

有限変位梁要素の幾何学的あるいは仮想仕事の定式化と 伸びひずみの考慮

GEOMETRIC OR VIRTUAL-WORK-BASED FORMULATION OF BEAM ELEMENTS IN FINITE DISPLACEMENTS AND CONSIDERATION OF EXTENSION

後藤文彦*・斉木 功**・清 成克***・岩熊哲夫****

Fumihiko GOTOU, Isao SAIKI, Shigekatsu SEI and Tetsuo IWAKUMA

*正会員 博(工) 東北大学助手 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-77 仙台市青葉区)

**正会員 工修 東北大学助手 大学院工学研究科土木工学専攻

***住友建設(株) (〒501-54 岐阜県大野郡荘川村大字大蔵字池野 356-4)

****正会員 PhD 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻

In finite displacement FE analyses of frames, local and global coordinate systems are usually introduced to take into account their geometric nonlinearity. In problems of in-plane bending of beams, however, it is reported that the geometric stiffness matrix does not improve accuracy and convergence characteristics of solutions in some formulations. Since the geometric stiffness represents extension effect of the beam-columns, focuses are brought into the effect of extension in numerical solutions of plane beam elements. Accuracy and convergence speed are examined for several methods of formulation of stiffness equations, and advantage of the tangent formulation is discussed.

Key Words : *geometric nonlinearity, extension of beams, convergence and accuracy of FEM*

1. はじめに

骨組あるいは板等の構造部材を有限変位状態まで有限要素解析する場合には、名称はともかく、要素局所座標系と全体座標系とを巧みに使って幾何学的非線形性を考慮するのが普通である。いくつかの方法が提案されているが、文献^{1),2),3)}ではいわゆる剛体変位除去の手法として標準的な方法が整理され比較されている。そこでは、局所座標系の取り方や、選択する変位関数の次数等で統一的に各種解法の特徴が比較されている。

その中にひとつ不明確な点がある。それは、幾何剛性行列の考慮、つまり、ひずみ変位関係における梁のたわみの微係数の2乗の項の考慮が、必ずしも解の正確さや収束速度を改善しないことである。そこで、もはや確立された手法ではあるが、その文献で用いられている仮想仕事に基づく手法と、もっと単純な幾何学的なアプローチ⁴⁾とを対比させながら、上の問題点を考察したい。幾何剛性行列の効果は、曲げによる軸線の伸びの効果でもあるので、この論文では、特に梁軸線の伸びの効果に着目して、各手法の解の特徴を数値的に整理する。

梁軸線の伸びを近似した、いわゆる有限変位微小ひずみ理論の範囲の梁の支配方程式は、もはや物理問題を対象とはしておらず、力の厳密なつり合いを満たす解を与えない。したがって、それに対応する接線剛性方程式が何らかのエネルギー的な考察からの対称性を有する必要がある。ここでは、そういった接線剛性方程式の対称性

についても考察を加えたい。

また、少なくともこの論文で定式化しているような剛体変位除去の手法は、必ずしも一貫したエネルギー的取り扱いに依っていないため、微分方程式で表された元の境界値問題との直接の対応が明確ではない。これではちょうど曲がり梁の折れ線近似⁵⁾と同様、有限要素法の標準的なエネルギーノルムによる誤差評価によって解の収束を確認することができない。文献^{2),3)}では、差分法で用いられている手法を用いて剛性方程式と微分方程式の整合性を検討しているが、それは解の正確さや収束性を直接は表していない⁵⁾。鋼構造部材の設計に当たってそういった幾何学的非線形解析が必要とされる場合には、数値解法の適用範囲を知るためにも、剛性方程式の整合性のみではなく、元の境界値問題との対応や解の精度も併せて明確にしておく必要がある。

2. 支配方程式

軸力と平面曲げを受ける弾性 Bernoulli-Euler 梁の支配方程式は、仮想仕事の原理と運動場の仮定に基づく簡明な定式化が既に示されており⁶⁾、ここではまっすぐな梁を対象とした方程式の列挙のみを行なう。

2.1 運動場と構成則

梁軸方向に x 軸を定義し、その軸線上の点の軸方向の変位を $u(x)$ 、それと直交する y 方向のたわみを $v(x)$ と

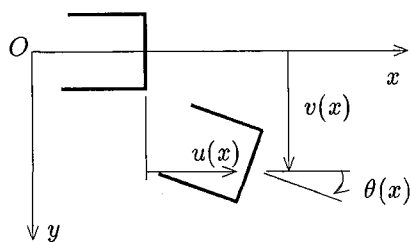


図-1 梁の変位成分

すると (図-1), 軸の伸びひずみは

$$\epsilon(x) \equiv \sqrt{g_0} - 1, \quad g_0(x) \equiv (1 + u')^2 + (v')^2 \quad (1)$$

と定義できる。ここにプライムは x に関する微分を表す。軸線の回転角, つまりたわみ角を $\theta(x)$ とすると

$$u' = (1 + \epsilon) \cos \theta - 1, \quad v' = (1 + \epsilon) \sin \theta \quad (2)$$

