

有限回転を許容する棒部材の三次元動的数値解析の一手法

A NUMERICAL METHOD FOR DYNAMIC ANALYSIS OF SPATIAL RODS

斉木 功*・後藤 文彦**・岩熊 哲夫***

Isao SAIKI, Humihiko GOTOU and Tetsuo IWAKUMA

*修士(工学) 東北大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻(〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**博士(工学) 東北大学大学院助手 工学研究科土木工学専攻

***Ph.D. 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻

A simple formulation based on the total Lagrangian approach for spatial Bernoulli-Euler beam undergoing finite rotation is presented. Since finite rotation in three dimensional space can not be treated as a vector quantity, some non-vector quantities such as Eulerian angle are developed. The joint orientation matrix suggested by Oran and its dynamical interpretation adopted lead physically understandable equations of motion and its computational implementation. The feasibility of the present method is shown by several numerical example include dynamic instability.

Key Words : finite element method, three dimensional finite rotation, total Lagrangian, dynamic instability

1. はじめに

大変位を伴う構造部材の静的弾性幾何学的非線形問題に関する研究は、主に弾性座屈安定解析を目的として、数多く行われてきた。その結果、解析法として種々の方法が提案され、実用的設計照査等で用いられている。また特に長大橋梁の主部材としてよく用いられるケーブルは、その剛性の低さのため幾何学的非線形性および動的安定性が問題となる。現行の設計法ではそのような不安定現象の発生限界で設計をするが、発生限界付近での正確な挙動や終局状態の検討のためには、模型による風洞実験を行わざるを得ないのが現状である。また、効果的な免振構造の開発は今日の課題であるが、免振構造を用いた構造物については正確にその変位等の大きさを求めることと、動的な安定性を調べることが必要である。以上のことから、大変位動的問題の簡便で正確な解析法の開発が必要となっている。

動的安定・不安定を検討すべき構造物は柔軟であると考えられ、その場合、その変位は大きくても観測するひずみは微小である。したがって、本研究では有限回転・微小ひずみの問題を対象とする。現在、有限回転・微小ひずみの静的問題においては、剛体変位除去の手法の有用性が数多く示されている。さらに最近の研究によって、座標系の取り方や有限回転の表し方が、接線剛性行列の対称性や、解析結果の精度、収束性に影響を及ぼすことが分かってきた。著者らも剛体変位除去の手法を用いて、静的な解析¹⁾²⁾や平面の動的な解析³⁾⁴⁾を行ってきたが、この論文では、著者らが行ってきた一連の方法を三次元動的問題に拡張し、その妥当性を検討する。

剛体変位除去に必要な局所座標系を用いるためには、

全体座標系と局所座標系の成分の座標変換則を表すために、局所座標系と全体座標系との間の回転を何らかの方法で表すことが必要である。ところが、三次元空間における有限回転角は空間ベクトルとして取り扱うことができないため、Euler角をはじめ、いくつかの手法が考案されている。本研究では、有限回転を表す角度を用いず、joint orientation matrix⁵⁾という古典的な方法を動的解析に拡張する手法を明確にすることを主な目的とする。これを用いて、運動方程式から直接得られる回転速度により座標変換係数を更新する方法でいくつかの数値解析を行う。

三次元動的問題については厳密解が得られていないばかりか解析例も少ないため、よく引用される両端自由のBernoulli-Euler梁について解析を行い、その比較から本手法の精度と妥当性を示す。また、応用として実存する吊り橋と同程度のサグ比を持つケーブルの動的不安定現象の解析も行った。

2. 座標変換則

3次元Euclid空間に2組の正規直交基底ベクトル e_I , $\bar{e}_j$ を考える。 e_I に属する座標系を全体座標系、 $\bar{e}_j$ に属する座標系を局所座標系と呼ぶ。ある位置ベクトル p のそれぞれの座標系での成分は

$$p = p_I e_I = \bar{p}_j \bar{e}_j \quad (1)$$

で表される。本論文では、大文字の添え字 $I, J, \dots$ は全体座標系の成分、小文字の添え字 $i, j, \dots$ は局所座標系の成分をそれぞれ表し、範囲は1, 2, 3をとることとする。また、成分を表す記号につくオーバーラインは、そ

れが局所系に属することを表す。上式と e_K との内積をとることによって

$$\begin{aligned} p_I e_I \cdot e_K &= \bar{p}_j \bar{e}_j \cdot e_K \\ p_I &= \bar{p}_j T_{Ij} \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる。これが座標変換則そのものであり、 T_{Ij} は次式で定義される。

$$T_{Ij} \equiv e_I \cdot \bar{e}_j \quad (3)$$

この座標変換成分 T_{Ij} は剛体変位を除去する total Lagrange 手法を用いるためには必要不可欠な量である。 T_{Ij} は 9 の成分を有しているが、 $\bar{e}_i$ が互いに直交し、かつ単位ベクトルであるという 6 の条件を満たすことから、その独立な成分は 3 である。ところがよく知られているように、 T_{Ij} を Euclid 空間のベクトルの線形関数で表せないため、座標変換成分 T_{Ij} を 3 自由度の媒介量で表す方法がいくつか研究されている。構造の静的数値解析の分野では、例えば Euler 角²⁾⁶⁾⁷⁾や Rodrigues 変数⁸⁾が用いられており、それぞれに一長一短がある。しかし、いずれの媒介量を用いても、その非線形性から、有限回転とは一対一に対応しない。例えば、Euler 角では二回目の回転角が $\pi/2$ であれば、同一の有限回転を表す無限の組み合わせが存在する。このような特異点近傍では、数値計算上極めて不安定になってしまう。

ここでは、上述の問題を回避し、簡潔で物理的解釈の容易な定式化をするために、媒介量を用いずに、joint orientation matrix, すなわち座標変換成分 T_{Ij} を微小回転角によって逐次更新する Meek and Loganathan⁹⁾の方法を動力学的に解釈し用いることとする。

式 (3) から明らかなように、 T_{Ij} は局所座標系の基底ベクトル $\bar{e}_j$ の全体座標系の成分、すなわち方向余弦を表している。そのような解釈をすれば、有限回転を用いる代わりに、回転運動するベクトルを時々刻々追跡することによって座標変換 T_{Ij} を得ることができる。

