

荷重モードの変動に対する平面アーチの 分岐座屈点の連続計算法

TRACING THE BIFURCATION POINTS OF A PINNED CIRCULAR ARCH SUBJECT TO
STEPWISE CHANGING LOADING MODES

藤井文夫¹⁾， 森明子²⁾， 川原克美³⁾

Fumio FUJII, Akiko MORI and Katsumi KAWAHARA

1) Dr.-Ing., 岐阜大学工学部 (〒501-1112 岐阜市柳戸 1-1)

2) 名古屋大学大学院工学研究科 計算理工学専攻

3) 建設省

The present study proposes a computational procedure in nonlinear stability analysis of structures to successively compute the bifurcation points for different loading modes. The reference load vector is not fixed, but will change in a stepwise manner. The solution method of the stiffness equations with the singular stiffness matrix is necessary to compute the next target from the computed stability point. The pinpointing iteration will then be simply applied near the target. In a pinned circular arch example, bifurcation points for symmetric loading modes are computed.

Key Words: Stability, Bifurcation, Singular Stiffness Matrix, Eigenvalue and Eigenvector

1. はじめに

構造系の非線形座屈解析では、終始固定した荷重モードに対するつり合い経路を軌道追跡し、経路上に出現する座屈点の座標（荷重変数と変位）を評価するのが通常であり、別の異なる荷重モードに対しては原点に戻って最初から全く同じ操作を繰り返す必要がある。

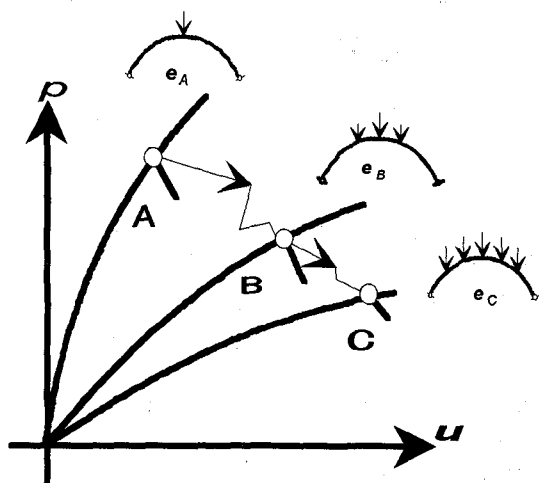


図-1 荷重モードの変動に対する特異点の変動
(荷重モードに鉛直荷重を付加した場合)

これに対して本論文のように、異なる荷重モードに対する座屈挙動の依存性を調べる研究は、非線形有限要素法では荷重モードの変動に対する座屈荷重の敏感度解析に帰着され、Plaut¹⁾、Waszczyszyn/Cichon/Radwanska^{2,3)}らの先駆的研究や、国内ではChoong/Hangai/Oda⁹⁾らの事例がある。しかしながらこれらの研究では、高々2～3種類の独立した荷重モードの線形結合で表現できる荷重モードに対する、座屈点のStability Boundaryに沿う動きを追っているに過ぎない。計算実用性の立場からは、より自由に荷重モードを制御する必要性がある。

そこで本論文では、荷重モードがより自由に変動する場合の分岐座屈点の連続計算法を提案する（図-1）。初期荷重モードだけについては、そのつり合い経路を原点から通常の方法で軌道追跡し、分岐座屈点を精算する。そして精算したこの分岐点で荷重モードにわずかな変動を与え、変動後の新しい荷重モードに対する分岐点を逐次連続的に計算できる手続きを考案する。

本論文では制御する荷重モードの変動が座屈モードに直交しなければならないという制約があるものの、これまでの研究より自由に荷重モードを変化させることができる。荷重モードの変動が座屈モードに直交しない場合は、数理的な取り扱いが大きく異なるため¹³⁾、混同を避けるためにも本論文では対象としない。

解析対象として平面円形アーチ（図-2）を選び、これに対称荷重モードを漸変させたときの分岐座屈点の座標変動を連続的に計算する。必要とされる数学的基盤

は、特異点の反復精算法と特異点での剛性方程式の解法の2つであるが、これらの基礎理論はすでに著者らによって確立されている^{4,5,6,7,8)}。本論文はこれら基礎研究の成果の応用である。必要以上の重複を避けるため、発表済みの理論は最低限の概要のみにとどめることにする。

