

修正剛性行列を用いた多重分岐点の安定化反復精算法

MODIFIED STIFFNESS AND STABILIZED ITERATION
TO COMPUTE THE MULTIPLE BIFURCATION POINT岡澤重信^{*}, 藤井文夫^{**}, 野口裕久^{***}

Shigenobu OKAZAWA, Fumio FUJII and Hirohisa NOGUCHI

^{*} 名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町)^{**} Dr.-Ing. 岐阜大学工学部 (〒501-1112 岐阜市柳戸)^{***} 工博 慶應義塾大学理工学部 (〒223-8522 横浜市港北区日吉)

The local pinpointing iteration, proposed by the authors so far, may often break down for multiple bifurcation points. To avoid this numerical break down, an idea to slightly modify the tangent stiffness matrix is presented. The multiple eigenvalues at iteration points may be well separated in the modified stiffness matrix, and the observed eigenpair, which should be computed continuously during iteration, may be determined uniquely. The proposed modified stiffness iteration is validated in shell examples.

Key Words: multiple bifurcation, modified stiffness matrix, stabilization technique, pinpoint

1. 序論

非線形有限要素法理論^{1,2)}と計算機環境の急速な進歩によってこの数年, 材料の分岐問題³⁾や動的安定問題^{4,5)}, 座屈問題感度解析^{6,7)}などの不安定現象の解明に関する研究⁸⁾が大きな発展を遂げつつある。

非線形座屈解析において不可欠な手続きの1つに, 座屈点の精算法がある。Wriggersらは, Extended Systemにより座屈点を反復計算により直接的に求める方法を発表した⁹⁾。局所的収束性を有するこのExtended Systemに対して, 筆者らは接線剛性行列の固有値の感度公式を用いて, 任意の正則つり合い点, または任意の非つり合い点から出発することができる大域的収束性のある座屈点の反復精算法も提案している^{10,11)}。これらの座屈点の直接反復法は, 通常の単純分岐点については効率的で, 快適な収束を保証する。

しかし一方で, Extended System⁹⁾と筆者らの反復精算法^{12,13)}では, 次のような問題点が確認されている。接線剛性行列の複数の固有値がゼロとなる多重分岐点については, そこに至るまでの反復点において固有値が多重根となる場合には, 注目する固有ベクトルを一意に決定することができないため, 反復精算法が全く機能しなくなるのである。この問題点に関しては, 群論的分岐理論^{14,15)}と計算分岐理論^{12,13,16)}の融合により, ブロック対

角化を活用した多重分岐点の精算法が提案されている¹⁷⁾。

しかし本論文では, これとは全く異なるアイデアに基づき, 構造形態に群対称性がない場合でも応用でき, しかもより簡便な操作で, 多重分岐点の反復精算法を可能とする手続きを考案し, 反復計算の安定化を図る。本論文の目的はつぎの2点である。

- 数千自由度の実用規模の問題に著者らの特異点反復精算法を適用して, 機能することを確認する。
- 多重分岐点については, 接線剛性行列の多重固有値を分離し, 安定的に目標点を精算する。

多重分岐点の精算法については, 接線剛性行列にわずかの修正(後述の $K \rightarrow \bar{K}$ の修正)を施すだけで反復を安定化でき, したがって既存プログラムへの組み込みも容易となる。また今回の例題計算では, 回転自由度を厳格に取り扱うために, 有限回転テンソルを導入した4節点シェル要素¹⁸⁾を用いた。

2. 座屈点の反復精算法

ここでは参考のため筆者らによる座屈点の局所的な反復精算法を簡単にレビューする^{12,13,16)}。 N 個の自由度 u , 単一荷重変数 p で記述される保存系の非線形弾性構

造系を考える。座屈点の条件式として、 N 本のつり合い方程式(1)と接線剛性行列の固有値 λ がゼロとなる条件式(2)を採用する。

$$R(u) - pe = 0 \quad (1)$$

$$\lambda(u) = 0 \quad (2)$$

ここに、 $R(u)$ と e はそれぞれ、変形形態 u に依存する系の内部抵抗力と荷重モードベクトルである。式(1)、(2)の $N+1$ 本の方程式をニュートン・ラフソン法で解くことを考える。式(1)、(2)を線形化すると

$$K\delta u - \delta p e = -(R - pe) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} \delta u = -\lambda \quad (4)$$