任意時刻 t に、ある基底ベクトルの組 $\bar{e}_i(t) = T_{ji}(t)e_j$ が角速度ベクトル ω で回転しているとき、ベクトル $\bar{e}_i$ の速度ベクトル $\dot{\bar{e}}_i$ は

$$\dot{\bar{e}}_i = \omega \times \bar{e}_i \equiv \Omega \cdot \bar{e}_i \quad (4)$$

で表される。ただし、上付ドットは物質微分を表し、 Ω は軸性ベクトル ω に対応する 2 階の反対称テンソルである。 Ω のそれぞれの座標系成分は、交代記号 ε_{IJK} , ε_{ijk} を用いて

$$\Omega_{IJ} = \varepsilon_{IKJ}\omega_K, \quad \bar{\Omega}_{ij} = \varepsilon_{ikj}\bar{\omega}_k \quad (5)$$

とも表される。その成分を用いれば、式 (4) は

$$\dot{\bar{e}}_i = \Omega_{JK}T_{Kj}e_J = \bar{\Omega}_{ji}\bar{e}_j \quad (6)$$

と表すこともできる。さらに $\bar{e}_i = T_{ji}e_j$ であることを考慮すれば、式 (6) は

$$\dot{T}_{ji}e_J = \Omega_{JK}T_{Kj}e_J = \bar{\Omega}_{ji}T_{Kj}e_K \quad (7)$$

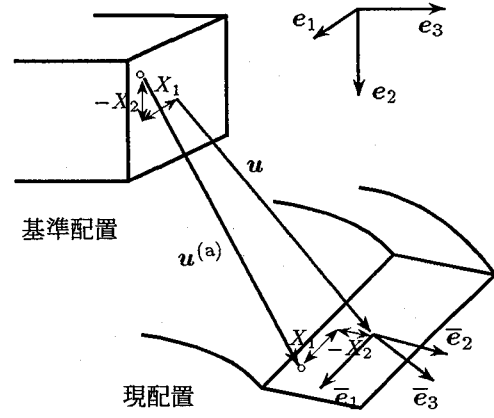


図-1 梁の変位場

となる。以上から、物体の運動方程式から直接求められる回転速度ベクトル ω で表された線形連立微分方程式 (7) を解くことによって、座標変換係数 T_{Ij} を求めることができる。また、式 (7) は従属な 9 自由度を有しているが、Euler 角などの媒介量を用いる場合よりも非常に簡単な形になっている。

実際の数値解析においては、式 (7) は

$$\Delta T_{ji} = \Delta t \Omega_{JK}T_{Kj} \quad (8)$$

といった差分関係として解釈する。ここで、 $\Delta t \Omega_{JK}$ を微小回転を表す反対称テンソル成分と考えれば、式 (8) は Meek and Loganathan の方法と一致する。

3. 運動方程式

3.1 梁の変位場

任意物質点の基準時刻における位置ベクトルを $X^{(a)}$, 現時刻における位置ベクトルを $x^{(a)}$ とする。また、梁要素の一端の断面の図心を節点 1 と呼ぶこととする。

空間固定の正規直交基底ベクトルの組 e_I を、 e_1, e_2 は断面の主軸方向に一致し、 e_3 は断面に直角になるように定める。また、図-1 のように任意の断面に、基準時刻で e_I に一致し、その断面と共に移動する局所基底ベクトルの組 $\bar{e}_i$ を定義する。断面平面保持の仮定と Bernoulli-Euler の仮定より、 $\bar{e}_i$ は常に断面の主軸と梁の中立軸の接線に一致する。以上を用いて断面の任意点の位置ベクトル $x^{(a)}$ は、梁の中立軸の位置ベクトル x を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} x^{(a)} &= x + X_A^{(a)}\delta_{A\alpha}\bar{e}_\alpha \\ &= x_I e_I + X_A^{(a)}\delta_{A\alpha}T_{I\alpha}e_I \end{aligned} \quad (9)$$

これより、ギリシア文字の大文字添え字 $A, B, \dots$ は全体座標系の成分、小文字の添え字 $\alpha, \beta, \dots$ は局所座標系の成分をそれぞれ表し、範囲は 1, 2 のみをとることとする。また、任意点と中立軸の変位ベクトルを $u^{(a)}$, u

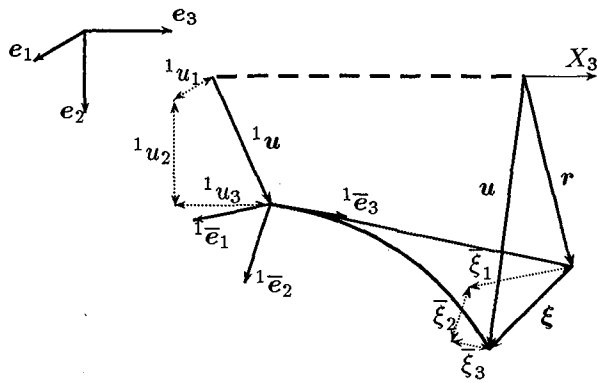


図-2 極分解の定理に基づく剛体変位の除去

とすれば

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(a)} &= \mathbf{u} + X_A^{(a)} (\delta_{A\alpha} \bar{\mathbf{e}}_\alpha - \mathbf{e}_A) \\ &= u_I \mathbf{e}_I + X_A^{(a)} (\delta_{A\alpha} T_{I\alpha} - \delta_{IA}) \mathbf{e}_I \end{aligned} \quad (10)$$

と表すこともできる。

式(10)を時間微分すれば、加速度が

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}^{(a)} &= \ddot{\mathbf{u}} + X_A^{(a)} \delta_{A\alpha} \ddot{\bar{\mathbf{e}}}_\alpha \\ &= \ddot{\mathbf{u}} + X_A^{(a)} \delta_{A\alpha} \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

と求まる。ここに、 $\mathbf{A}$ は回転速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ に対応する反対称テンソル $\boldsymbol{\Omega}$ を用いて

$$\mathbf{A} \equiv \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (12)$$

のように定義される2階のテンソルで、ベクトルに作用してそのベクトルの加速度ベクトルを生じる。定義式(12)より、 $\mathbf{A}$ の全体系、局所系での成分はそれぞれ

$$A_{IJ} = \dot{\Omega}_{IJ} + \Omega_{IK} \Omega_{KJ}, \quad \bar{A}_{ij} = \dot{\bar{\Omega}}_{ij} + \bar{\Omega}_{ik} \bar{\Omega}_{kj} \quad (13)$$