2. つり合い経路の基礎方程式

N自由度の節点変位 $\mathbf{u}$ を持つ系を、荷重モード $\mathbf{e}$ と荷重変数 p で載荷するとき、非線形つり合い方程式

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1)$$

は、つり合い経路 ε を定義する。 $\mathbf{E}$ は不つり合い力で、

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - p \mathbf{e} \quad (2)$$

で定義される。 $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ は変形の形態 $\mathbf{u}$ による内部抵抗力であり、 $p \mathbf{e}$ は載荷状態を表す。式 (1) をつり合い点で線形化すると、

$$\mathbf{K} d\mathbf{u} - dp \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (3)$$

となり、接線剛性行列 $\mathbf{K}$ は、

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{u}} \quad (4)$$

である。つり合い経路上の特異点の特定には

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\lambda = 0 \quad (6)$$

を満たすクリティカルな固有ペア $(\lambda, \boldsymbol{\theta})$ に注目するのが工学的である⁷⁾。

3. 特異点の反復精算法^{4,5,6,8)}

つり合い経路上の座屈点を特定する特異点方程式

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \lambda = 0 \end{cases} \quad (7, 8)$$

をNewton-Raphson法で解くために、式(7, 8)を目標点(特異点)の近傍で線形近似し、

$$\begin{cases} \mathbf{K} \delta \mathbf{u} - \delta p \mathbf{e} = -\mathbf{E} \\ \delta \lambda = -\lambda \end{cases} \quad (9, 10)$$

とする。まず式(9)を $\delta \mathbf{u}$ について解く。

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_E + \delta p \mathbf{u}_e \quad (11)$$

ただし、

$$\delta \mathbf{u}_E = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{E} \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_e = +\mathbf{K}^{-1} \mathbf{e} \quad (13)$$

である。 $\delta \mathbf{u}$ 方向の剛性行列の方向微分 $\Delta \mathbf{K}$ を中心差分により求め、式(11)における各項との対応から

$$\Delta \mathbf{K} = \Delta \mathbf{K}_E + \delta p \Delta \mathbf{K}_e \quad (14)$$

とする。さらに式(14)を固有値の線形感度公式

$$\delta \lambda = \boldsymbol{\theta}^T \Delta \mathbf{K} \boldsymbol{\theta} \quad (15)$$

に代入して、

$$\delta \lambda = \delta \lambda_E + \delta p \lambda_e \quad (16)$$

を得る。ここに

$$\delta \lambda_E = \boldsymbol{\theta}^T \Delta \mathbf{K}_E \boldsymbol{\theta} \quad (17)$$

$$\lambda_e = \boldsymbol{\theta}^T \Delta \mathbf{K}_e \boldsymbol{\theta} \quad (18)$$

である。式(16)を式(10)に代入して δp について解き、

$$\delta p = -\frac{\lambda + \delta \lambda_E}{\lambda_e} \quad (19)$$

を得る。したがって変位修正子についても

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_E + \delta p \mathbf{u}_e \quad (20)$$

と求まる。

初期荷重モード $\mathbf{e}_A$ のつり合い経路 ε_A を追跡し、上の反復操作で精算できた分岐点を点Aとする(図-1)。この時点で座標 $(\mathbf{u}_A, p_A)$ 、載荷状態 $p_A \mathbf{e}_A$ 、それに剛性行列のクリティカルな固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}_A$ はすべて既知となる。この現在点Aから、つぎに目標とする分岐点B(図-1)に移行する手続きを以下に解説する。

4. 特異点Aでの剛性方程式の解法⁷⁾

特異点Aで剛性方程式

$$\mathbf{K} d\mathbf{u} = dp \quad (21)$$

を解くことを考える。ただし右辺項 dp は、式(21)の解が存在するための条件

$$\boldsymbol{\theta}_A^T dp = 0 \quad (22)$$

を満たすようゼロベクトル ($dp=0$) も含めて選択する必要がある⁷⁾。なお、式(22)を満たさない右辺項 dp の場合は、式(21)の解が存在しないため、全く異なる数理的扱いが必要となる¹³⁾。本論文では右辺項 dp が式(22)を満たすように荷重モードを変動させることがポイントである。

