_{xy} = M_{xy} / M_P, \quad n_x = N_x / N_P,$$

$$n_y = N_y / N_P, \quad n_{xy} = N_{xy} / N_P,$$

$$\dot{\kappa}_x' = -\frac{h}{4} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}, \quad \dot{\kappa}_y' = -\frac{h}{4} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2},$$

$$\dot{\kappa}_{xy}' = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y}$$

$$M_P = \sigma_P h^2 / 4, \quad N_P = \sigma_P h,$$

σ_P は降伏応力である。

いま、降伏曲面が、

$$f(m, n) = 1 \dots\dots\dots (11)$$

で定義されるならば、塑性変形による中央面のひずみ成分 ($\dot{\epsilon}_x'$, $\dot{\epsilon}_y'$, $\dot{\gamma}_{xy}'$) ならびに曲率成分 ($\dot{\kappa}_x'$, $\dot{\kappa}_y'$,

$\dot{\kappa}_{xy}'$) は、塑性流れの法則から次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x' &= \mu \frac{\partial f}{\partial n_x}, \quad \dot{\epsilon}_y' = \mu \frac{\partial f}{\partial n_y}, \quad \dot{\gamma}_{xy}' = \mu \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} \\ \dot{\kappa}_x' &= \mu \frac{\partial f}{\partial m_x}, \quad \dot{\kappa}_y' = \mu \frac{\partial f}{\partial m_y}, \quad \dot{\kappa}_{xy}' = \mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} \\ &\dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

式中、 f は式(11)の塑性ポテンシャル、 μ は塑性変形中変化するスカラー量(塑性流れ係数)である。また、 $\dot{}$ は時間微分を、 $'$ は塑性成分を表す。

したがって、全体のひずみ、およびモーメントの速度は、弾性成分、ならびに式(12)の塑性成分から、次式となる。

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{1}{E h} (\dot{N}_x - \nu \dot{N}_y) + \mu \frac{\partial f}{\partial n_x}$$

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{1}{E h} (\dot{N}_y - \nu \dot{N}_x) + \mu \frac{\partial f}{\partial n_y}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E h} \dot{N}_{xy} + \mu \frac{\partial f}{\partial n_{xy}}$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_x = & -D \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{4D}{h} \mu \left(\frac{\partial f}{\partial m_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_y = & -D \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right) \\ & - \frac{4D}{h} \mu \left(\frac{\partial f}{\partial m_y} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{xy} = & -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} - \frac{2D(1-\nu)}{h} \mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} \\ & \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

式(13)を時刻0から t まで時間積分し、式(9)に代入すると、次の基礎式が得られる。

$$\begin{aligned} D \Delta \Delta w = & q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ & - \frac{4D}{h} \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \mu \left(\frac{\partial f}{\partial m_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_y} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \mu \left(\frac{\partial f}{\partial m_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial m_y} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial m_{xy}} \right) \right] dt \\ \Delta \Delta \phi = & E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\ & - E \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial n_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial n_x} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} \right) \right\} dt \\ & \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

水平変位は、有限変位理論によると、

$$u = \int \left\{ \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) + \int_0^t \mu \frac{\partial f}{\partial n_x} dt - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx$$

$$v = \int \left\{ \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) + \int_0^t \mu \frac{\partial f}{\partial n_y} dt - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dy \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。

4. 計算の方法

4. 1 大形平板要素を接続するリラクセーション法

はりや骨組みのリラクセーション法による解析は、コンピュータ以前の時代から知られているが[6]、計算機が高速化して反復計算が容易になった現在でも、平板構造の解析に用いられた例は、あまり見あたらないようである。平板構造に対するリラクセーション法は、まず、図-5 (a) に示すように荷重が載荷されている大形要素に対して荷重項 (要素の周辺が固定された場合の解) を計算する。その状態では、要素の節線で材端力間に不平衡力を生ずる。そこで、着目する節線を持つ要素間で隣接する節線を固定した状態の剛性方程式を作成し、節線上の不平衡力を消去する連立方程式 (自由度: 節線の選点数×4) を解き、節線の変位を求める (図-5 (b) 参照)。着目する節線の不平衡力を修正するため、隣接する固定辺には材端力が分配される。