となる。

3.2 剛体変位成分の分解

三次元空間で変形できる物体の変形勾配は、極分解の定理にあるように回転と変形とに分解される。梁の場合その変位は、内力の発生に寄与する曲げや圧縮や捻れといった軸線の実質的な変形に関与した成分と、内力の発生とは無関係な断面の剛体移動及び回転による変位とに分けて考えることが容易にできる。以上のような考え方は、一般に剛体変位除去の手法とよばれ、棒材の静的解析においては、その精度や接線剛性行列の対称性などについて多くの研究がなされている。しかしながら、剛体変位除去の手法と、その基本定理である極分解の定理との関係を明確に説明した文献は少ない。したがって、ここでは、定式化が比較的簡単な接線座標を用いた剛体変位成分の分解を説明し、極分解の定理との関係について明らかにする。

図-2の一有限要素の変位ベクトル $\mathbf{u}$ から、剛体変位ベクトル $\mathbf{r}$ と実質変形を表す相対変位ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を定義し分解する。剛体変位ベクトル $\mathbf{r}$ を、節点1の並進と回

転による有限要素の剛体的な変位として定義すると、図-2にあるような幾何学的関係より

$$\mathbf{r} \equiv {}^1\mathbf{u} + X_3 ({}^1\bar{\mathbf{e}}_3 - \mathbf{e}_3) \quad (14)$$

と表すことができる。ここに、 ${}^1\mathbf{u}$ 、 ${}^1\bar{\mathbf{e}}_i$ は節点1での変位ベクトルおよび局所基底ベクトルである。また、上式の右辺第二項は節点1の回転による軸線の変位である。したがって、相対変位ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{u} - \mathbf{r} \quad (15)$$

と定義できる。ここで定義した剛体変位ベクトル $\mathbf{r}$ と相対変位ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を用いて、軸線の変位 $\mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u}(X_3) = \mathbf{r}(X_3) + \boldsymbol{\xi}(X_3) = r_I \mathbf{e}_I + \bar{\xi}_j {}^1\bar{\mathbf{e}}_j \quad (16)$$

と分解することができる。

回転に関しても、軸線上の局所基底ベクトル $\bar{\mathbf{e}}_i$ を、要素の剛体回転と実質的な曲がり変形成分とに分解する。まず、節点1での局所基底ベクトル ${}^1\bar{\mathbf{e}}_i$ をその有限要素の剛体回転成分として定義する。要素内の実質的な変形成分が十分小さければ、軸線上の点の局所基底ベクトル $\bar{\mathbf{e}}_i$ は、要素の剛体回転である節点1での局所基底ベクトル ${}^1\bar{\mathbf{e}}_i$ を微小回転 $\Delta\theta$ だけ回転したベクトルとして次のように表してもよい⁵⁾。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_i &= {}^1\bar{\mathbf{e}}_i + \Delta\theta \times {}^1\bar{\mathbf{e}}_i \\ &= {}^1\bar{\mathbf{e}}_i + \Delta\boldsymbol{\Theta} \cdot {}^1\bar{\mathbf{e}}_i \\ &= (\Delta\bar{\boldsymbol{\Theta}}_{ji} + \delta_{ji}) {}^1\bar{\mathbf{e}}_j \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 $\Delta\boldsymbol{\Theta}$ は $\boldsymbol{\Omega}$ と同様に、 $\Delta\theta$ に対応する2階の反対称テンソルである。局所座標系 $\bar{\mathbf{e}}_i$ は梁の断面に固定されているので、その微小回転 $\Delta\theta$ は

$$\Delta\theta = {}^1\bar{\mathbf{e}}_3 \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3} + \bar{\phi}(X_3) \bar{\mathbf{e}}_3 \quad (18)$$

と表すことができる。ここに、 $\bar{\phi}$ は節点1に対する断面の相対的なねじれ角である。右辺第一項は軸線の相対回転、第二項は断面のせん断変形によるねじれを意味し、互いに直交する。また、前者は幾何学における従法線と平行なベクトルであるが、後者は幾何学における曲線のねじれとは異なることに注意すべきである。上式に式(16)を代入すると微小回転 $\Delta\theta$ の成分は

$$\Delta\bar{\theta}_1 = -\bar{\xi}'_2, \quad \Delta\bar{\theta}_2 = \bar{\xi}'_1, \quad \Delta\bar{\theta}_3 = \bar{\phi} \quad (19)$$

となる。ここで、 $(\cdot)'$ は X_3 による微分を表す。実質的な曲がり変形成分により表される第一式、第二式は式(18)の第一項に対応し、ねじれ変形成分を含む第三式は式(18)の第二項に対応する。ここで局所座標系を用いるのは、右極分解の定理により実質的な変形が T_{Ij} だけ回転した局所系で表されるからである。

式(16)を位置ベクトルについて書き直すと

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= {}^1\mathbf{x} + X_3 {}^1\bar{\mathbf{e}}_3 + \boldsymbol{\xi} \\ &= {}^1x_I \mathbf{e}_I + X_3 {}^1T_{I3} \mathbf{e}_I + \bar{\xi}_j T_{Ij} \mathbf{e}_I \end{aligned} \quad (20)$$

となる。梁の任意点の位置ベクトルを軸線上の点の位置ベクトルと関連付ける式(9)に式(20)、(17)を代入する

と

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(a)} &= {}^1\mathbf{x} + X_I^{(a)} \delta_{Ij} {}^1\bar{\mathbf{e}}_j + \boldsymbol{\xi} + X_\alpha \Delta \boldsymbol{\Theta} \cdot {}^1\bar{\mathbf{e}}_\alpha \\ &= {}^1\mathbf{x}_I \mathbf{e}_I + X_K^{(a)} \delta_{Kj} {}^1T_{Ij} \mathbf{e}_I \\ &\quad + \bar{\xi}_j {}^1T_{Ij} \mathbf{e}_I + X_A^{(a)} \delta_{A\alpha} \Delta \theta_{j\alpha} {}^1T_{Ij} \mathbf{e}_I \quad (21) \end{aligned}$$

となる。これより、変形勾配 $\mathbf{F}$ を求めれば

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}_I^{(a)}}{\partial X_j^{(a)}} (\mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J) \\ &= {}^1T_{Ik} (\Delta \theta_{kl} + \delta_{kl}) \delta_{lM} U_{MJ} (\mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J) \quad (22) \end{aligned}$$