解が存在するように選ばれた dp に対しては、式(21)の一般解は次のようになる。

$$d\mathbf{u} = C \boldsymbol{\theta}_A + d\mathbf{u}_p \quad (23)$$

ここに固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}_A$ は余解を構成し、特解 $d\mathbf{u}_p$

からは θ_A を排除しておく。すなわち、

$$\theta_A^T du_p = 0 \quad (24)$$

である。特解 du_p の評価には、

$$\tilde{K} = K + \lambda^* \theta_A \theta_A^T \quad (25)$$

と剛性行列を正則化する。この際、設定値 λ^* の値は理論的には全く任意である⁷⁾。そして、

$$\tilde{K} du_p = dp \quad (26)$$

を du_p について解く。式 (23) の一般解の中の余解の係数 C は、扱う荷重モードが対称である場合には容易に決定できる (後述の式 (37))。

なお式 (25) の操作により、本来の剛性行列のバンド構造が一般に消滅するが、これを避けるためには Nelson¹⁴⁾ による式 (21) の解法も可能である。

5. 対称荷重モードの場合の手続き

連続計算法の手続きを、対称円形アーチ (図-2) について解説する (具体的な構造系を設定する方が工学的なイメージがわく)。

本論文では荷重モード e が対称である場合のみを考える。荷重モード e の規定の仕方として、例えば変動前の荷重モード

$$e_A^T = (a_1, a_2, \dots, a_N) \quad (27)$$

と、変動後の荷重モード

$$e_B^T = (b_1, b_2, \dots, b_N) \quad (28)$$

に対して、例えばそれぞれ

$$|e_A| = 1 \text{ \& } |e_B| = 1 \quad (29, 30)$$

と正規化するよりは、本論文のように下向き鉛直節点荷重 (負値) のみを考えるときは、荷重モードのなかでの鉛直節点荷重の総和を

$$\sum_{j=1}^N a_j = -1 \text{ \& } \sum_{j=1}^N b_j = -1 \quad (31, 32)$$

のように規定する方が工学的である (この条件は必ずしも必要でなく、あくまで荷重モードを制御するための便宜上のものである)。この結果、荷重モードの変動

$$de^T = (de_1, de_2, \dots, de_N) \quad (33)$$

については、

$$\sum_{j=1}^N de_j = 0 \quad (34)$$

となる。新しい荷重モードは

$$e_B = e_A + de \quad (35)$$

で決まる。このとき、荷重モードの変動 de は対称モードとなる。分岐点Aでの固有ベクトル θ_A は図-2の円形アーチの場合、左右逆対称モードとなる。このため例えば

$$dp = p_A de \quad (36)$$

とすれば、解の存在条件の式 (22) を容易に満足できる。

目標点Bの u_B は対称変形であり dp も対称であるから、式 (26) より特解 du_p も対称モードである。しかし円形アーチ (図-2) の分岐点での固有ベクトル θ_A (余解) は逆対称モードである。したがって式 (23) の一般解のなかで、

$$C = 0 \quad (37)$$

となる。

つぎの目標点Bを精算するための反復法の初期値 (予測子) をまとめるとつぎのようになる。変形形態と荷重変数については

$$u_B \cong u_A + du_p \quad (38)$$

$$p_B \cong p_A \quad (39)$$

であり、 θ_B の計算に必要な初期値 (予測子) には θ_A を採用する。初期値 (予測子) の設定後は、

$$\begin{cases} E_B = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \quad (40, 41)$$

をNewton-Raphson 法で解くことにより目標点Bの反復精算が可能である。以上の操作を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots$ (図-1) と繰り返し分岐点を連続的に計算する。

6. 円形アーチの対称性と荷重モードの対称性について

解析対象の左右対称アーチ (図-2) の分岐座屈モードは左右逆対称であり、この逆対称の座屈モードと、対称荷重モードの変動との直交条件 (式 (22)) は容易に満たされその結果、式 (21) の解法が可能となる。

荷重モードが左右対称であることは必ずしも分岐点の連続計算法を可能とする必要条件ではなく、特異点での剛性方程式の解の存在条件である式 (22) が満足されることが本質的に重要である。しかし一般的荷重モードについて仮に式 (22) が満足されたとしても、式 (23) の一般解のなかでの余解を評価する手だてがない。