という関係が得られる。

発生する断面力のうち, 軸力を $N(x)$, 時計回りの曲げモーメントを $M(x)$ と表すと

$$N = EA\epsilon, \quad M = EI\theta' \quad (3)$$

という構成関係になるように座標を定義できる。ここに E は Young 率, A は断面積, I は断面二次モーメントである。

2.2 つり合い式

軸線上, 軸方向およびその直角方向に分布外力 $p(x)$, $q(x)$ が作用しているとする, つり合い式は

$$(N \cos \theta - V \sin \theta)' + p = 0 \quad (4a)$$

$$(N \sin \theta + V \cos \theta)' + q = 0 \quad (4b)$$

$$M' + V(1 + \epsilon) = 0 \quad (4c)$$

となる。 $V(x)$ はせん断力である。また, 長さ ℓ の梁の両端での最も単純な境界条件の表現は

$$u = \text{与} \quad \text{または} \quad \nu(N \cos \theta - V \sin \theta) = f$$

$$v = \text{与} \quad \text{または} \quad \nu(N \sin \theta + V \cos \theta) = s \quad (5)$$

$$\theta = \text{与} \quad \text{または} \quad \nu M = c$$

と与えられる。ここに f と s は端部に作用させた集中外力の x 方向成分と y 方向成分, c は時計回りの集中モーメント外力である。また ν は次式で定義される。

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{at } x = \ell \\ -1 & \text{at } x = 0 \end{cases} \quad (6)$$

2.3 微小伸びの近似方程式

もし軸線の伸びが非常に小さいと考えられる場合は, よく微小ひずみ理論という名で呼ばれるが, 1 に対して ϵ を無視できる。したがって前節に示した支配方程式のうち, モーメントのつり合い式 (4c) のみに

$$M' + V = 0 \quad (7)$$

という近似が可能である。式 (2) の ϵ も無視すると Elasticity になってしまうので, これは無視できない。近似したことから, 元々の物理現象のモデルからは多少離れ, 厳密にはつり合い状態の解を与えない。例えば長さ ℓ の片持ち梁の先端にせん断力 P を作用させ, 先端が軸方向片持ち端方向に $-u$ だけ変位したとしても, 片持ち端の支点反力モーメントは $P(\ell - u)$ に一致しない。

この伸びの影響は, 例えば片持ち棒の座屈において, 細長比 λ の逆数を

$$\beta = \frac{1}{\lambda} \equiv \frac{\sqrt{I/A}}{\ell} \quad (8)$$

と定義した時, 座屈荷重が

$$P_{cr} = \frac{EI}{\ell^2} \times \frac{1 - \sqrt{1 - \pi^2 \beta^2}}{2\beta^2} \quad (9)$$

となることからその効果を推測できる。つまり, この式の細長比の逆数 β の 2 乗の項が式 (7) の近似では無くなり, 上式 (9) は $\pi^2 EI / (4\ell^2)$ という普通の公式と一致する。つまり, 伸びの影響は細長比の 2 乗に反比例して効果が現れる。したがって, この論文の数値例では, 軸伸びの効果が明確になるように極端に短い梁を主に対象とする。通常の土木構造部材程度の細長比であれば, 微小ひずみ理論は工学的には十分な理論である。

3. 剛性方程式の定式化

ここでは, 剛体変位除去の手法のうち, 接線法²⁾と呼ばれるアプローチを用いる。

3.1 座標変換を用いた幾何学的な定式化

剛体変位除去の手法は, 変位した後の状態の一有限要素に沿って局所的な要素座標系を定義し, それと全体座標系との関係を節点変位で表すことによって幾何学的非線形性を取り入れるもので, 部材の抵抗則そのものは微小変位理論で良いと考える。要素座標系での剛性方程式が微小変位理論のそれでいいとすると, 最終的な全体座標系での剛性方程式は

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_2 \mathbf{T} (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 - \mathbf{D}) \quad (10a)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_3 \mathbf{T} (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 - \mathbf{D}) \quad (10b)$$

と書ける⁴⁾。ここに 1 列行列の下添字の 1, 2 は, 要素の左右端節点での量を区別し, 各行列は

$$\mathbf{f}_j^T \equiv [f_j \ell^2 / (EI) \quad s_j \ell^2 / (EI) \quad c_j \ell / (EI)]$$

$$\mathbf{d}_j^T \equiv [u_j / \ell \quad v_j / \ell \quad \theta_j], \quad (j = 1, 2) \quad (11)$$

$$\mathbf{D}^T \equiv [(\cos \theta_1 - 1) \quad \sin \theta_1 \quad 0]$$

で定義され, 座標変換行列が

$$\mathbf{T} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

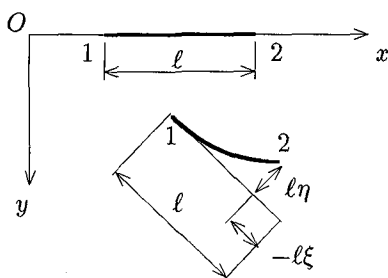


図-2 ξ と η の幾何学的な意味

で与えられる。また k_i ($i=2, 3$) はそれぞれ、微小変位理論の剛性行列 6×6 の右上および右下の 3×3 小行列であり、陽な形は後に示す。この行列の添え字は文献⁴⁾によるもので、 k_1 は元の剛性行列の左上 3×3 小行列であるが、ここで用いる接線法では現れてこない。

式 (10) で表される手法を簡単のために、「座標変換による幾何学的なアプローチ」と呼ぶことにする。このアプローチでは、幾何剛性行列を用いるか否か、剛性行列において伸びひずみ ϵ の項を含めるか否か、という点で 4 種類の計算が比較される。