となる。ただし、微小回転 $\Delta \theta_{ij}$ のほかに、伸びひずみ $\varepsilon \equiv \partial \bar{\xi}_3 / \partial X_3$ も十分に小さいという条件を用いた。ここに、 U_{MJ} は右ストレッチテンソルの成分である。具体的には、伸びひずみ ε を用いて

$$U_{MJ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix} \quad (23)$$

と表すことができ、これからも断面平面保持の仮定と Bernoulli-Euler の仮定を満足していることが分かる。式 (22) から、ここまでで行った剛体変位の除去は右極分解の定理の拡張と捉えられる。つまり、剛体変位除去の方法では、極分解の定理を拡大解釈してある点の近傍、すなわち小さくとした一要素の中での変形勾配を、要素の回転と、微小な回転と伸び、すなわち微小変形とに分解しているのである。

式 (14) を式 (16) に代入し、時間微分をすれば、加速度が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} &= \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\boldsymbol{\xi}} \\ &= {}^1\ddot{\mathbf{u}}_I \mathbf{e}_I + X_3 {}^1\mathbf{A} \cdot {}^1\bar{\mathbf{e}}_3 + \ddot{\xi}_j {}^1\bar{\mathbf{e}}_j \\ &\quad + 2\dot{\xi}_j {}^1\boldsymbol{\Omega} \cdot {}^1\bar{\mathbf{e}}_j + \dot{\xi}_j {}^1\mathbf{A} \cdot {}^1\bar{\mathbf{e}}_j \\ &= {}^1\ddot{\mathbf{u}}_I {}^1T_{Ij} {}^1\bar{\mathbf{e}}_j + X_3 {}^1A_{j3} {}^1\bar{\mathbf{e}}_j + \ddot{\xi}_j {}^1\bar{\mathbf{e}}_j \\ &\quad + 2\dot{\xi}_k {}^1\bar{\Omega}_{jk} \cdot {}^1\bar{\mathbf{e}}_j + \dot{\xi}_k {}^1\bar{A}_{jk} \cdot {}^1\bar{\mathbf{e}}_j \quad (24) \end{aligned}$$

節点 1 での回転速度ベクトルを ${}^1\boldsymbol{\omega}$ とすると、式 (17) を時間微分して、局所基底ベクトル $\bar{\mathbf{e}}_i$ の速度は

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}_i = {}^1\boldsymbol{\omega} \times {}^1\bar{\mathbf{e}}_i + \Delta \dot{\boldsymbol{\theta}} \times {}^1\bar{\mathbf{e}}_i + \Delta \boldsymbol{\theta} \times ({}^1\boldsymbol{\omega} \times {}^1\bar{\mathbf{e}}_i) \quad (25)$$

となるが、要素をある程度小さくするという前提のもとで $|\Delta \boldsymbol{\theta}|$ は微小と考えてもよく、式 (25) の項別にオーダー比較をすると

$$|\boldsymbol{\omega} \times {}^1\bar{\mathbf{e}}_i| \gg |\Delta \boldsymbol{\theta} \times ({}^1\boldsymbol{\omega} \times {}^1\bar{\mathbf{e}}_i)| \quad (26)$$

と置いても問題ないと考えられる。その条件のもとでは、式 (25) は改めて

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}_i \doteq {}^1\boldsymbol{\omega} \times {}^1\bar{\mathbf{e}}_i + \Delta \dot{\boldsymbol{\theta}} \times {}^1\bar{\mathbf{e}}_i \quad (27)$$

と近似できることから

$$\boldsymbol{\omega} \doteq {}^1\boldsymbol{\omega} + \Delta \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (28)$$

となる。加速度に関しても同様にして次式を得る。

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} \doteq {}^1\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \Delta \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (29)$$

3.3 内力仮想仕事

有限回転・微小ひずみの静的問題における剛体変位除去の手法を用いた剛性方程式の定式化は文献²⁾¹⁰⁾に詳しいので、ここではその結果のみを示す。内力仮想仕事 δW_{ST} は

$$\delta W_{ST} = \delta \{ {}^e\bar{\boldsymbol{\xi}} \}^T [\mathbf{K}] \{ {}^e\bar{\boldsymbol{\xi}} \} \quad (30)$$

で表される。ここに、 $[\mathbf{K}]$ はそり変形を無視した線形理論の剛性マトリクスである。また、 $\{ {}^e\bar{\boldsymbol{\xi}} \}$ は、節点 1 および 2 での相対変位ベクトル ${}^1\bar{\boldsymbol{\xi}}$ 、 ${}^2\bar{\boldsymbol{\xi}}$ および相対回転ベクトル $\Delta^1\bar{\boldsymbol{\theta}}$ 、 $\Delta^2\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の成分からなる自由度ベクトルであり次式で定義される。

$$\{ {}^e\bar{\boldsymbol{\xi}} \} \equiv \begin{bmatrix} {}^1\bar{\xi}_1 & {}^1\bar{\xi}_2 & {}^1\bar{\xi}_3 & \Delta^1\bar{\theta}_1 & \Delta^1\bar{\theta}_2 & \Delta^1\bar{\theta}_3 \\ {}^2\bar{\xi}_1 & {}^2\bar{\xi}_2 & {}^2\bar{\xi}_3 & \Delta^2\bar{\theta}_1 & \Delta^2\bar{\theta}_2 & \Delta^2\bar{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

相対変位ベクトル、相対回転ベクトルは、図-2にあるように、ある点の変位から節点 1 の剛体変位、剛体回転による変位を差し引いた変位であり、各節点の変位および座標変換係数 T_{Ij} により記述されなければならないが、その関係は後の式 (42) および式 (44) により示される。また、相対量は節点 1 を基準としているので、

$${}^1\bar{\xi}_1 = {}^1\bar{\xi}_2 = {}^1\bar{\xi}_3 = \Delta^1\bar{\theta}_1 = \Delta^1\bar{\theta}_2 = \Delta^1\bar{\theta}_3 = 0 \quad (32)$$

であるが、線形理論の剛性行列をそのまま用いるためにこのような表記を用いた。ここで用いた中括弧つきの量 $\{ {}^e\bar{\boldsymbol{\xi}} \}$ は座標変換則に従う空間ベクトルではなく、 12×1 のマトリクスである。この論文では、そのようなマトリクスを便宜的にベクトルと呼ぶが、上のように中括弧 $\{ \cdot \}$ を用いて表し、空間ベクトルとは区別する。