本論文では対称荷重モードを仮定することにより、式 (22) が満足されるばかりか、一般解のなかの余解の重み C が式 (37) のように容易に決めることのできる利点に着目した。荷重モードの対称性を仮定することにより、荷重モードの制御方法に制限が加わるが、それでも従来の研究よりは、自由に荷重モードを変動させることができ、しかも効率的な分岐座屈点の連続計算が可能となる。これが本論文の特徴である。

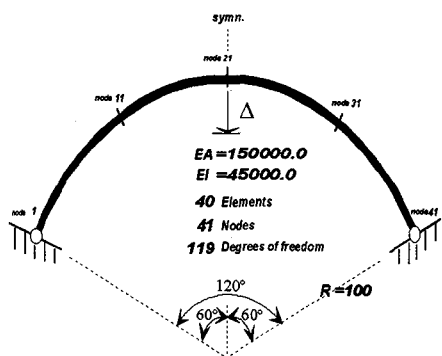


図-2 ピン支持された円形アーチ

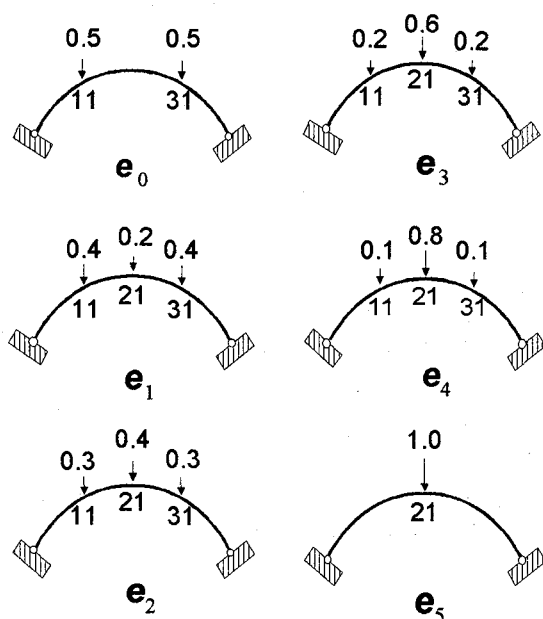


図-3 荷重モードの漸変パターンC ($e_0 \rightarrow e_5$)

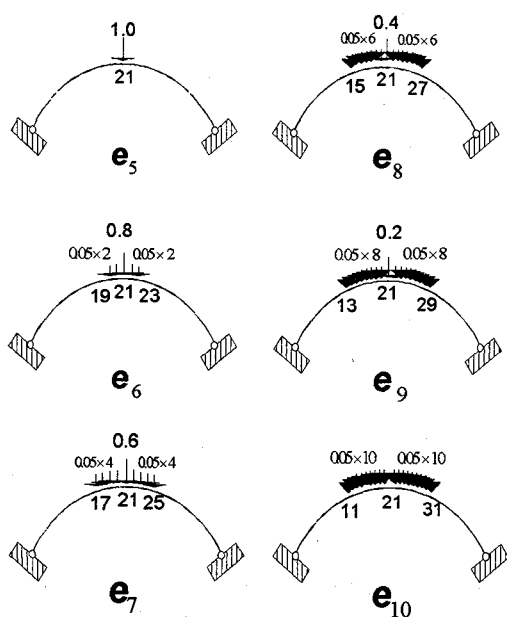


図-4 荷重モードの漸変パターンD ($e_5 \rightarrow e_{10}$)

7. 計算例

図-2のピン支持平面円形アーチを40本の直線要素に離散化する(119自由度)。荷重モードのなかの鉛直節点荷重の総和を式(31,32)のように単位量(-1.0)に抑えて荷重モードを規定する。鉛直節点荷重の割り振りの参考に代表的な節点番号も図-2に示した。荷重モードの漸変方法として漸変パターンC(図-3)と漸変パターンD(図-4)の2種類を考える。

まず図-3にある漸変パターンCでは、節点11と節点31とにそれぞれ鉛直荷重0.5が作用する荷重モード(e_0)からスタートし、これらの鉛直荷重を中央節点21に徐々に集めてくる。最終的には中央節点21に単位鉛直荷重が作用する荷重モード(e_5)まで変化させる。