ここで δ は変分(ニュートン・ラフソン法における増分)を示す。また K は次のような接線剛性行列である。

$$K = \frac{\partial R}{\partial u} \quad (5)$$

式(3)より δu は次のよう求められる。

$$\delta u = \delta p u_e + \delta u_E \quad (6)$$

ただし

$$K u_e = +e \quad (7)$$

$$K \delta u_E = -(R - pe) \quad (8)$$

であり $u_e, \delta u_E$ は、それぞれ単位荷重増分および不釣り合い力に対する変位修正子を表している。式(6)を式(4)に代入すると

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} (\delta p u_e + \delta u_E) = -\lambda \quad (9)$$

を得る。さらに

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} u_e = \lambda_e \quad (10)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} \delta u_E = \delta \lambda_E \quad (11)$$

とおくと、式(9)は次のように書くことができる。

$$\delta p \lambda_e + \delta \lambda_E = -\lambda \quad (12)$$

式(10)、(11)より明らかに $\lambda_e, \delta \lambda_E$ は $u_e, \delta u_E$ の変動に対応する固有値の変動量を表している。一般に K の変動による固有値の線形感度は固有ベクトル θ とした場合

$$\lambda = \theta^T \Delta K \theta \quad (13)$$

で与えられる¹⁹⁾。本論文では $u_e, \delta u_E$ の変動に対応する接線剛性行列の変動は、次式のように差分近似で求める。ここで ε は差分インターバルを表している。

$$\Delta K_e = \frac{1}{\varepsilon} [K(u + \varepsilon u_e) - K(u)] \quad (14)$$

$$\Delta K_E = \frac{1}{\varepsilon} [K(u + \varepsilon \delta u_E) - K(u)] \quad (15)$$

式(14)、(15)を式(13)に代入すれば、

$$\lambda_e = \theta^T \Delta K_e \theta \quad (16)$$

$$\delta \lambda_E = \theta^T \Delta K_E \theta \quad (17)$$

を得る。最終的に式(16)、(17)を式(12)に代入することにより、荷重修正子 δp が次式で求められる。

$$\delta p = -\frac{\lambda + \delta \lambda_E}{\lambda_e} \quad (18)$$

以上が通常の特異点の反復精算法の一連の手続きのアウトラインである。

3. 多重分岐点の精算法(図-1)

接線剛性行列 K が固有値の重根を、反復開始点A($\lambda \neq 0$)と目標の分岐点B($\lambda = 0$)において持つ場合を考える(図-1)。ただし図-1は、例として3重固有値($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$)を有する場合を示している(2重固有値 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ でも構わない)。

これらの多重固有値については相互に直交する何がしかの固有ベクトルを得ることができるが、これらの固有ベクトルの線形結合もまた同じ固有値 λ の固有ベクトルとなる。したがって常に着目する固有ベクトルが反復点で計算される保証はない。例えば反復開始点での固有ベクトル (λ_1, θ_1) の連続的变化を捉えようとしても、反復点Dにおいて $\lambda_1 = \lambda_2$ となると、もはや固有ベクトル θ_1 を一意に決めることはできない。このため注目する固有値を他の多重固有値より分離し、対応する固有ベクトルが常に一意と

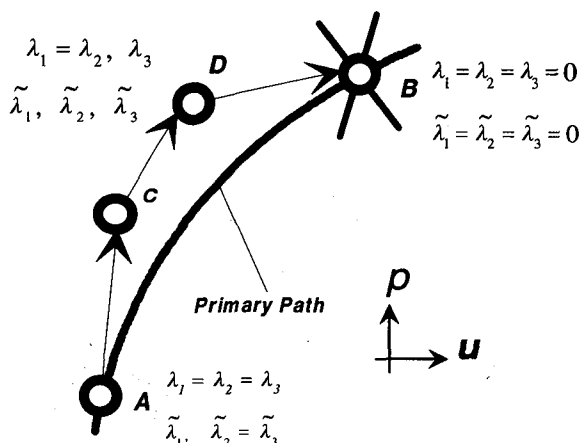


図-1 3重固有値の場合の例

なるよう、池田等は例えばブロック対角化手法^{14,15)}を用いて、接線剛性行列を次のように修正した。

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{H}^T \mathbf{K} \mathbf{H} \quad (19)$$

$N \times N$ の正方行列 $\mathbf{H}$ は、ブロック対角化手法^{14,15)}では、構造形態の群対称性に基づき決められ、どのような既約条件が存在するかは群論毎の個別論となる。本論文では固有値をより平易に分離するために、つぎのような対角行列 $\mathbf{H}$ を提案する。

$$\mathbf{H} = \text{diag}(1, \dots, (1+\mu), \dots, 1) \quad (20)$$

したがって、修正剛性行列は

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & (1+\mu)K_{lm} & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (1+\mu)K_{ml} & \vdots & (1+\mu)^2 K_{mm} & \vdots & (1+\mu)K_{mN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & (1+\mu)K_{Nm} & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \leftarrow \text{row } m \quad (21)$$