3.4 慣性仮想仕事

慣性力による仮想仕事 δW_{DY} は

$$\delta W_{DY} = \rho \int_V \delta \mathbf{u}^{(a)} \cdot \ddot{\mathbf{u}}^{(a)} dV \quad (33)$$

のように記述できる。ここに、 ρ は材料の密度である。

前節の結果から、断面の任意点の諸量を軸線上の諸量で表した式 (11)、(10) を式 (33) に代入すると、慣性仮想仕事は

$$\begin{aligned} \delta W_{DY} &= \rho \int \left(\delta \mathbf{u} + X_A^{(a)} \delta_{A\alpha} \delta \bar{\mathbf{e}}_\alpha \right) \cdot \left(\ddot{\mathbf{u}} + X_B^{(a)} \delta_{B\beta} \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\beta \right) dV \\ &= \rho \int A \delta \bar{u}_j \ddot{u}_I T_{Ij} + I_{AB} \delta_{A\alpha} \delta_{B\beta} \delta \bar{\theta}_{j\alpha} \bar{A}_{j\beta} dX_3 \\ &= \rho \int A \delta \bar{u}_j \ddot{u}_I T_{Ij} + \delta \bar{\theta}_1 I_{22} (\dot{\bar{w}}_1 + \bar{w}_2 \bar{w}_3) \\ &\quad + \delta \bar{\theta}_2 I_{11} (\dot{\bar{w}}_2 - \bar{w}_3 \bar{w}_1) \\ &\quad + \delta \bar{\theta}_3 \left\{ (I_{22} + I_{11}) \dot{\bar{w}}_3 \right. \\ &\quad \left. - (I_{22} - I_{11}) \bar{w}_1 \bar{w}_2 \right\} dX_3 \quad (34) \end{aligned}$$

と軸線上の諸量で表される。ここで

$$\int_V dV = \int A dX_3, \quad \int_V X_\alpha dV = \int G_A dX_3$$

$$\int_V X_A X_B dV = \int I_{AB} dX_3 \quad (35)$$

と置いた。ただし、中立軸は断面の図心と一致するようにとっているの、断面一次モーメントは

$$G_A \equiv 0 \quad (36)$$

であり、また、 X_1 軸、 X_2 軸を断面の主軸に選ぶことを前提とすれば

$$I_{AB} = 0 \quad (A \neq B) \quad (37)$$

である。この2条件を式(34)の誘導では用いている。

次に、軸線の運動を剛体的な変位と実質的な変形とに分解する式(24)、(28)、(29)を式(34)に代入すると慣性仮想仕事は次のようになる。

$$\delta W_{DY} = \rho \int \delta \bar{u}_j A \left({}^1\ddot{u}_I {}^1T_{Ij} + X_3 {}^1A_{j3} + \ddot{\xi}_j \right. \\ \left. + 2\ddot{\xi}_k {}^1\Omega_{jk} + \ddot{\xi}_k {}^1A_{jk} \right) dX_3 \\ - \rho \int \delta \ddot{\xi}_2' I_{22} \left({}^1\dot{\bar{\omega}}_1 - \ddot{\xi}_2' \right) dX_3 \\ + \rho \int \delta \ddot{\xi}_1' I_{11} \left({}^1\dot{\bar{\omega}}_2 + \ddot{\xi}_1' \right) dX_3 \\ + \rho \int \delta \bar{\phi} (I_{11} + I_{22}) \left({}^1\dot{\bar{\omega}}_3 + \ddot{\phi} \right) dX_3 \\ + \rho \int [\delta \ddot{\xi}_2' \delta \ddot{\xi}_1' \delta \bar{\phi}] \{f_c\} dX_3 \quad (38)$$

ただし、 $\{f_c\}$ の定義は付録に示した。

ここで、相対変位ベクトル ξ と相対回転ベクトル $\Delta\theta$ の局所座標系での成分を、節点1、2の相対変位ベクトル ${}^1\xi$ 、 ${}^2\xi$ と相対回転ベクトル $\Delta^1\theta$ 、 $\Delta^2\theta$ の局所系での成分を用い、標準的な有限要素法の手法で変位関数を次のように与える。

$$[\bar{\xi}_1(X_3) \bar{\xi}_2(X_3) \bar{\xi}_3(X_3)]^T = [N(X_3)] \{{}^e\bar{\xi}\} \quad (39)$$

$$\bar{\phi}(X_3) = {}^1\bar{\phi}N_5(X_3) + {}^2\bar{\phi}N_6(X_3) \quad (40)$$

ただし、 $[N]$ 、 N_5 、 N_6 の定義は付録に記した。ところで、要素の剛体変位成分を節点1の変位成分で定義しているの、節点1の相対変位ベクトル ${}^1\xi$ および相対回転ベクトル $\Delta^1\theta$ はゼロであることに注意する。また式(39)では、相対回転ベクトルの局所系での成分と相対変位ベクトルの局所系での成分の関係を表した式(??)を用いている。

仮想仕事式(38)は要素の相対量により表されているが、全体運動方程式は要素間の整合のため、節点自由度である全体座標系の変位と座標変換係数により表されなければならない。節点2の相対変位ベクトル ${}^2\xi$ は式(16)、(14)より、節点1の変位ベクトル 1u と局所基底ベクトル ${}^1\bar{e}_i$ 、節点2の変位ベクトル 2u を用いて

$${}^2\xi = {}^2u - {}^1u - \ell({}^1\bar{e}_3 - e_3) \quad (41)$$

と表すことができる。ここに、 ℓ は一有限要素の長さである。上式と ${}^1\bar{e}_i$ の内積をとれば、

$${}^2\bar{\xi}_i = {}^1T_{ji} \{({}^2u_j - {}^1u_j) - \ell(T_{3i} - \delta_{3i})\} \quad (42)$$