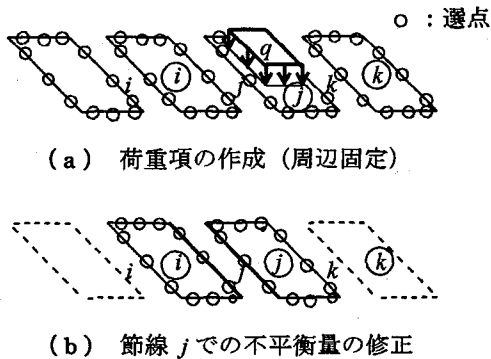


図-5 リラクセーション法

この操作を順次各節線に適用し、不平衡力がなくなるまで反復計算を行う。したがって、このリラクセーション法では、着目節線に採った選点の変位のみが未知量となり、全体を直接剛性法で結合する場合と異なり、連立方程式の元数を著しく減少することができる。反復計算では、解の収束性が課題となるが、弾性問題では、要素数のいかにかわらず、数回の反復で有効数字3桁の収束値が得られている[3,4]。

4. 2 幾何学的非線形をともなう弾塑性の逐次計算

式(14)のように、非線形項を基礎式の右辺にまとめると、応力関数 ϕ であらわした面内力作用の式が、たわみ w で表した曲げ作用の式と相似であることがわかる。また、式(14)右辺の幾何学的非線形、および塑性変形に関する非線形項は、荷重 q と同様な物理量であり、板内に分布する分布力として扱うことができる。すなわち、薄板構造において非線形項が現れる領域の大形要素内に、式(14)右辺の非線形項を分布力として作用させる。ここで、図-6 に示すように、要素内に小さい有限領域を設け、この分割された小さい領域には、非線形項の物理量が等分布であると仮定し、その物理量を有限小領域の中心点に採った選点の値で代表する。この仮定により、非線形項を処理する有限領域の位置と大きさを定めれば、要素の任意点における諸係数は、単位量に対する影響係数として前もって与えられ、便利に計算することができる。なお、基礎式中の時間積分は、各荷重段階の和に置換する。

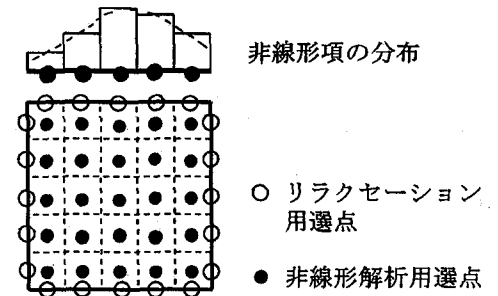


図-6 非線形領域のみに設けられる選点

ところで、基礎式に含まれる塑性変形に関する非線形項は、塑性流れ係数 μ とその時点での断面力の積を2階微分した形となっている。これらを線形化するために、部分的に差分法を用いる。すなわち、塑性化した選点 i ならびに周囲の8選点について図-7 に示す差分ネットを考える。逐次計算のある過程で、この選点 i における断面力の近似値が得られたとすれば、この時点における選点 i での差分表示により、点 i の μ の1次関数として、非線形項の物理量を与えることができる。