となり、本来の接線剛性行列 $\mathbf{K}$ の第 m 列を $(1+\mu)$ 倍し、さらに第 m 行を $(1+\mu)$ 倍して対称行列とするきわめて単純な修正である。数値的には、 m 番目の節点自由度を $(1+\mu)$ で除した新しい自由度を導入して、さらに m 番目の剛性方程式の両辺を $(1+\mu)$ 倍して、剛性方程式を書き換えた時の係数行列が修正剛性行列となり、この新しい修正剛性行列の固有ペアに注目する。

以上の行列の修正操作のなかでつぎのような関係が成立する。

$$\det \tilde{\mathbf{K}} = (1+\mu)^2 \det \mathbf{K} \quad (22)$$

$$\text{rank } \tilde{\mathbf{K}} = \text{rank } \mathbf{K} \quad (23)$$

すなわち、 $\mathbf{K}$ が特異行列のとき、 $\tilde{\mathbf{K}}$ も特異行列となり、しかもそのランク低減数(ゼロ固有値の個数)も等しくなる。すなわち $\mathbf{K}$ と $\tilde{\mathbf{K}}$ とは同一の目標点(多重分岐点)を共有する。これが反復計算で $\mathbf{K}$ ではなく、 $\tilde{\mathbf{K}}$ の固有ペアに着目する論拠である。

2章の座屈点の反復精算法を多重分岐に適用する場合には、すべての固有値を、修正後の固有値に置き換える。又、式(16)、(17)の固有値の線形感度公式と式(14)、(15)の接線剛性行列の変動量の差分近似もそれぞれ以下のようにする。ただしここで、上付きの $\sim$ 記号は修正剛性行列への属性を意味する。

$$\tilde{\lambda}_e = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Delta \tilde{\mathbf{K}}_e \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (24)$$

$$\delta \tilde{\lambda}_E = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Delta \tilde{\mathbf{K}}_E \tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (25)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{K}}_e = \frac{1}{\varepsilon} [\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{u}_e) - \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u})] \quad (26)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{K}}_E = \frac{1}{\varepsilon} [\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}_E) - \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{u})] \quad (27)$$

行と列の番号 m を選ぶにあたっては、まず反復開始点Aにおいて注目する固有ペアの固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}_1$ のベクトル成分を調べ、そのなかで絶対値最大となる成分の番号を採用する。この理由は、修正剛性行列と接線剛性行列の差

$$\bar{\Delta} \mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K} \quad (28)$$

が

$$\bar{\Delta} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu K_{lm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \mu K_{ml} & \vdots & (\mu^2 + 2\mu) K_{mm} & \vdots & \mu K_{mN} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu K_{Nm} & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{row } m \quad (29)$$