3.2 仮想仕事を利用した定式化

後藤ら¹⁾のアプローチは、局所座標系での断面力と外力との間の関係を、前節の幾何学的な方法ではなく、仮想仕事の原理を用いて求めている。それを前節と同じ表現に式展開すると、式 (10a) のみが

$$f_1 = R^T k_2 T (d_2 - d_1 - D) \quad (13)$$

となる。異なるのは、右辺最初の座標変換行列が行列 R で置き換わることで、この行列は

$$R \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & \eta \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & \xi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

である。ここに ξ, η は

$$\xi \equiv \left(\frac{u_2 - u_1}{l} + 1 \right) \cos \theta_1 + \frac{v_2 - v_1}{l} \sin \theta_1 - 1 \quad (15a)$$

$$\eta \equiv \left(\frac{u_2 - u_1}{l} + 1 \right) \sin \theta_1 - \frac{v_2 - v_1}{l} \cos \theta_1 \quad (15b)$$

と表される。 ξ は伸びひずみのオーダー、 η が要素の相対回転角のオーダーで、図-2 に伸びひずみと曲率とを誇張して分かりやすくその意味を示した。

式 (10b) と式 (13) を用いた手法を簡単のために、「仮想仕事によるアプローチ」と呼ぶことにする。このアプローチでは、項 ξ, η で既に伸びの影響が含まれていると考えられるため、剛性行列には ϵ を考慮しない。した

がって、幾何剛性行列を用いるか否かの 2 種類の計算が比較の対象となる。

3.3 剛性行列

梁-柱も微小変位理論に準ずると考え、式 (4c) の伸び ϵ も含めた形の剛性行列 k_j は次のようになる⁴⁾。

$$k_j = (k_L)_j + z (k_{NL})_j, \quad j = 2, 3 \quad (16)$$

ここに、 k_L は通常の線形剛性行列であり、 k_{NL} はいわゆる幾何剛性行列である。また z は軸力を表し

$$z \equiv N l^2 / (EI) \simeq \xi / \beta^2 \quad (17)$$

というように、節点変位成分で近似することにした。

剛性行列の陽な形は以下のようである。

$$\begin{aligned} (k_L)_2 &= \begin{pmatrix} -1/\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12/(1+\epsilon)^2 & 6/(1+\epsilon) \\ 0 & -6/(1+\epsilon) & 2 \end{pmatrix} \\ (k_L)_3 &= \begin{pmatrix} 1/\beta^2 & 0 & 0 \\ 12/(1+\epsilon)^2 & 6/(1+\epsilon) & \\ \text{対称} & & 4 \end{pmatrix} \quad (18) \\ (k_{NL})_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/\{5(1+\epsilon)\} & 1/10 \\ 0 & -1/10 & -(1+\epsilon)/30 \end{pmatrix} \\ (k_{NL})_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/\{5(1+\epsilon)\} & 1/10 \\ \text{対称} & & 2(1+\epsilon)/15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし、 ϵ も式 (17)、(15a) を用いて $\epsilon = z \beta^2 \simeq \xi$ と節点変位で近似する。つまり、式 (15a) の ξ は伸びひずみ ϵ のひとつの近似表現である。

伸びが考慮された部分の次数は、必ずしもその行列要素に関係する l の数とは一致しない。これは Lagrange 的定式化をしているから当然の結果であって、剛性行列の一部の l のみが、伸びを含む $l(1+\epsilon)$ で置換される。その誘導は文献⁴⁾に詳しいので省略する。

4. 数値解の収束と精度

前節で定義した 2 種類のアプローチによる計 6 種類の剛性方程式は、弧長法を用いた Newton-Raphson 法によって繰り返し計算を経て解かれる。接線剛性行列の誘導⁴⁾は省略する。ただし、仮想仕事を用いたアプローチで、線形の剛性行列を用いた場合以外はすべて、その接線剛性行列が非対称であることを明記しておく。解析対象は、割線法との比較も考え、文献¹⁾にある例と同じものに限定する。要素数は 2 のべき乗で最大 64 ないし 128 とした。

ちなみに、式 (10) で幾何剛性行列を用いない場合の剛性方程式の整合度を差分の標準的な方法で確認してみると、式 (7) の微小伸びの場合に対応するつり合い式・

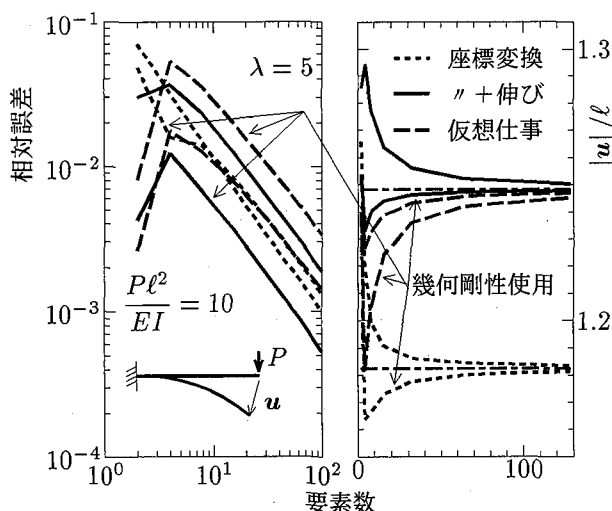


図-3 片持ち梁のせん断

構成関係と、幾何学関係は

$$\tan \theta = \frac{v'}{1+u'}, \quad g_0 = 1 \quad (19)$$

が得られた。第二式は伸びを完全に無視した *Elastica* の条件になっているが、整合性の定式化において出てきた付帯条件である。これより、伸びが適切に考慮されているか不明確であるため、以下の数値解析でも伸びの影響を確認する。また、幾何剛性行列等を用いた場合の整合性については、軸力や伸びを節点変位で表した本手法ではかなり面倒な計算になる上に、整合度は解の正確さと収束速度を直接示してくれないことから、これ以上の計算は続行しないことにした。

