

周期境界を持つ長方形領域の分岐パターン解析

BIFURCATION PATTERN SIMULATION OF A RECTANGULAR DOMAIN WITH PERIODIC BOUNDARIES

池田 清宏*, 中沢 正利*, 水木 麻雄**

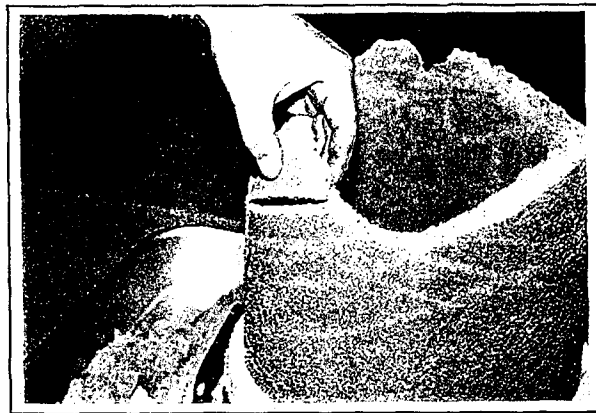
Kiyohiro IKEDA, Masatoshi NAKAZAWA, Asao MIZUKI

*東北大学 工学部 土木工学科 〒980-77 仙台市青葉区

**仙台市

The mechanism of the pattern formation in a uniform domain is revealed through the investigation of the bifurcation behavior of a rectangular plate subject to uniform compression with periodic boundaries at four sides. The rules for direct and secondary bifurcation are advanced by means of the group-theoretic bifurcation theory. A recursive bifurcation analysis of this plate has yielded various kinds of patterns, such as diamond, stripe, and echelon modes, which are often observed for materials under shear.

Key Words : *bifurcation, periodic boundaries, echelon modes*

写真-1 砂の中空円筒供試体上のダイヤモンドパターン¹⁾。

1. はじめに

砂, 粘土, 岩石などにはよく特徴的なせん断帯やパターンが観察される。一例として, 砂の中空円筒供試体に発生したパターンを写真1に示す。砂の円柱供試体に, シェルの代表的な座屈モードであるダイヤモンドパターンが発生した例も報告されている²⁾。また岩やクリスタル等にはエシェロンモード(雁行状の周期的な亀裂)が発生することが知られている^{3), 4)}。この種の規則的なパターンの発生の基礎メカニズムとしてフラクタル的な考え方⁵⁾や, 岩の割れを自己相似的なものとして捉える現象学的なモデル⁶⁾が提案されている。

池田等はこれらのパターンの発生, 変化を対称性の階層的崩壊による多段階分岐現象として捉え, 群論的分岐理論によりその基礎メカニズムを解明している^{7), 8), 9)}。

この結果, 上下左右端に周期境界を持つ均質な長方形領域では, 完全に均質な状態からダイヤモンドパターンやストライプパターンが分岐により発生し, さらにストライプパターンからの2次分岐としてエシェロンモードが発生することが明らかにされている。周期境界条件を用いない板の多段階分岐解析¹⁰⁾では消失してしまう, ストライプパターンの存在を示したことは特筆に値する。しかし, この理論の適用は実験結果に対してのみであり, 数値解析への適用はいまだ行われていない。そこで本研究では, 弾性床の上に支持され上下左右端に周期境界を有する長方形板に面内一様一軸圧縮力が作用する場合の分岐解析を行うことにより, 池田等の理論の有用性を検証し, 妥当性を確認することとする。第4章の長方形板の面内変位の2重 Fourier 級数表示に対する分岐の規則の誘導が, 本論文の本質的な部分である。

2. 群論的分岐理論

この章では、文献^{14),15),16)}の理論を要約することにより、対称性を持つ系の分岐現象の記述法である群論的分岐理論について概説する^{11),12),13)}。

2.1 定式化

N 次元の離散化された非線形方程式

$$F(u, f) = 0 \quad (1)$$

を考える。ここに f は荷重パラメータを、 u は変位ベクトルをそれぞれ表し、関数 F は十分滑らかであると仮定する。

鏡映や回転・並進などの幾何学的変換 g から構成される群 G により方程式の対称性を記述する。例えば、変換 g は N 次元のベクトル u を $g(u)$ へと変換する。この種の変換は $N \times N$ の表現行列 $T(g)$ により

$$T(g)u = g(u), \quad T(g)F = g(F), \quad \forall g \in G$$

と定義される ($T(g)$ はユニタリ行列と仮定する)。方程式系 (1) は

$$T(g)F(u, f) = F(T(g)u, f), \quad \forall g \in G \quad (2)$$

が成り立つとき群 G に同変であると呼ばれる。解 u の不変性は同変性とは異なる概念であり、

$$T(g)u = u, \quad \forall g \in G$$

と定義される。

接線剛性行列 (Jacobian)