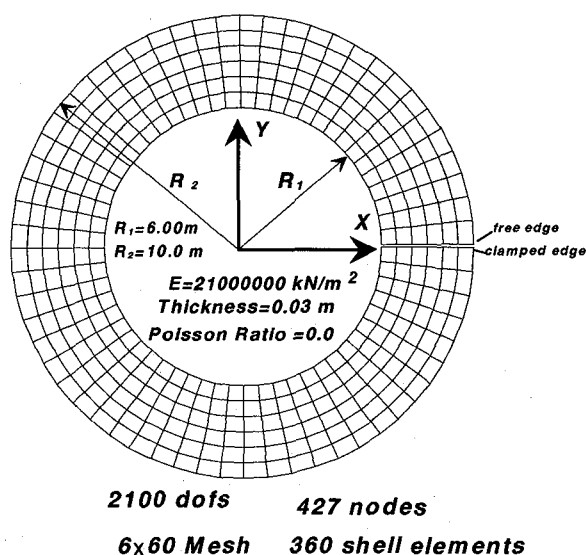


図-2 円形リングモデル

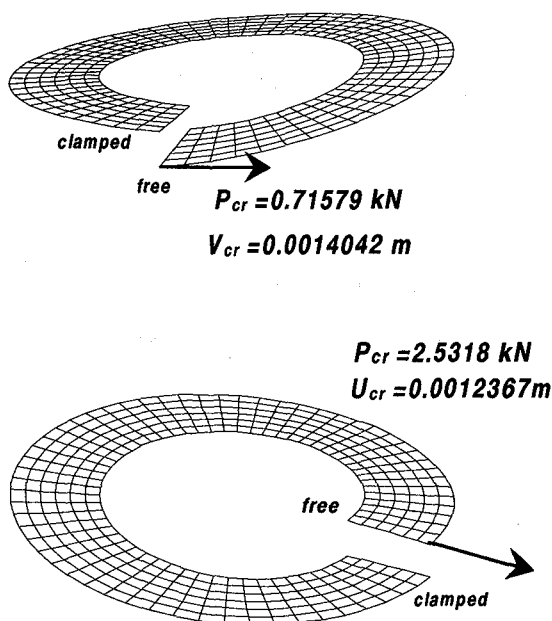


図-3 面外座屈荷重と座屈モード

であることと、式(13)を考慮すれば、固有値の分離度が最も効果的に大きく取れることが理解できる。

つぎに μ の大きさについては、固有値の分離を十分に図り、しかも逆べき乗法などの反復型の固有値計算法における初期値の設定を容易にするためにも、 μ の設定値の許容範囲にはおのずと制約がある。実際の計算ではクリティカルな固有値の次に大きい固有値を参考に決めるのがよい。本論文の例題計算では、経験的に $\mu = 0.1$ と仮定した

なお多重分岐点でも目標点に至るまで、固有値が十分に分離されている場合には、通常の単純分岐点の反復精算法がそのまま使えることは明らかである。また反復精算の過程では、 $\tilde{\mathbf{K}}$ の固有ベクトルは $\mathbf{K}$ の固有ベクトルと異なるので注意を要する。

4. 例題計算

多重分岐点の反復精算法の安定化手法の妥当性を、シェルの有限変位・安定問題の解析により検証する。ここで用いた有限要素は、節点自由度として全体座標系の座標軸方向の3個の並進変位と、局所座標軸回りの2個の回転量を有する4節点20自由度のシェル要素¹⁸⁾である。なお例題計算の構造系の形態表現の図の中で、3角形が表示されているが、これは単に図形処理(陰線消去)における理由からで、実際の計算はすべて4節点要素を用いている。また3章における μ についてはすべての例題において $\mu = 0.1$ と設定した。

表-1 円形リングの反復状況

円周方向の荷重の場合			
変位 V(m)	荷重(kN)	つり合い誤差	固有値
.14713E-02	.75000E+00	.18806E-06	-.88686E-04
.14067E-02	.71709E+00	.45901E-01	-.31229E-05
.14042E-02	.71579E+00	.18094E-02	-.44981E-08
.14042E-02	.71579E+00	.26212E-05	-.20463E-10
半径方向の荷重の場合			
変位 U(m)	荷重(kN)	つり合い誤差	固有値
.14654E-02	.30000E+01	.16550E-04	-.15290E-03
.12595E-02	.25785E+01	.16349E+00	-.13699E-04
.12370E-02	.25324E+01	.18207E-01	-.15253E-06
.12367E-02	.25318E+01	.20734E-03	-.26621E-10
.12367E-02	.25318E+01	.45476E-06	-.12286E-10

4.1 円形リング板の単純分岐点

最初の例題では、提案する特異点反復精算法を、自由度が数千のオーダーの実用規模の問題に適用する。これまで著者らが実施した解析は高々100前後の自由度の骨組構造^{12,13,16)}であり、本例題を通じて特異点の反復精算法の実用性について検討する。

図-2は、シェルの有限変位理論ではよく知られたベンチマークモデルで、半径 $R_1 = 6$ mの内円と $R_2 = 10$ mの外円で囲まれる幅4 mの帯状リングに、半径方向にス

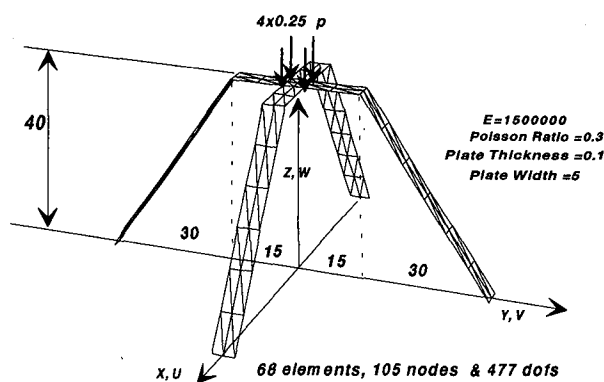


図-4 交差台形フレーム

リットを入れ、切断面の片側を固定端、他端を自由としたモデル(内外の円周に沿う辺も自由端)である。6x60 Meshで、360要素、427節点に離散化すると、系全体で自由度の数は2100個となる。ベンチマークテストではスリットの自由端に沿って、Z軸方向に等分布の線荷重が作用するが、ここでは面外座屈を誘起するため、スリットの自由端の外側の角に、それぞれ円周方向、半径方向に単一荷重を負荷する(図-3)。なおこの例題では文献20),21)と同じモデルを計算するため、本論文でもポアソン比をゼロと仮定した。