4.1 片持ち梁のせん断

図-3は、先端にせん断力 $P\ell^2/(EI) = 10$ を受ける片持ち梁の自由端の変位ベクトルの収束状況である。図の左は、第2節で示した支配方程式を、数値積分を用いて2点境界値問題として Shooting 法⁷⁾で求めた解を厳密解として相対誤差を出し、その絶対値の対数を要素数の対数値に対して表示したものである。ベクトルを選んだのは、 v と u がそれぞれの正解に収束するものの、収束速度が微妙に異なっていたから便宜上用いたもので、有限要素法として必ずしも良い指標ではない。

図中「座標変換」と表した点線の結果は、幾何学的アプローチで剛性行列の ϵ を無視した場合のものである。幾何剛性行列を用いても用いなくても、変位ベクトルは $|u|/\ell = 1.183$ ($u/\ell = -0.4375$, $v/\ell = 1.0986$) に収束している。この値は、第2.3節の微小伸びの理論解である。相対誤差を示した同図左の対応した結果を見ると、幾何剛性行列を用いた場合の解が一樣な収束ではないため折れ線にはなっているものの、精度も収束速度も、幾何剛性行列を用いない場合とほぼ同程度であり、収束速度は要素分割の2乗に比例した速い収束を見せている。楕円積分を用いた *Elastica* の解が $|u|/\ell = .9824$

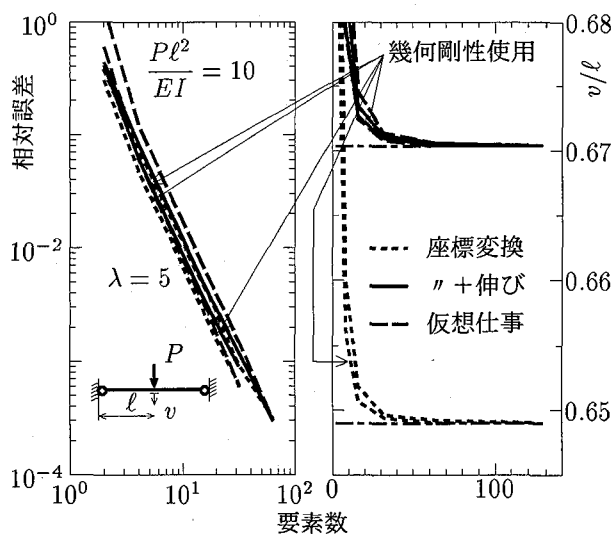


図-4 両端ヒンジ固定梁のせん断

($u/\ell = -.5550$, $v/\ell = .8106$) であることから、式 (19) で得られた整合方程式では不伸張の条件が得られているが、式 (2) の伸びの影響は正しく考慮されていることが分かる。

次に「仮想仕事」と表した破線の結果は、仮想仕事に基づくアプローチによるものであり、 $|u|/\ell = 1.248$ ($u/\ell = -.5111$, $v/\ell = 1.1390$) に収束している。この値は、第2.2節の有限ひずみ理論解である。明らかに幾何剛性行列を用いた方が同じ要素数では精度が悪いが、収束速度は図の左に示したように2者でほぼ同じで、やはり分割の2乗程度である。幾何剛性行列が解の改善を導かない現象は文献¹⁾で指摘されたのと同じである。

実線は、幾何学的アプローチを用いながら、剛性行列に伸びの影響を含めた場合の結果である。図の左側を見ると、一樣な収束はしないものの、このアプローチで幾何剛性行列を含めた場合の解が最も精度が良くなるのがわかる。ただ、収束速度は他と同じで要素分割の2乗である。また、この伸びを含めた剛性行列を用いた場合の数値解は、当然伸びを考慮した第2.2節の理論解に収束している。

4.2 両端ヒンジの固定梁

次に、伸びひずみの影響が支配的になる図-4の両端ヒンジで固定された梁を解析する。左右対称な系であるため、载荷点ではたわみ v のみしか発生しないので、その点でのたわみで精度および収束状況を考察する。なお、この場合も前節と同じ細長比を持つ極端に短い梁で、外力が $P\ell^2/(EI) = 10$ になった時の解を用いている。また、図示したように梁の長さ ℓ は半スパンで定義し、図の縦軸や細長比もそれで算定してある。