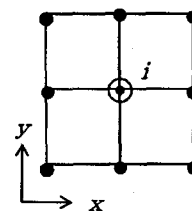


図-7 選点 i を囲む8個の選点の指標

固定辺が塑性化した場合は、固定辺上の選点に、塑性

ひずみ ε' と塑性曲率 κ' の代わりに、塑性回転角 θ' と集中的伸び（セパレーション） u' を与える。

式(15)の水平変位 u 、 v に含まれる有限変位による非線形項（たわみ角の2乗の項）の積分は、数値積分によって処理する。

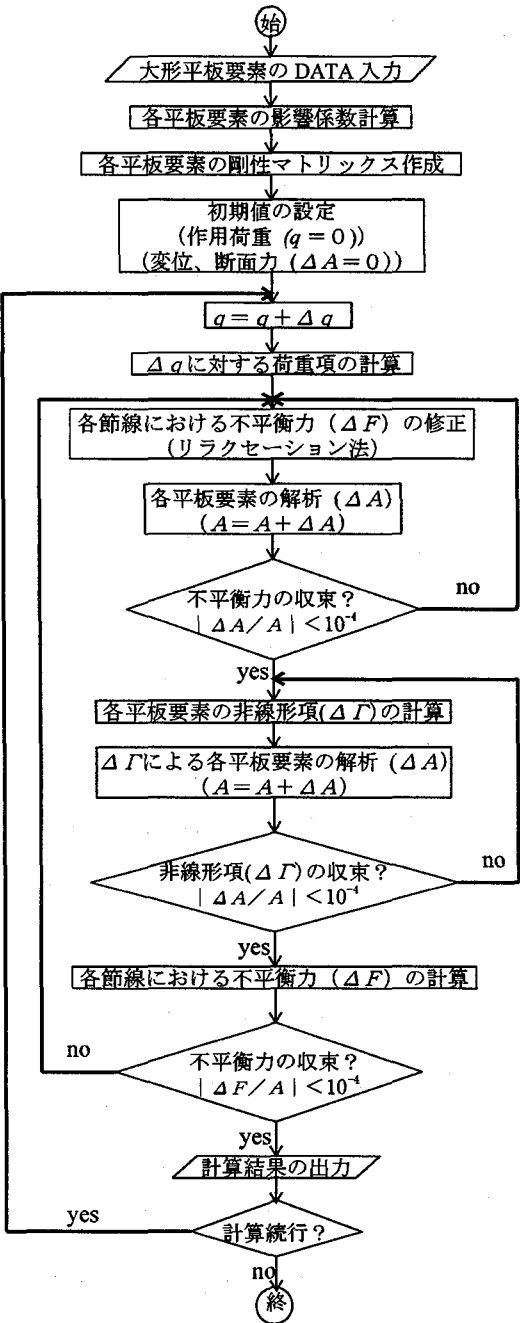


図-8 フローチャート

さて、荷重増分に対する逐次計算の方法は、いま、 $L-1$ 段階の諸量は確定したものとし、まず、荷重を $q_L = q_{L-1} + \Delta q_L$ に増加させ、 Δq_L に対する弾性計算による変位、断面力の増分量 $\Delta \delta$ 、 ΔF を計算する。次に、それらの増分量を考慮した、式(14)右辺の非線形項

をもとめ、増分量 $\Delta \delta$ 、 ΔF を修正する。塑性化した選点では、 $f_L = 1$ となるような μ_L を、前述の線形化の方法を適用してもとめる。なお、非線形項の計算において、増分量の2乗の項は、2次微小量として無視する。

再び、これらの修正値を用いて同様の計算を行い、これらの諸値が収束するまで繰返し演算を行う。

図-8 に繰返し計算を含む計算の流れを示す。

5. 解析例

ここでは、降伏応力を $\sigma_P = 300 \text{ N/mm}^2$ とし、降伏曲面を次のように仮定した。

$$f = m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3 m_{xy}^2 + n_x^2 + n_y^2 - n_x n_y + 3 n_{xy}^2 = 1 \quad \dots (16)$$

例題(1) 全面等分布荷重が作用する平板の問題 ($\nu = 0$)

図-9 に示すように、相対2辺を完全固定した板を、9個の正方形大形要素が連結したモデルで解析した。板内の非線形項を処理する選点、およびリラクセーションにより分配する節線上の選点は、それぞれ、図-6 に示すように5等分割して与えた。本問題は、 $l/a = 9$ 、 $\nu = 0$ としているため板の中央断面(A-A)においては、はりに近似できるものである。

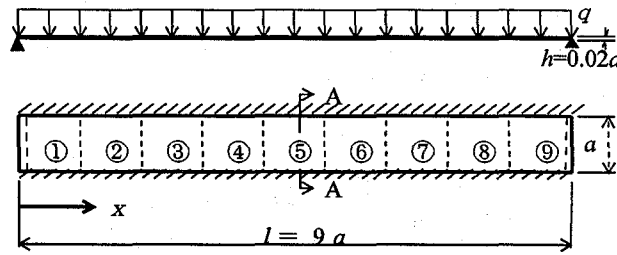


図-9 解析モデルと要素の結合

図-10 は、はりモデルの非線形解析と本解析の結果を中央点のたわみについて比較したものである。同様に、図-11 は、曲げモーメントと軸力について、はりモデルによるものと本解析結果を比較したものである。