面内剛性に比べて、面外剛性がきわめて小さいため、比較的低い荷重レベルで単純分岐点が発生する。反復開始点で必要とされる固有ベクトルの初期値として、文献22)で分岐経路への経路切換え用に提案した Scaled Correctorを採用した。この方法は特異点近傍で、固有値解析を行わなくても、クリティカルな固有ベクトルを極めて精度よく求めることができる優れた手法である。表-1がその収束状況であるが、反復精算そのものは、4-5回の反復計算で十分に安定に収束し、この程度の規模の問題でも何ら支障なく解析可能であった。それぞれの荷重ケースについて、固有ベクトルを図-3に示す。なお参考までに4x24 Mesh(96要素,125節点,600自由度)で特異点を計算した場合の結果は、円周方向、半径方向の単一荷重に対してそれぞれ、 $P_{cr} = 0.71797$, $V_{cr} = 0.0012539$, および $P_{cr} = 2.5706$, $U_{cr} = 0.0011033$ であり、離散化の点でも十分に収束が得られていることも確認できる。数万自由度の例題への応用は今後の課題である。

4.2 交差台形フレームの多重分岐点

多重分岐点は、その形態に対称性が見られる系に特有の分岐現象である。図-4に示す多重分岐モデルは、2つの同形の台形フレームが交差する系に対称性を有する。平面Z=0での支持条件は、並進変位をすべて拘束し、板幅方向の辺をピン支持辺(回転自由)とし、荷重条件

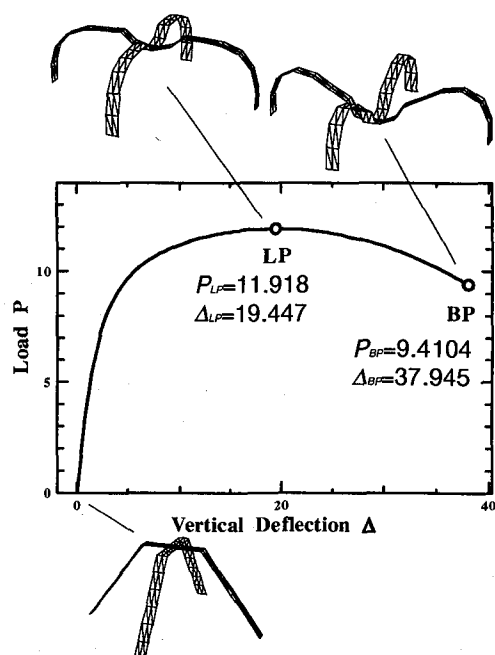


図-5 交差台形フレームのつり合い経路

は中央点付近の4つの節点にそれぞれ $(1/4)p$ を載荷した。この結果、系の変形は4軸対称となり主経路に沿っても、また対称変形を保持する不つり合い点(反復点)においても接線剛性行列は多重固有値を有する。原点における固有値を小さい方から $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ とすると、まず λ_1 が荷重極大点(LP)においてゼロとなり、ついで λ_2 と λ_3 が多重分岐点(BP)においてゼロとなる。

図-5に、横軸に載荷点の鉛直たわみ Δ を、縦軸に荷重変数 p をプロットして主経路と座屈点での変形図を示した。まず荷重極大点が先行し、ここで λ_1 がゼロとなった。荷重極大点の近傍では、主経路の予測子および Scaled Corrector のいずれも、反復精算法の固有ベクトルの初期値として良好である。荷重極大点の座標の精算値は $P_{LP} = 11.918$ および $\Delta = 19.447$ である。

つぎに荷重極大点を通過後、多重分岐点($\lambda_2 = \lambda_3 = 0$)が、 $P_{BP} = 9.4104$ および $\Delta = 37.945$ において出現した。この多重分岐点においても、固有値の分離を図ることにより安定的に反復を継続できた。図-6に、多重分岐点を通後直後の Scaled Corrector、反復中の修正剛性行列 $\tilde{K}$ の固有ベクトル $\tilde{\theta}$ 、それに精算した多重分岐点での2つの固有ベクトル (θ_2, θ_3) を示した。Scaled Corrector を $\tilde{\theta}$ の初期値として採用したが、固有値分離の結果、 $\tilde{\theta}$ が一意に決まる。また Scaled Corrector のモードは、多重分岐点での固有ベクトル (θ_2, θ_3) を含んでいることが図-6からもわかる。