この場合も、Shooting 法による解と比較をしたが、どのアプローチの結果も一樣な収束を見せている。前節と同様、幾何学的アプローチで伸びを考慮しない剛性行

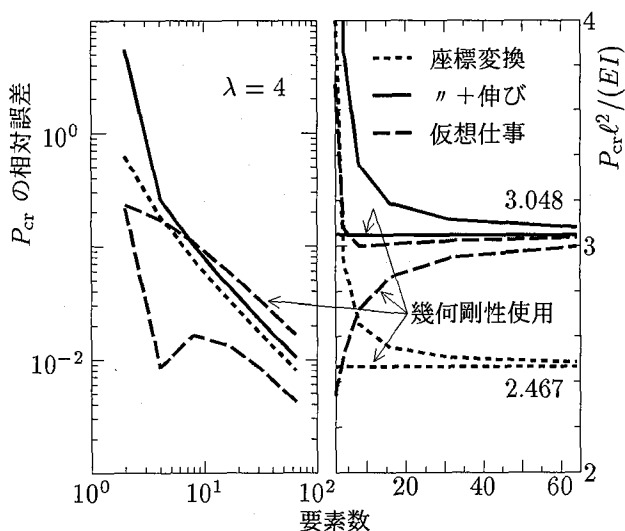


図-5 片持ち棒の曲げ座屈

列を用いた場合のみ、微小ひずみ理論解 0.6489 に収束し、それ以外はすべて有限ひずみ理論解 0.6703 に収束している。同図の左を見るまでもなく、精度も収束速度も各アプローチの間に差異がほとんどなく、やはり要素分割の 2 乗の速度での厳密解への収束を示している。幾何剛性行列による解の改善があまり顕著でないのは、曲げによる伸びひずみが卓越しないことが原因である。

4.3 片持ち棒の曲げ座屈荷重

幾何学的非線形性が最も重要な要因である座屈現象を検討する。やはり極端に短く、細長比が $\lambda = 4$ の場合を対象とする。

ただここでの座屈荷重は、剛性方程式の接線剛性行列の行列式が零になる点で定義した。接線剛性方程式は、仮想仕事によるアプローチで線形剛性行列を用いた場合以外はすべて非対称になり、エネルギー的な観点から分岐として扱うことはできないが、少なくとも接線剛性行列の行列式が零になった瞬間は、Newton-Raphson 法の繰り返し解が求まらなくなる点なので、それをもって座屈点と定義した。後述するように、初期不整を入れて数値解析すると、この点付近で変位が急増する。

図-5の右には、要素分割と得られた座屈荷重との関係を示してある。幾何学的アプローチで幾何剛性行列を用いた場合の実線および点線を見ると、剛性行列に伸びの影響を考慮してもしなくても、解は 4 要素で式 (9) から求めた厳密解と 4 桁一致する。2 要素の場合でも相対誤差は、微小ひずみの場合が 0.08%、有限ひずみの場合が 0.07% と、非常に精度が高いことがわかる。

幾何学的アプローチで線形剛性行列のみを用いた場合の解の収束状況は、同図左の点線と実線とで表されているが、伸びを考慮してもしなくても、ほぼ同程度の精度で、収束速度は要素分割の 1 乗程度となっている。前節までの変位の収束速度より 1 次オーダーが落ちるのは、

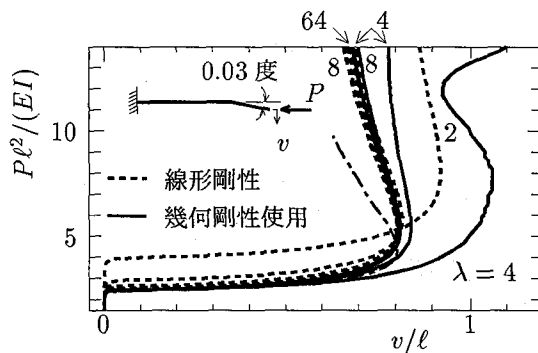


図-6 幾何学的アプローチで伸びを無視

変位法を用いた解析であることから明らかである。

一方、仮想仕事を用いたアプローチの解は破線で示してあるが、この場合も片持ち梁、固定梁の結果と同様、幾何剛性行列を用いることが解の改善を示さない。ただ図の左側を見ると、一様ではないものの、収束速度は他とほぼ同じで、幾何学的アプローチの場合と同様、分割数の 1 乗程度であった。幾何剛性行列を用いない手法の中での精度はこれが最も優れている。

幾何剛性行列が解の改善に結び付かないのは、式 (14) で導入した行列要素 ξ, η が、幾何剛性行列と同様の曲げによる伸びの影響をも既に含んでいるからだと考えられる。また、ここまでの解析で、仮想仕事に基づいたアプローチの解が、有限ひずみの解にしか収束しないことから、式 (4c) のモーメントとせん断力のつり合い式における伸びの影響も、この ξ, η で考慮されているのは明らかである。つまり、仮想仕事に基づくアプローチでは、伸びの影響が既に完全な形で考慮されてしまっているため、幾何剛性行列の本手法のような付加の仕方が、伸びの影響を統一的に扱っていないことを示唆している。

4.4 座屈後挙動

最後に、前節と同じ片持ち棒の、座屈後挙動における各アプローチによる解の違いを考察する。無理無く座屈後挙動が追えるように、最も自由端に近い一要素のみに 0.03 度の折れ曲がりを与えるような初期不整を導入した。要素数が増加する程、この与え方の初期不整の影響は少なくなる。座屈後の数値解が第 2 節にあるそれぞれ対応した支配方程式の Shooting 法による解に収束することは、既に文献⁴⁾に示してあるのでここでは割愛し、各アプローチの解同志の比較のみに注目する。

(1) 極端に短い棒の場合

まず、極端に短い棒で細長比が $\lambda = 4$ の場合を検討する。図-6は、幾何学的アプローチで剛性行列での伸びを無視した場合の結果で、図中の曲線そばの数字は要素数を示している。文献¹⁾の、ほぼ同様の有限要素近似である A4 の要素の結果、つまり文献中の図 2.10(a) とほとんど同じである。もちろん、本手法 2 要素の場合には、相対的に大きな初期不整の影響と幾何剛性行列の存