のように、相対変位の局所系成分が節点自由度の全体座標系変位成分と座標変換係数によって表される。また、節点2の相対回転ベクトル $\Delta^2\theta$ も同様に、両節点の自由度によって表す。式(17)を節点2に適用すると

$${}^2T_{Ij} = (\Delta^2\bar{\theta}_{kj} + \delta_{kj}) {}^1T_{Ik} \quad (43)$$

と表せるが、上式を ${}^2\bar{\theta}_{kj}$ の構成要素である $\Delta^2\bar{\theta}_i$ について解けば、例えば

$$\Delta^2\bar{\theta}_1 = {}^1T_{I3} {}^2T_{I2} \quad (44)$$

のように、相対回転を節点の自由度で表すことができる。

式(39)、(40)を式(38)に代入し、積分を実行すると、慣性仮想仕事は次のように離散化される。

$$\delta W_{DY} = \delta \{{}^e\bar{\xi}\}^T \left[[M_1] [{}^1T]^T \begin{Bmatrix} {}^1\ddot{u}_1 \\ {}^1\ddot{u}_2 \\ {}^1\ddot{u}_3 \end{Bmatrix} \right. \\ \left. + [M_2] \begin{Bmatrix} {}^1\bar{\omega}_1 {}^1\bar{\omega}_3 + {}^1\dot{\bar{\omega}}_2 \\ {}^1\bar{\omega}_2 {}^1\bar{\omega}_3 - {}^1\dot{\bar{\omega}}_1 \\ -({}^1\bar{\omega}_2)^2 - ({}^1\bar{\omega}_1)^2 \end{Bmatrix} \right. \\ \left. + [M_3] \{{}^e\ddot{\xi}\} + 2[M_4(\bar{\Omega}_{ij})] \{{}^e\dot{\xi}\} \right. \\ \left. + [M_5(\bar{A}_{ij})] \{{}^e\xi\} + \{j_c\} \right. \\ \left. + [J_1] \begin{Bmatrix} {}^1\dot{\bar{\omega}}_1 \\ {}^1\dot{\bar{\omega}}_2 \\ {}^1\dot{\bar{\omega}}_3 \end{Bmatrix} + [J_2] \{{}^e\ddot{\xi}\} \right] \quad (45)$$

ここに、 $[{}^1T]$ は節点1での座標変換係数をマトリクス表示したものである。 $[M_1]$ 、 $[M_2]$ 、 $[M_3]$ 、 $[M_4]$ 、 $[M_5]$ 、 $[J_1]$ 、 $[J_2]$ 、 $\{f_c\}$ の定義は付録に示したが、特に $[M_3]$ は線形理論の質量行列に等しい。

3.5 運動方程式

仮想仕事の原理は次の式で表される。

$$\delta W_{ST} + \delta W_{DY} = \delta W_{EXT} \quad (46)$$

上式に、内力仮想仕事式(30)、慣性仮想仕事式(45)、外力仮想仕事を代入すれば要素運動方程式が得られる。形式的に書くと、要素運動方程式は次のようになる。

$$\{{}^e f_{DY}\} + \{{}^e f_{ST}\} = \{{}^e f_{EXT}\} \quad (47)$$

ここで、第1項は慣性項、第2項は内力項、第3項は外力項を意味する。

仮想仕事式(30)、(45)は、局所系の相対節点変位成分の変分量との仕事の形になっており、このままでは有限要素の全体運動方程式を求める際に便利な直接剛性法を用いることができない。そこで、相対節点仮想変位成分

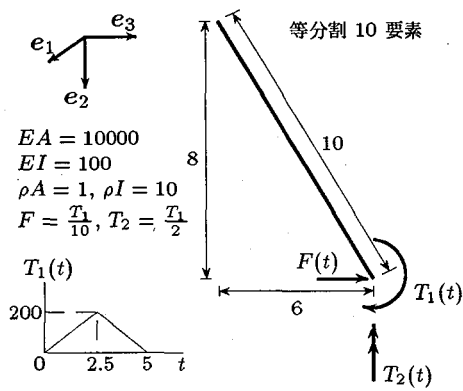


図-3 両端自由の柔な梁

$\delta\{\bar{\xi}\}$ を全体座標系における仮想変位成分 $\delta\{\bar{u}\}$ で表しておく必要がある。後藤ら²⁾によれば

$$\delta\{\bar{\xi}\} = [{}^eT^T] \delta\{\bar{u}\} \quad (48)$$

と表すことができる。この方法では、有限要素解が有限回転・微小ひずみ理論の厳密解に収束することが分かっている¹⁾。ここに、 $\delta\{\bar{u}\}$ は全体系要素仮想変位で

$$\delta\{\bar{u}\} \equiv [\delta^1u_1 \ \delta^1u_2 \ \delta^1u_3 \ \delta^1\theta_1 \ \delta^1\theta_2 \ \delta^1\theta_3 \ \delta^2u_1 \ \delta^2u_2 \ \delta^2u_3 \ \delta^2\theta_1 \ \delta^2\theta_2 \ \delta^2\theta_3]^T \quad (49)$$

と定義される。また、 $[{}^eT^T]$ は要素自由度の座標変換マトリクスで

$$[{}^eT] \equiv \begin{bmatrix} [{}^1T] & & 0 \\ & [{}^1T] & \\ 0 & & [{}^1T] \\ & & & [{}^1T] \end{bmatrix} \quad (50)$$

により定義される。

以上で、すべての仮想仕事項が全体系の仮想変位によって表されたので、全体運動方程式は、この要素運動方程式 (47) から直接剛性法によって簡単に得ることができる。式 (47) のように形式的に表すと、形式的に書くと、要素運動方程式は次のようになる。

$$\{f_{DY}\} + \{f_{ST}\} = \{f_{EXT}\} \quad (51)$$

ここに、 $\{f_{DY}\}$ 、 $\{f_{ST}\}$ 、 $\{f_{EXT}\}$ はそれぞれ系全体の慣性項、内力項および外力項を表す。外力モーメントは定式化から明らかのように、空間固定軸、もしくは局所座標軸周りで与えることができる。

4. 解の数値的検証

本理論に基づき定式化された運動方程式が大回転、自由飛行、大変形をする棒部材の動的応答を追跡できるか否かを検証するために、Hamilton の原理に基づく定式化をした Simo and Vu-Quoc¹¹⁾ の柔な梁の飛行問題を解析した。Simo and Vu-Quoc は Timoshenko 梁