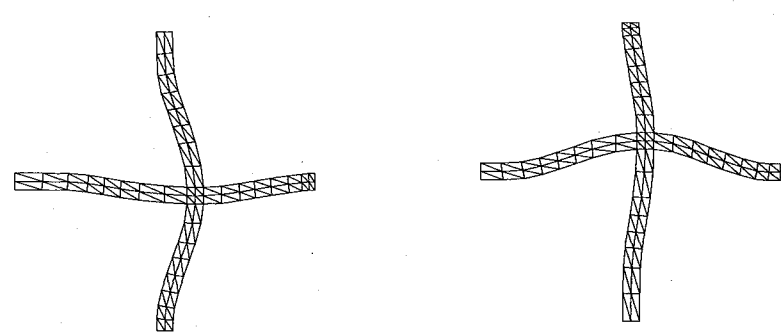
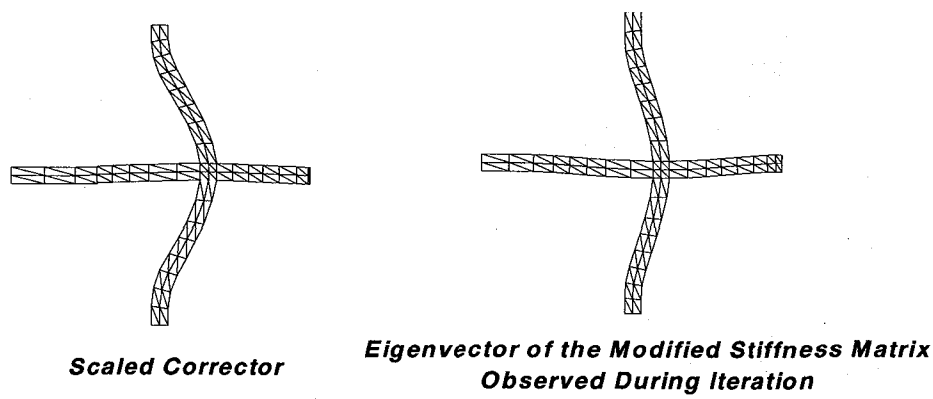