スパン中央のたわみが板厚の35%程度になると固定辺が塑性化する。固定辺が塑性化すると塑性回転とモーメントの分配によって、たわみおよび中央の曲げモーメントが増加する。たわみが急増すると有限変形による軸力（膜力）も急増し、下に凸な荷重-変位曲線となっている。軸力の増加とともに塑性化したところの曲げモーメントは減少し、塑性膜の状態に向かう。固定辺が塑性化する初期降伏荷重の2倍程度の荷重でスパン中央部も塑性化する。そのときのたわみは板厚の85%程度であった。さらに、初期降伏荷重の2.4倍程度の荷重で中央

に隣接する選点も塑性化した。初期降伏荷重の 2.5 倍程度までの追跡結果ではあるが、はりモデルの結果と本解析値は良く一致している。リラクセーション法、および非線形項に対する逐次計算の収束性は良好で、それぞれ約 3 回の繰返し計算で収束値を得た。なお、図中の q_{e0} , w_{e0} は、それぞれ、線形弾性解において固定辺が塑性化するときの荷重と最大たわみである。

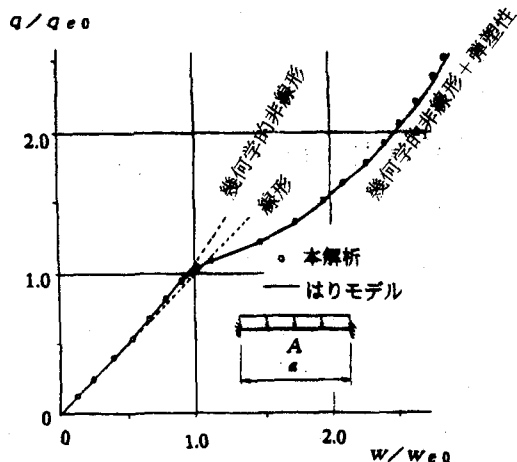


図-10 荷重-たわみ曲線

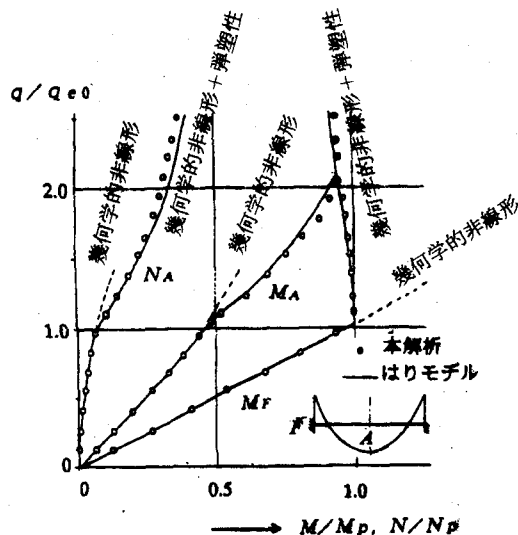


図-11 モーメントと軸力の変化

例題 (2) 部分分布荷重が作用する平板の問題 ($\nu = 0.3$)

図-12 に示すように、9個の正方形大形要素を連結し、③および⑦の要素の中央に $a/2 \times a/2$ の部分分布荷重が作用する対称な問題を解析した。大形要素の選点の配置等は、例題(1)の場合と同様に5等分割して与えた。

ここでは、リラクセーションを①→⑨の方向に行ったが、図-13 は、リラクセーション法のある荷重段階における、節線上(図-12 ● の位置)のたわみの収束性を示した