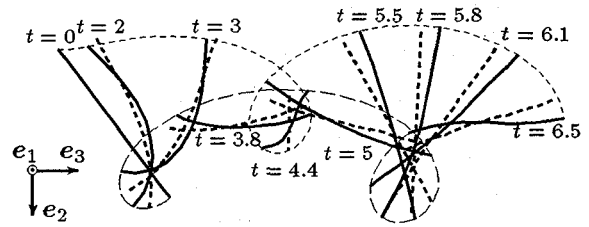


図-4 両端自由の柔な梁の飛行：投影図

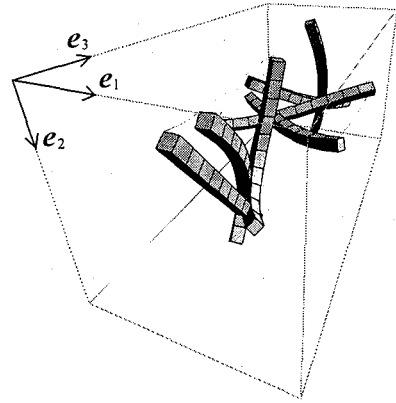
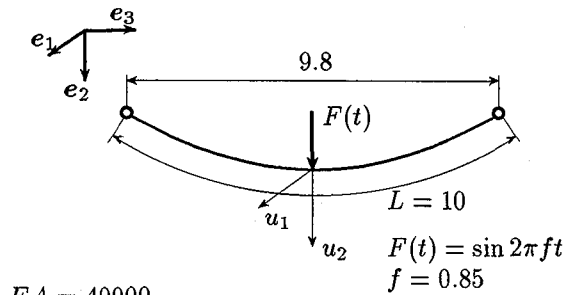


図-5 両端自由の柔な梁の飛行：透視図 ($t = 0, 2, 3, 3.8, 4.4, 5, 5.5$)

を対象としているが、ここでの解析対象は細長比の大きい柔な棒部材であり、せん断の影響はないと考え、比較することとした。なお、運動方程式の積分には Runge-Kutta-Merson 法を用いた。

解析対象は図-3 に示したような、はじめに e_1 に直交する面内に傾いている両端自由の梁である。解析に用いた要素数は Simo and Vu-Quoc と同じ 10 要素である。この梁の一端に集中荷重および集中モーメントを載荷する。ただし、モーメント外力の方向は空間固定であり、 e_1 、 e_2 の成分を持つ。 e_2 成分のモーメント外力によって面外運動が引き起こされる。解析対象の梁の細長比は 44.72 と通常の土木構造部材のそれよりもかなり大きい。これは有限変形を生じさせ易いように故意にとられた値である。この梁の挙動を e_1 に直交する平面に投影し、図-4 に示した。図中、実線が本理論に基づく解で、破線は Simo and Vu-Quoc の解、また、細い破線は梁の両端が描く軌跡を示したものである。重心の運動を大まかに見ると、ほぼ同じような結果になっているが、同じ要素数にもかかわらず、本解析の方が変形がやや大きく、柔らかな挙動を示している。Simo and Vu-Quoc は、用いている変位関数や、より多くの要素での計算結果については明記していないため、その原因を考察することは困難である。しかしながら、図が煩雑になるため省略したが、本解析で 40 要素を用いた場合、本解析の 10 要素による結果に近い結果となった。

この運動を透視図に描いたものを図-5 に示した。た



$EA = 40000$
 $EI_{11} = EI_{22} = 25$
 $GJ = 20, \quad \rho A = 0.1, \quad \rho I_{11} = \rho I_{22} = 1$

図-6 ケーブル：解析対象

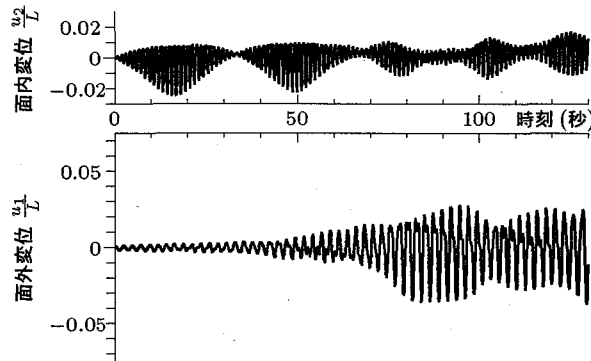


図-7 ケーブルの荷重載荷点の変位履歴

だし、ねじれ変形を見易くするために断面を矩形にし、断面の大きさと梁の長さの比を誇張してある。

なおこの梁に用いたパラメータのうち、 $EA/EI \neq \rho A/\rho I$ となって整合していないが、Simo and Vu-Quoc の解析例と比較するために彼らの用いた値をここでも採用している。

5. ケーブルの動的不安定解析への応用

ケーブルの動的挙動はその剛性の低さから、三次元的かつ大変位になりやすい¹²⁾。したがって、本解析手法を応用し、ケーブルを細長比の非常に大きな梁としてモデル化し、風力によって生じる動的安定現象のひとつであるギャロッピングの過渡応答解析を行った。

図-6にあるような細長比400の梁モデルに、風向の直角方向に生じる空気力を想定した周期外力をスパン中央に作用させ、32要素により動的応答を求めた。モデルはサグ比が0.114と実際の吊り橋と同じオーダーにした。この場合、細長比が非常に大きいため、曲げ振動に比べ意味の無い軸方向振動の固有振動数が極端に大きくなり、積分の安定条件を支配してしまう。そのため、運動方程式の増分式を求め、Newton-Raphson法を併用したNewmark法で解析を進めた。なお、重力場での挙動をシミュレートするために各節点には鉛直下向き

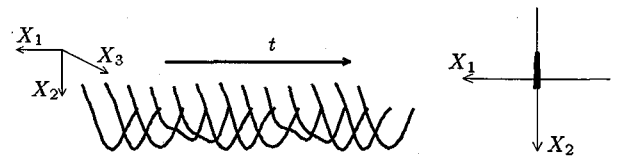


図-8 $19 \leq t \leq 22$ のケーブル振動：透視図と軌跡

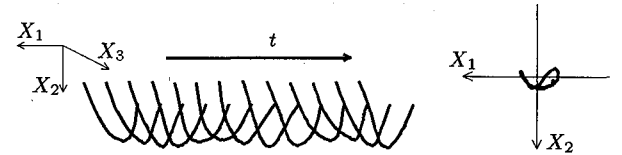


図-9 $92 \leq t \leq 95$ のケーブルの振動：透視図と軌跡

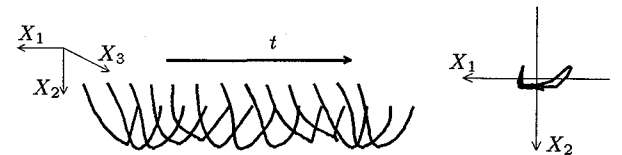


図-10 $102 \leq t \leq 105$ のケーブルの振動：透視図と軌跡

分布荷重の等価節点外力を加えてある。また初期不整としてスパン中央に面外方向の大きさ0.1の外力を加えたときの静的釣り合い形状を与えた。

ケーブルの荷重載荷点の面内、面外変位履歴を図-7に示した。この図から分かるように、50秒あたりまでは面内振動モードと周期外力との共振により面内変位モードの振幅のみが大きくなっている。このときの振動形状を図-8に示したが、sin三半波の対称モードである。50秒あたりの面内振幅が最大になるころに、係数励振現象により、sin半波の面外対称モードが成長し始め、90秒付近では図-9に示したような振動となり、面内変位は相対的にやや小さくなる。さらに時間が経過すると図-10のように再び面内変位がやや大きくなる。ここで、図-9、10の右側の図の軌跡を見るとやや不規則振動のような乱れがあり、不安定な振動をしていることが予想される。