つぎにもう一つの漸変パターンDでは図-4に示すように、 e_5 から出発し中央節点21の鉛直荷重1.0を今度は逆に、中央節点21の両側にあり、中央節点21に近い節点から徐々に振り分けて行く。最終的には節点11から節点20まで、そして節点22から節点31までの計20個の節点に0.05ずつ作用する荷重モード e_{10} まで変化させる。

この2種類の漸変パターンの本質的違いは、漸変パターンCでは単に2つのモードの重みが変わるだけであるのに対して、漸変パターンDでは、逐次新しいモードを取り込んでいることである。

この2つの漸変パターンに対する特異点の連続計算法の結果をそれぞれ図-5と図-6に示す。代表変位として中央節点21の鉛直変位 Δ (下向きを正值)を横軸に、各荷重モードの荷重変数を縦軸にとり、計算された分岐点をプロットした。図中の矢印が分岐座屈点の連続計算法の計算方向を示す。いずれも何ら問題なく連続的に特異点を計算できた。分岐座屈荷重は、漸変パターンCでは減少傾向に、漸変パターンDでは増加傾向にあるのは、工学的な考察からも容易に理解できる。各荷重モードの分岐点の座標は、原点からその主経路に沿って計算した結果と照合して、両者が一致することを検証してある。

8. まとめ

特異点での剛性方程式の一般解の構成法と分岐点の反復精算法を活用して、漸次変化する荷重モードに対する分岐座屈点の座標を連続的に計算するアイデアを提案した。通常の弧長法が弧長の変化に伴う「正則つり合い点の連続計算法」であるのに対して、本論文では荷重モードが変動する際の「特異つり合い点の連続計算法」である。