ものである。また、本文のように簡単な例題では初期値は不要で、3回の繰返しで3桁の収束値を得た。また、非線形項に対する計算も3回程度の繰返しで3桁の収束値を得た。

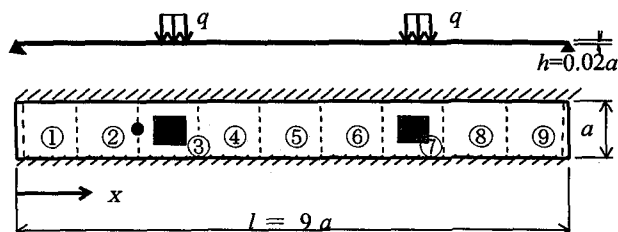


図-12 解析モデルと要素の結合

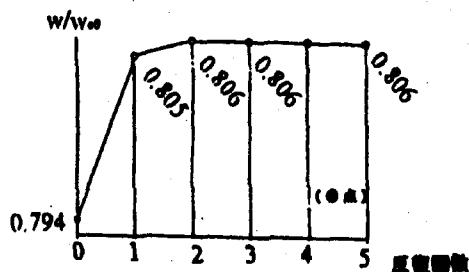


図-13 リラクセーションの収束性

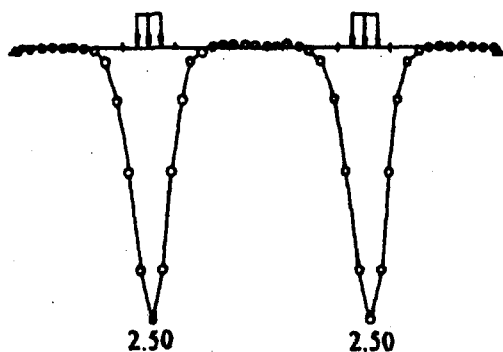


図-14 スパン中央のたわみの分布

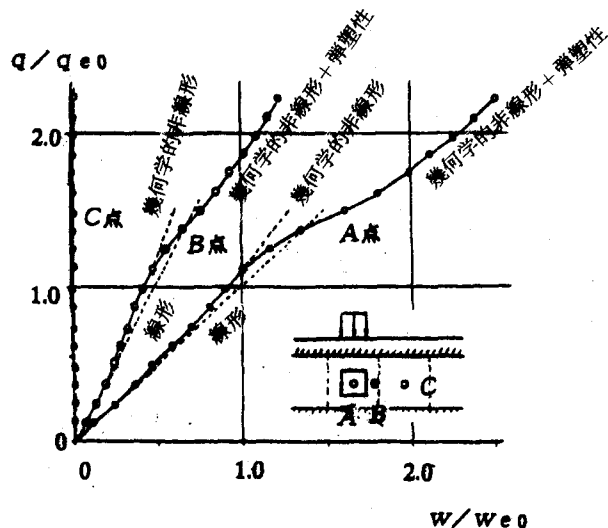


図-15 3点の荷重-たわみ曲線

図-14 は、たわみの分布を示したものであるが、対称性も満足している。図-15 は、荷重直下(A)、荷重近傍(B)、および荷重から離れたところ(C)の点の荷重-たわみ曲線を示したものである。固定辺が塑性化し、さらに荷重直下のA点が塑性化するまでの結果であるが、荷重直下および近傍で生ずる非線形性も、格間程度離れるとほとんど生じていないことがわかる。したがって、局所的な荷重が作用するような、一部のパネルが問題となるこの種の板構造を解析する場合は、変形の微少な弾性領域にあるパネル内には非線形項を処理する選点を設ける必要がなく、選点の数を最小限に抑えられる。

4. あとがき

解析に必要な自由度を大形要素の1つの節線の変位と非線形領域のみに制限し、リラクセーション法を用いる本解法は、計算容量を著しく低減し、インプットデータを構成する労力を軽減することができる。また、簡単な例題ではあるが、本研究を通じて、逐次計算を要する非線形問題においても、リラクセーションならびに非線形項に対する計算は、数回の繰り返しで収束値が得られ、また、十分な精度の結果が得られるようであり、本解法の有用性がうかがわれる。

参考文献

- [1] T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu : Element-Free Galerkin Methods, Int. J. Numer. Methods in Eng., Vol.37, pp.229 - 256, 1994.
- [2] 岡村宏一、石川一美、古市 亨：曲げ、あるいは面内力を受ける大形の任意4辺形平板要素の剛性方程式、土木学会論文集、No.465/I-23、PP.67 - 76、1993.
- [3] 岡村宏一、石川一美、古市 亨：多格間平板構造の一解法、土木学会論文集、No.416/I-13、PP.275 - 284、1990.
- [4] 正木洋二、石川一美、岡村宏一、古市 亨：全部材を大形板要素で構成した鋼床版箱桁橋の立体解析、土木学会関西支部年次学術講演概要、PP.I-67-1 - 4、1994.
- [5] 岡村宏一、吉田公憲：大たわみ、およびリブの補剛を考慮した長方形鋼板の弾塑性解析、土木学会論文報告集、No.196、PP.29 - 43、1971.
- [6] R. V. Southwell : Relaxation Method in Engineering Science, Oxford at the Clarendon Press, 1940.

(1997年9月26日受付)