6. 結論

仮想仕事の原理と剛体変位除去の手法を用いて、三次元空間で有限回転をするBernoulli-Euler梁の離散運動方程式の定式化を行った。また、有限回転の取り扱いには、方向余弦を用いるMeek and Loganathanの方法に従い、これを動的問題に拡張した。その結果、有限回転そのものは非ベクトル量であるにもかかわらず、ここで導かれた運動方程式はすべてベクトル量で記述された。従って、本手法による運動方程式は各項の物理的解釈が容易で簡潔な表現になっている。

解析精度についても、Hamiltonの原理を用いた既存の数値解と比較し、本解析法の妥当性を示した。

数値例として風力によるケーブルの動的不安定現象を取り上げ、面内、面外のフラッターが複雑に組み合わさった振動をシミュレートした。この場合、有限変位による非線形性から面内、面外の位相が変化し、不規則な振動となることを数値的に示すことができた。

付録 I 変位関数と質量マトリクス

$$\{f_c\} \equiv \begin{Bmatrix} -I_{11} \begin{pmatrix} {}^1\bar{\omega}_2 + \dot{\xi}_1 \\ {}^1\bar{\omega}_1 - \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1\bar{\omega}_3 + \dot{\phi} \\ {}^1\bar{\omega}_3 + \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ -I_{22} \begin{pmatrix} {}^1\bar{\omega}_1 - \dot{\xi}_2 \\ {}^1\bar{\omega}_2 + \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1\bar{\omega}_3 + \dot{\phi} \\ {}^1\bar{\omega}_3 + \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ (I_{22} - I_{11}) \begin{pmatrix} {}^1\bar{\omega}_1 - \dot{\xi}_2 \\ {}^1\bar{\omega}_2 + \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1\bar{\omega}_2 + \dot{\xi}_1 \\ {}^1\bar{\omega}_2 + \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$$

$$[N] \equiv \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 \\ & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_r] \equiv \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_5 \\ & N'_3 & 0 & 0 & 0 & N'_4 & 0 \\ & 0 & N'_3 & 0 & N'_4 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

$$N_1(X_3) \equiv 1 - \frac{3(X_3)^2}{\ell^2} + \frac{2(X_3)^3}{\ell^3}$$

$$N_2(X_3) \equiv X_3 - \frac{2(X_3)^2}{\ell} + \frac{(X_3)^3}{\ell^2}$$

$$N_3(X_3) \equiv \frac{3(X_3)^2}{\ell^2} - \frac{2(X_3)^3}{\ell^3}$$

$$N_4(X_3) \equiv \frac{(X_3)^3}{\ell^2} - \frac{(X_3)^2}{\ell}$$

$$N_5(X_3) \equiv 1 - \frac{X_3}{\ell}, \quad N_6(X_3) \equiv \frac{X_3}{\ell}$$

$$[J_0] \equiv \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

$$[M_1] \equiv \int_0^\ell \rho A [N]^T dX_3$$

$$[M_2] \equiv \int_0^\ell \rho A X_3 [N]^T dX_3$$

$$[M_3] \equiv \int_0^\ell \rho A [N]^T [N] dX_3$$

$$[M_4] \equiv \int_0^\ell \rho A [N]^T [{}^1\bar{\Omega}] [N] dX_3$$

$$[M_5] \equiv \int_0^\ell \rho A [N]^T [{}^1\bar{A}] [N] dX_3$$

$$[J_1] \equiv \int_0^\ell \rho [N_r]^T [J_0] dX_3$$

$$[J_2] \equiv \int_0^\ell \rho [N_r]^T [J_0] [N_r] dX_3$$

$$\{j_c\} \equiv \int_0^\ell \rho [N_r]^T \{f_c\} dX_3$$

参考文献

- 1) Iwakuma, T.: Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation, *Computers and Structures*, Vol. 34, pp. 239-250, 1990.
- 2) 後藤 文彦, 小林 裕, 岩熊 哲夫: オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析, 構造工学論文集, Vol. 43A, pp. 333-338, 1997.
- 3) Iura, M. and Iwakuma, T.: Dynamic analysis of the planar Timoshenko beam with finite displacement, *Computers and Structures*, Vol. 45, pp. 73-179, 1992.
- 4) 斉木 功, 岩熊 哲夫, Sharma, M.P., 井浦 雅司: 平面柔構造のための一動的数値解析, 構造工学論文集, Vol.42A, pp. 275-282, 1996.
- 5) Oran, C.: Tangent stiffness in space frames, *J. Structural Div.*, ASCE, Vol. 99, pp. 987-1001, 1973.
- 6) Bathe, K.J. and Bolourchi, S.: Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 14, pp. 961-986, 1979.
- 7) Goto, Y., Kasugai, T. and Obata, M.: Analysis of Greenhill problem by a co-rotational method, *J. Structural Eng.*, JSCE, Vol. 41A, pp. 411-420, 1995.
- 8) Argyris, J.: Excursion into large rotations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 32, pp. 85-155, 1982.
- 9) Meek, J.L. and Loganathan, S.: Large displacement analysis of space-frame structures, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 72, pp. 57-75, 1989.
- 10) Iwakuma, T., Hasegawa, A., Nishino, F. and Kuranishi, S.: Principle and numerical check of a stiffness equation for plane frames, *Structural Eng./ Earthquake Eng.*, JSCE, Vol. 4, pp. 73s-83s, 1987.
- 11) J. C. Simo and L. Vu-Quoc: ON the dynamics in space of rods undergoing large motions — A geometrically exact approach, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.66, pp. 125-161, 1988.
- 12) Ahmadi-Kashani, K.: Vibration of hanging cables *Computers and Structures*, Vol. 31, pp. 699-715, 1989.

(1997 年 9 月 26 日 受付)