図-6 Scaled Corrector と固有ベクトル

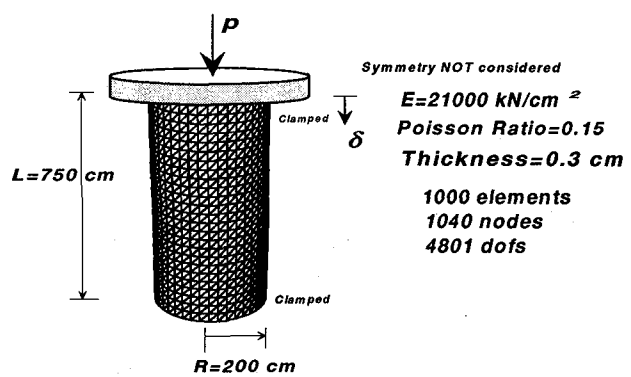


図-7 円筒シェル

表-2 円筒シェルの反復状況

修正剛性行列を用いた場合

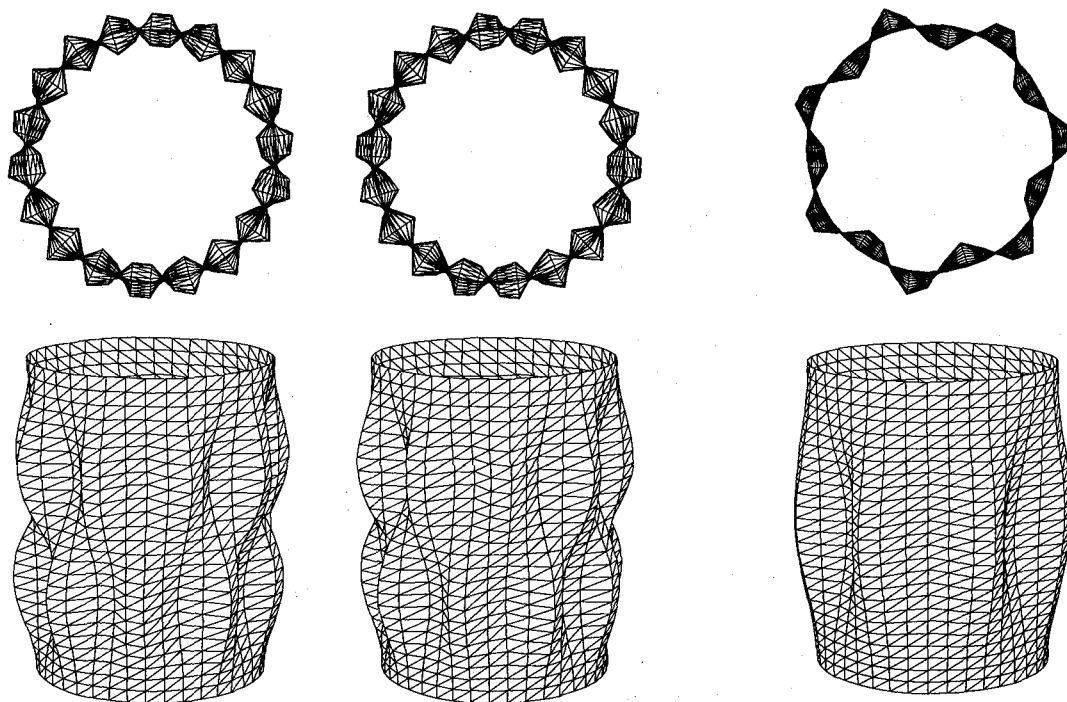
変位 $\delta(\text{cm})$	荷重 $P(\text{kN})$	つり合い誤差	固有値
.13304E+01	.55817E+06	.22934E-07	-.22124E-02
.13262E+01	.55806E+06	.31892E-02	-.12330E-05
.13262E+01	.55640E+06	.29919E-02	+.66979E-09
.13262E+01	.55640E+06	.17058E-05	-.89719E-14

4.3 円筒シェルの多重分岐

最後の例題では、図-7にある円筒シェルの分岐座屈解析を試みた。多重分岐を発生させるため対称性を考慮せず、全スパン・全周方向に1000要素および1040節点で離散化を行った。その結果、自由度は4801となり、

これは先の円形リング板の場合の自由度の2倍以上である。

円筒シェルの支持条件は下端は完全固定で、上端は軸方向の変位 δ のみを許す固定条件である。上端に鉛直荷重 p を載荷し、主経路で出現する最初の多重分岐点を精算できた。精算値は、 $(\delta, p)=(0.13262\text{E}+1, 0.55640\text{E}+6)$ で、反復の収束状況を表-2に示す。なおここでの固有値は修正剛性行列の分離された固有値である。修正剛性行列を用いた場合にはきわめて安定に多重分岐点に収



Two Critical Eigenvectors at the Multiple Bifurcation Point

The 3rd Eigenvector(Non-Critical)

図-8 円筒シェルの固有ベクトル

束している。固有値の分離を図らずに通常の単純分岐点精算法を用いた場合、各反復ステップにおける固有値解析が収束せず(逆べき乗法)、反復の続行が全く不可能となるか、または仮に、各反復ステップの固有値解析そのものに問題がなくとも、固有値の多重性により注目すべき固有ベクトルの不本意な切り換えが発生し、反復計算そのものが収束しないかのいずれかである。

また精算した多重分岐点においてサブスペース法で計算した3本の固有ベクトルを図-8に示す。実際の分岐経路方向は左2本のクリティカルな固有ベクトルの線形結合で表現される。

なお、多重分岐点の安定化反復精算法の他の多くの例題計算(骨組系)は参考文献²³⁾を参照されたい。

5. 結論

構造系の主経路と分岐経路の接続関係の特定も含めて、分岐構造(対称分岐、非対称分岐、頂上分岐、多重分岐、クラスター分岐など)を特定する作業は、分岐座屈解析の経験と数理的に優れた計算手法を必要とする。本論文では、まず著者らの提案する特異点の反復精算法が実用規模の大きさの例題に十分適用できること

を確認した。また多重分岐点を反復精算するための提案も行った。多重分岐に関しては多重固有値を有する接線剛性行列にわずかな修正を施すことにより、固有値を分離することができ、その結果、多重分岐点の安定的反復精算が可能となった。この修正は、先にすでに提案済みのブロック対角化手法を用いる提案¹⁷⁾よりは、軽便で実用的である。

また特に回転角を節点自由度にもつ空間構造系の精密な座屈解析には、今回例題計算で用いたシェル要素¹⁸⁾のように、有限回転角を厳密に扱った要素を用いることが不可欠である。そして本来、分岐経路への経路切り換え用に提案された Scaled Corrector²²⁾は、座屈点の反復精算の際に必要とされる固有ベクトルの良質な初期値としても利用価値が高いことが確認された。