提案する計算手法の要点は特異点での剛性方程式の一般解を構成できるように荷重モードを変動させることにある。解の存在条件を満たすように荷重モードを制御

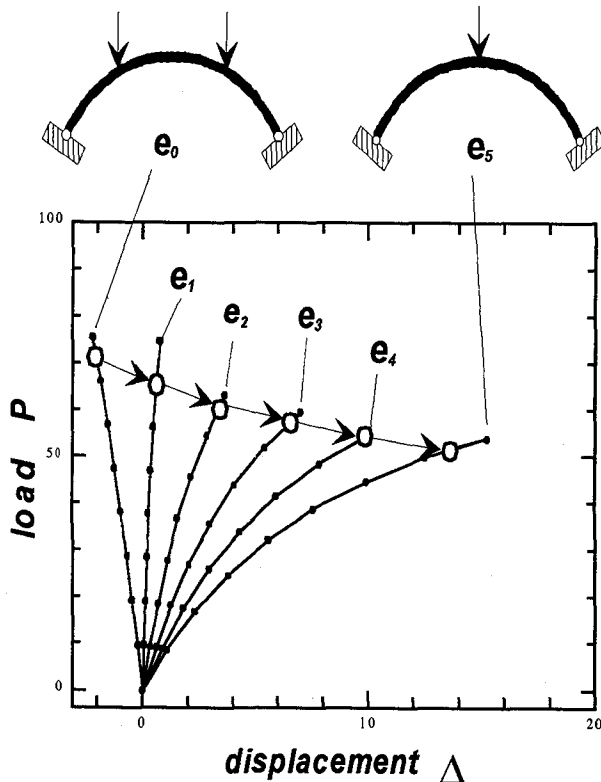


図-5 漸変パターンCに対する特異点の連続計算

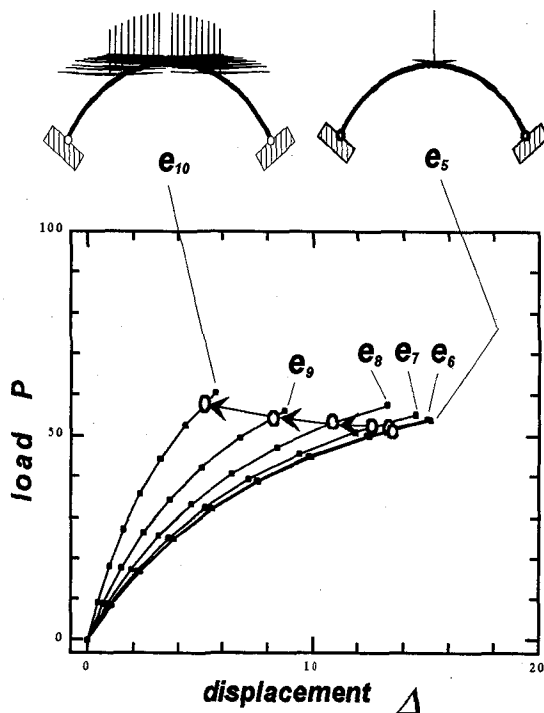


図-6 漸変パターンDに対する特異点の連続計算

しなければならないという制約条件はあるものの、この制約のなかでは荷重モードを任意に変化させることができる。

各荷重モードに対して、そのつど原点（無載荷・無変形のつり合い点）から非線形つり合い応答を追う必要はなく、現在の分岐座屈点から、つぎに目標とする分岐座屈点に直接的に到達できる。

対称性のない一般的荷重モードの漸変に対する座屈点の連続計算は、本論文では特に取り扱わなかったが、文献[13]の成果をより完全なものにして、別の機会に発表予定である。

提案する特異点の連続計算法は平面アーチ以外のより一般的な構造形態への応用も基本的に可能である。今後の検討事項として、これまでとは全く異なる分岐座屈モードで不安定現象が生ずる場合、すなわち座屈モードが連続しなくなる場合の対処方法も重要な課題である。

参考文献

- [1] Plaut, R. H.: Stability of Shallow Arches Under Multiple Loads, ASCE, EM, Vol. 104, 1978, 1015-1026
- [2] Waszczyszyn, Z., Cichon, C. and Radwanska, M.: Stability of Structures by Finite Element Methods, Elsevier, 1994, Studies in Applied Mechanics 40, 468 pages
- [3] Waszczyszyn, Z. and Cichon, C.: Nonlinear Stability Analysis of Structures under multiple parameter loads, Engineering Computation, Vol.5, 1988, 10-14
- [4] 藤井文夫, 岡澤重信: 構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的非線形解法, 機械学会論文集 (A 編), 特集号「ハイパフォーマンス コンピューティング」, Vol.62, No. 603, 1996-11, 2448-2455,
- [5] 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美勉: 幾何学的非線形構造系の数値分岐解析法, 土木学会論文集, No. 556/I-38, 95-106, 1997年1月
- [6] Fujii, F. and Okazawa, S.: Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 123, 179-189, March 1997
- [7] 藤井文夫, 岡澤重信: 剛性行列の固有ペアの数値と特異剛性行列を係数行列に持つ連立方程式の解法, 構造工学論文集, Vol. 43A, 299-310, 1997年3月,
- [8] Fujii, F. and Ramm, E.: Computational Bifurcation Theory - Path-Tracing, Pinpointing and Path-Switching, (Invited Lecture at ICSS-95), Engineering Structures, Vol.19, No. 5, 385-392, 1997
- [9] Choong, K. K., Hangai, Y. and Oda, K.: Stability Boundary of Structures Loaded with two Independent Loadings, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第19巻, Vol. 19, 379-384, 1995

- [10] 岡澤重信, 藤井文夫: 特異つり合い点をピンポイントするための安定化スキーム, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第 19 巻, Vol. 19, 351-356, 1995
- [11] 藤井文夫, 森明子, 川原克美: 漸次変化する対称荷重モードに対する円形対称ピンアーチの分岐点の連続計算法, 第 2 回日本計算工学講演会論文集, Vol. 2, 1997 年, No. 3, 1213-1216
- [12] 森明子, 藤井文夫, 川原克美: 漸次変化する荷重モードで載荷された円形アーチの特異つり合い点の連続計算法 (第 1 報 対称荷重モードと分岐点), 日本応用数理学会 1997 年度年会, 10 月名大にて, 講演概要集 76-77
- [13] 藤井文夫, 岡澤重信, 森明子: 漸次変化する荷重モードで載荷された円形アーチの特異つり合い点の連続計算法 (第 2 報 一般荷重モードと荷重極限点), 日本応用数理学会 1997 年度年会, 10 月名大にて, 講演概要集 78-79
- [14] Nelson, R. B.: Simplified Calculation of Eigenvalue Derivatives, AIAA Journal, Vol. 14, Sept., 1976, 1201-1205

(1997 年 9 月 26 日受付)