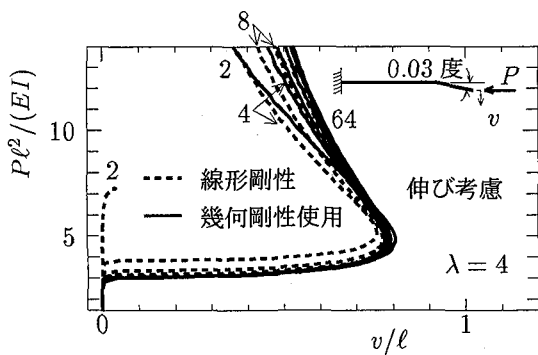


図-7 幾何学的アプローチで伸びを考慮

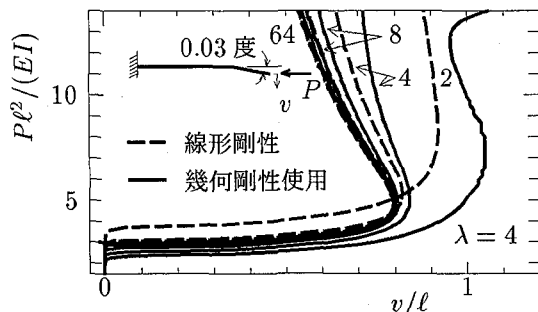


図-8 仮想仕事に基づくアプローチ

在により、2次座屈荷重に近づくにつれてさらに大きな変位が発生しているが、4要素で十分な精度が得られている。細い一点鎖線は楕円積分を用いたElasticaの解であるが、やはり式(2)の伸びは正しく考慮されていることが分かる。

図-7には伸びの影響を剛性行列に含めた場合の結果を示した。この場合は2要素で幾何剛性行列を用いてない場合の解は、前節の座屈荷重の精度も悪く、結局座屈後解析は継続できなかった。しかし、それを除けば、線形剛性行列のみの場合の座屈点の精度が若干劣るものの、どの要素も座屈後挙動まで含めて、ほぼ工学的には問題のない程度の精度で解が求まっている。この場合は座屈後も幾何剛性行列が解を明らかに改善している。

次に、仮想仕事アプローチの結果を図-8に示したが、幾何剛性行列を用いない場合同志を比べた場合、図-6の幾何学的アプローチで伸びを無視した場合よりも若干精度が悪く見える。前節で示したように幾何剛性行列が座屈点の精度を改善しないと同時に、座屈後挙動の精度の改善にもつながらない。また、幾何剛性行列を用いた場合の64要素の解析は、原因は特定できなかったが、数値計算が途中でできなくなった。伸びの影響を統一して扱っていないための不具合と考えられる。

有限ひずみの解に収束する2方法、つまり、幾何学的なアプローチで伸びの項を剛性行列に含めた図-7の場合と、仮想仕事アプローチで線形剛性行列のみを用いた図-8の場合の結果を比較したのが図-9である。幾何剛性行列を用いない場合、座屈点の精度は仮想仕事アプ

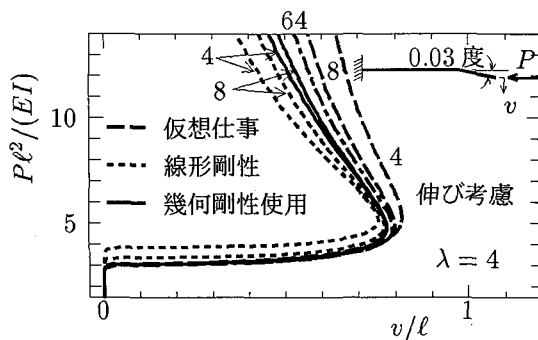


図-9 2アプローチの差異

ローチの方が優れているが、座屈後挙動は64要素による解との相対的な比較をする限りは、有意な差は現れない。この短柱の場合の精度の順番を取ってつけると、幾何剛性行列を用いた幾何学的なアプローチが一番良く、次が仮想仕事に基づくアプローチであった。

結局、有限ひずみの場合に接線剛性行列が非対称であっても、きちんと厳密解に収束している。実際に細長比が5の場合の一要素の接線剛性行列を見ると、幾何学的アプローチで伸びの影響も幾何剛性行列も考慮しない場合、その3行目と3列目にのみ非対称成分が現れる。その行列要素の大きさの差は大きいもので2倍程度にまでなるような非対称性を示しているが、それでも数値的には厳密解に収束している。仮想仕事に基づくアプローチと幾何学的アプローチの違いは、式(15)で定義された ξ, η の考慮だけであり、この項で対称化できていた。 ξ, η が図-2で示された量であることから考察すると、この2項の絶対量は有限要素長を短くすることによって変形のオーダーまで小さくできることから、少なくとも弾性解析の範囲内を対象とした問題に限定すれば、非対称性が害をもたらしなないと考えられる。

(2) 細長い棒の場合

次に細長比が $\lambda = 100$ の細長い棒を扱う。伸びを無視した場合の結果を図-10に示したが、前節の同様のアプローチとほぼ同じ様な精度に見える。細長い棒のため、伸びを考慮した場合も、仮想仕事アプローチの場合もほぼ同様の結果を示したため、図を省略した。線形剛性行列のみを用いた場合の座屈点の精度だけは、仮想仕事によるアプローチの結果の方が若干優れていた。また64要素の解は、この程度の細長比では楕円積分を用いたElasticaの結果とほとんど重なっている。