今後は弾塑性材料への分岐理論の拡張が課題である。

謝辞：本研究をまとめるにあたっては、東北大学の池田清宏先生より多重分岐に関する貴重な助言をいただきました。また本研究は日本学術振興会特別研究員である第1著者(岡澤重信)の文部省科学研究費補助金(特別研究員奨励費)の援助を受けました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 野口裕久：非線形解析技術の理論と最近の話題，日本機械学会講習会「設計工学からみた最近の解析技術の動向」，No.97-33，pp.55-60，1997.
- 2) Crisfield, M.A. : *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2 : Advanced Topics*, John Wiley & Sons, pp.1- 494, 1997.
- 3) Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y. and Yanagisawa, E. : Mode Switching and Recursive Bifurcation in Granular Materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.45/11-12, pp.1929-1953, 1997.
- 4) Riks, E., Rankin, C.C. and Brogan, F.A. : On the Solution of Mode Jumping Phenomenon in Thin-Walled Shell Structures, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.136, pp.59-92, 1996.
- 5) Hunt, G.W., Lawther, R. and Costa, P.P.E. : Finite Element Modeling of Spatially Chaotic Structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, pp.2237-2256, 1997.
- 6) Noguchi, H. and Hisada, T. : Sensitivity Analysis in Post-Buckling Problems of Shell Structures, *Computers and Structures*, Vol.47, pp.699-710, 1993.
- 7) Kleiber, M. : *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics Theory and Finite Element Computations*, John Wiley & Sons, 1997.
- 8) Shi, J. : Computing Critical Points and Secondary paths in Nonlinear Structural Stability Analysis by the Finite Element Method, *Computers and Structures*, Vol.58, pp.203-220, 1996.
- 9) Wriggers, P., Wagner, W. and Mische, C. : A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.70, pp.329-347, 1988.
- 10) 藤井文夫，岡澤重信：構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的線形解析法，日本機械学会論文集(A編)「ハイパフォーマンスコンピューティング」特集号，62巻603号，pp.48-55，1996.
- 11) Fujii, F. and Okazawa, S. : Bypass, Homotopy Path and Local Iteration to Compute the Stability Point, *Structural Engineering and Mechanics* "Special Issue on Selected Papers at the third Asian Pacific Conference on Computational Mechanics", Vol.5, No.5, pp.577-586, 1997.
- 12) Fujii, F. and Okazawa, S. : Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.123, pp.179-189, 1997.
- 13) Fujii, F. and Ramm, E. : Computational Bifurcation Theory - Path-Tracing, Pinpointing and Path-Switching, *Engrg. Struc.*, Vol.19, pp.385-392, 1997.
- 14) Ikeda, K., and Murota, K. : Bifurcation Analysis of Symmetric Structures Using Block-Diagonalization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.86, pp.215-243, 1991.
- 15) Murota, K. and Ikeda, K. : Computational Use of Group Theory in Bifurcation Analysis of Symmetric Structures, *SIAM. J. of Sci. & Statistical Computing*, Vol.12, pp.273-297, 1991.
- 16) 岡澤重信，藤井文夫，宇佐美勉：幾何学的非線形構造系の数値分岐解析法，土木学会論文集，No.556，pp.95-106，1997.
- 17) 藤井文夫，池田清宏，岡澤重信：剛性行列のブロック対角化原理を用いた対称性に起因する多重分岐点の反復精算法，構造工学論文集，Vol.43A，pp.321-332，1997.
- 18) 野口裕久，久田俊明：有限回転増分を考慮した効率的シェル要素の開発およびその評価，日本機械学会論文集(A編)，Vol.58，pp.943-950，1992.
- 19) 藤井文夫，岡澤重信：剛性行列の固有ベアの数値と特異剛性行列を係数行列に持つ連立方程式の解法，構造工学論文集，Vol.43A，pp.299-310，1997.
- 20) Basar, Y., Ding, Y. and Kratzig, W.B. : Finite-Rotation Shell Elements via Mixed Formulation, *Computational Mechanics*, Vol.10, pp.289-306, 1992.
- 21) Ramm, E. and Büchter, N. : A Comparison of nonlinear finite element formulations of shells, *The 2nd World Congress on Computational Mechanics*, pp.653-656, Stuttgart, 1990.
- 22) 野口裕久，久田俊明：Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析法の開発，日本機械学会論文集(A編)，Vol.58，pp.2191-2198，1992.
- 23) Fujii, F., Ikeda, K. and Okazawa, S. : Modified Stiffness Iteration to Compute the Multiple Bifurcation Point, *Proceedings of the International Colloquium on Computational of Shell and Spatial Structures*, pp.320-325, Taipei, Taiwan, 1997.

(1997年9月26日受付)