前節同様、同じ解に収束する2方法、つまり、仮想仕事によるアプローチで幾何剛性行列を用いない場合と、幾何学的アプローチで伸びを考慮した剛性行列を用いた場合の結果を比べて、2手法の違いを示したのが図-11である。これも幾何学的アプローチで線形剛性行列を用いた場合の座屈点の精度に若干の問題があるが、それを除けば、どのアプローチもほぼ同様の精度を示している。少ない要素数の場合の精度に取って順番をつけ

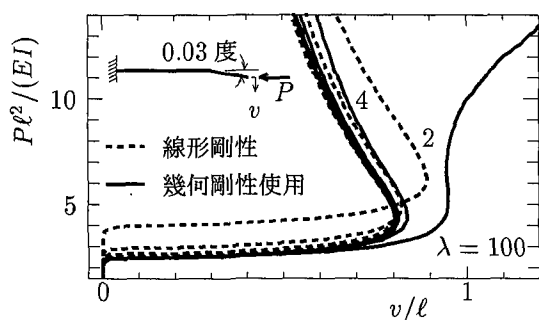


図-10 細長い棒の幾何学的アプローチで伸びを無視

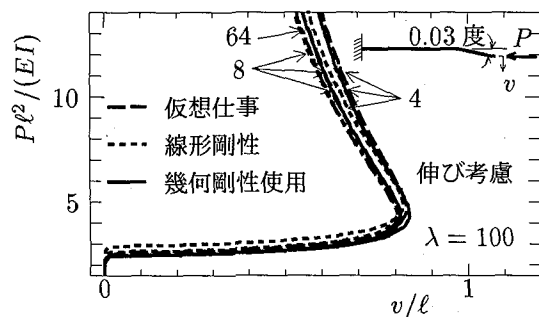


図-11 細長い棒の場合の2アプローチの差異

れば、前節で示した短柱の場合と逆転し、幾何学的アプローチで線形剛性行列のみを用いた点線の場合が最も精度が良い。つまり、通常の土木構造部材を対象とする限り、線形剛性行列のみを用いた幾何学的なアプローチによる解析で十分な精度の解が得られる。

(3) 接線法と割線法の収束速度

前節の細長い片持ち棒の場合の結果を、文献¹⁾の結果と比較することによって、接線法と割線法の収束速度の違いを考察する。座屈後の解の精度の比較として文献では、 $P l^2 / (EI) = 3.05$ での両方法の結果の比較が示されている。本論文の接線法が完全には文献¹⁾の接線法とは同じ定式化に依ってはいないため、まず、本論文の2つの方法、つまり、幾何学的アプローチと仮想仕事に基づくアプローチの精度と文献の結果とを比較する。図-12の点線と一点鎖線がそれぞれ、後藤ら¹⁾の手法による接線法および割線法の解の精度である。縦軸は、厳密解に対する数値解の比率で表した誤差であるが、文献の曲線は図から直接読み取ったもので、本論文の結果は64要素に幾何剛性行列を用いた結果を厳密解とみなした。本手法による実線で示された結果は比較のために、幾何剛性行列も伸びの影響も含めていない。

仮想仕事に基づくアプローチの方は、図-11に示したように座屈荷重の精度は他より良いため、この荷重レベルではより良い精度の結果を示しており、面白いことに、この接線法の解が文献の割線法に若干劣る程度の高精度を有している。これに対して、単純な幾何学的なアプローチによる結果は、座屈荷重の精度が悪いことが主原因となって精度が落ち、収束も遅くなり、ほとんど文

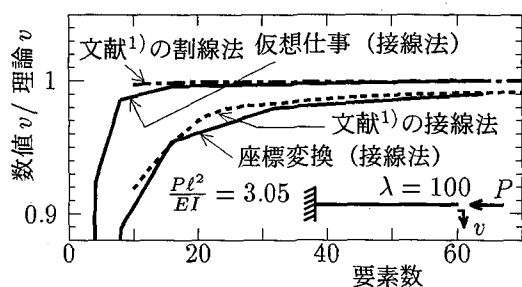


図-12 文献¹⁾の割線法・接線法と本手法の接線法

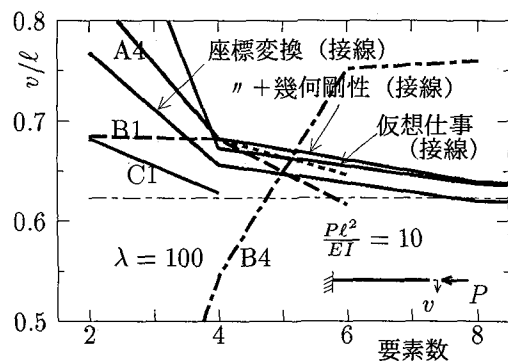


図-13 接線法と割線法の収束の違い

献の接線法の結果と重なっている。つまり、幾何学的なアプローチで伸びを考慮しない線形剛性行列のみを用いた本手法は、後藤らの接線法と同じ程度の誤差を含んでいる。

幾何学的なアプローチで伸びを考慮しない線形剛性行列のみを用いた接線法による解析は、このように一見精度と収束速度が悪いように見えるが、この荷重レベルでの精度には、座屈点の精度と、大変位による幾何学的非線形性に関する精度とが同居してしまっている恐れがある。そこで、ここでは座屈点の精度の影響を受けないもっと高い荷重レベル $P l^2 / (EI) = 10$ の値を比較する。座屈後の解の精度については、文献の図からは要素数が8程度までしか判別できないので、その範囲でたわみの解の精度を比較する。

図-13にその結果を示したが、最も精度が良いのは、C1と表示した割線法の結果(実線)であるが、これは、ひずみ変位関係に高次項を含めた上で、たわみと軸方向変位共に3次の多項式を用いた割線法要素の結果であり、4要素でほぼ正解に収束するという高次要素の優位性を示している。変位関数を同様に両成分共に3次多項式とし、ひずみ変位関係を梁-柱程度とした場合の割線法の結果がB1で示した結果(破線)である。これは、高次を取った変位関数の効果が、ひずみ変位関係を簡単なものにしたことで薄れ、精度がC1より劣っている。ちなみに、細い水平の一点鎖線は本手法で幾何剛性行列を用いた64要素による結果である。

「座標変換(接線)」とある実線が、伸びを考慮しない線形剛性行列のみを用いた幾何学的なアプローチによ

る本接線法の解である。これに対し、図中一部が実線と重なっているA4と表示された点線が、この手法と同じ線形のひずみ変位関係と、たわみ v に3次、軸方向変位 u に1次の多項式を変位関数として用いた要素である。この手法の収束速度（この線の傾き）はほぼA4と同じように見えるが、精度は良く、C1とA4の間程度の誤差に留まっている。ちなみに「仮想仕事（接線）」と付した実線が、文献の接線法に対応するが、この要素数程度なら、文献の同じ近似レベルの割線法の結果A4とほぼ同程度の精度が得られている。

つまり、幾何学的な線形微小ひずみ剛性行列を用いた本アプローチは、座屈荷重レベルでは文献¹⁾の接線法と同精度であるのに対し、より高い荷重レベルでは割線法と同精度あるいはやや高精度となる。このことから単純に、本手法は座屈荷重を求める精度は接線法程度しかないが、幾何学的非線形性を含めた解の精度は割線法並みであると結論付けることもできる。

しかし、文献^{2),3)}で検討したのは剛性方程式の整合度であって解の精度そのものではなく、エネルギーノルムで通常評価される有限要素解の収束速度でもない。また、前述のように図-12,13に示したように、仮想仕事に基づく解の精度は割線法と同程度であることも併せて考えると、方程式の整合度が劣る接線法も割線法と同程度の解の精度と収束速度を持っていると結論付けることもできる。

最後に図中のB4と表示した一点鎖線は、仮想仕事を用いた本アプローチに幾何剛性行列を用いた結果に対応する割線法の結果であるが、他と比べて精度も収束も悪い。本手法のうちの幾何学的アプローチに幾何剛性行列を用いた場合の結果を「 κ +幾何剛性（接線）」で示しているが、要素数が2,4ではA4の結果とほぼ重なっている。それ以上の要素数ではA4より精度が若干劣るものの、このアプローチに対応するはずのB4モデルに比べればはるかに高精度で収束速度も優れている。

5. 結語

特に目新しいテーマではないが、非線形解析が日常的に広く用いられるようになってきた昨今、数値解と元の境界値問題との対比を少し詳細に、しかし数値的に追跡してみた。注目したのは、幾何剛性行列や伸びひずみの扱いと効果、また要素の局所座標系の取り方の違い等であり、次のような知見が得られた。

- 仮想仕事に基づき伸びの影響を考慮したアプローチにおいて、さらに幾何剛性行列を併用することは、伸びの影響を統一的に扱っていない可能性があり、解の改善は見られない。
- 単純な幾何学的アプローチを用いると、座屈点および座屈後挙動のいずれに対しても、幾何剛性行列が解の改善を促す。しかし、細長い梁のように一般の土木構造部材に対しては、線形剛性行列のみで十分な精度の解が得られる。
- 剛性方程式の差分方程式としての整合度のいくつかは、幾何剛性行列を用いる等によって上がると考えられているが、数値解の精度と収束速度については、各アプローチでそれ程極端な違いは見られない。
- 限定された解析結果のみの比較ではあるが、割線法とここで用いた接線法の違いもほとんどなく、場合によっては接線法の方が優れていることもある。

なお、ここで用いた極端に短い棒は、やはり細長比の2乗に反比例する効果でせん断変形の影響を含んでいる⁴⁾はずだが、伸びの影響に限定して比較を明確にするためにここで用いた例題であるため、せん断変形は無視した。

参考文献

- 1) 土木学会鋼構造委員会鋼構造終局強度研究小委員会編：鋼構造物の終局強度と設計—付録編，鋼構造シリーズ6，土木学会，pp. 15-48, 1994.
- 2) 後藤芳顕・春日井俊博・西野文雄：局所移動座標の選択が平面骨組の有限変位解析の精度に及ぼす影響，土木学会論文集，第386号/I-8，pp. 311-320, 1987.
- 3) 後藤芳顕・吉光友雄・小畑誠・西野文雄：平面骨組の有限ひずみ・有限変位理論の解に収束する2種類の数値解法と精度特性，土木学会論文集，No. 428/I-15，pp. 67-76, 1991.
- 4) Iwakuma, T.: Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation, *Computers and Structures*, Vol. 34, No. 2, pp. 239-250, 1990.
- 5) Strang, G. and Fix, G. J.: 有限要素法の理論，（三好哲彦・藤井宏共訳），培風館，1976.
- 6) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，第237号，pp. 11-26, 1975.
- 7) Roberts, S. M. and Shipman, J. S.: *Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods*, Elsevier, New York, 1972.

(1997年9月26日 受付)