$$J(u^c, f^c) = (\partial F / \partial u)^c$$

がゼロ固有値を持つ、主経路上の特異点 (u^c, f^c) を考える。特異点は荷重パラメータ f の極大・極小点か分岐点である。以後上付き添字 $(\cdot)^c$ により特異点に対応する変数を表す。主経路上の分岐点から枝分かれする分岐解は群 G の部分群により表される対称性¹が主経路よりも低い解 (u, f) から成り立っている。特異点 (u^c, f^c) の重複度は

$$M = \dim[\ker(J(u^c, f^c))]$$

と定義される²。ここに $\ker(\cdot)$ は括弧内のオペレータの核空間 (ゼロ固有値に対応する固有ベクトルが張る空間) を表す。すると、定義により、ヤコビアン J の核空間 $\hat{X}$ は群 G の既約表現 μ に、さらに群 G のある部分群 $G^{(\mu)}$ に対応する。 $T^{(\mu)}(g)$ ($g \in G$) を既約表現 μ の表現行列であるとする

$$G^{(\mu)} = \{g \in G \mid T^{(\mu)}(g) = I_M\} \quad (3)$$

が成り立つ。ここに I_M は $M \times M$ の単位行列である。既約表現の次元は特異点の重複度 M に等しい。

¹ 群 G_2 が群 G_1 の真部分群であるとき、群 G_2 が表す対称性は群 G_1 が表す対称性よりも低いと呼ぶ。

² 多重特異点はヤコビアン J の核空間 $\hat{X}$ が G 既約であるか否かにより、群論的多重特異点とパラメトリックな多重特異点とに分類される。後者は稀であるので、本論文では前者にのみ着目する。

2.2 分岐方程式

重複度 M の分岐点の近傍で“elimination of the passive coordinates”と呼ばれる手法¹⁷⁾を用いることにより、元の方方程式系から分岐方程式と呼ばれる M 次元の方方程式系を誘導することが分岐理論ではよく行われる。

e_i^c ($i = 1, \dots, M$) を、重複度 M の分岐点 (u^c, f^c) におけるゼロ固有値に対応する M 個の独立な固有ベクトルであると仮定する。さらに、特異点 (u^c, f^c) からの増分変位 $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_M)^T$ と増分荷重 $\tilde{f}$ を

$$u = \sum_{i=1}^M \tilde{w}_i e_i^c + u^c, \quad f = f^c + \tilde{f}$$

により定義する。すると、分岐方程式は

$$\tilde{F}(\tilde{w}, \tilde{f}) = 0 \quad (4)$$

と表される。元の方方程式系 F が群 G に同変であるとき、分岐方程式 $\tilde{F}$ も対応する既約表現に対し群 G に同変であるように選べる。すなわち、

$$\tilde{T}(g)\tilde{F}(\tilde{w}, \tilde{f}) = \tilde{F}(\tilde{T}(g)\tilde{w}, \tilde{f}), \quad \forall g \in G \quad (5)$$

が成り立つ。ここに $\tilde{T}(g)$ は $M \times M$ の既約表現行列である。この分岐方程式を解くことにより分岐解の対称性が調べられる。固有ベクトル e_i^c の対称性を表す核空間の対称性 $G^{(\mu)}$ よりも、分岐解の対称性が高い場合があることには注意を要する。

2.3 ブロック対角化

G 不変な解 u に対し、式 (2) より、接線剛性行列 J は対称条件

$$T(g)J = JT(g), \quad \forall g \in G$$

を満足するので、適当な座標変換行列 H によりブロック対角形に変換できる^{14),15)}。

変位 u の空間 X は標準分解により

$$X = \bigoplus_{\mu \in R(G)} X^\mu \quad (6)$$

と、部分空間 X^μ の直和の形に分解される。ここに $\bigoplus$ は直和を表し、 $R(G)$ は群 G の既約表現の全体を表す。個々の部分空間は主経路か分岐経路に対応する。座標変換行列も既約表現に対応するブロック H^μ からなる形

$$H \equiv [\dots, H^\mu, \dots]$$

となる。この座標変換行列 H を用いることにより、接線剛性行列 J は

$$\tilde{J} = H^T J H = \text{diag}[\dots, \tilde{J}^\mu, \dots] \quad \mu \in R(G)$$

とブロック対角化される。ここに $\text{diag}[\dots]$ は $[\cdot]$ 内の対角ブロックからなるブロック対角行列を表す。

3. 周期境界を持つ長方形領域の分岐構造

周期境界を持つ長方形領域の代表的な変形パターンと分岐の仕組みは、群論的分岐理論により既に明らかにさ

れている^{7),8)}. この章ではその結果の概要をまとめる.

3.1 対称性の記述法と代表的な分岐モード

長方形領域として

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq L_x(f), 0 \leq y \leq L_y(f)\} \quad (7)$$

を考える. ここで, $L_x(f)$ は長方形領域の x 方向の長さを, $L_y(f)$ は y 方向の長さを表わし, いずれも荷重パラメータ f によって変化するものとする. 境界の影響を除くために, 長方形領域の上下端と左右端はそれぞれ周期的な境界により滑らかにつながっていると仮定する.

この長方形領域は変換

$$\begin{aligned} t_x(l_x) &: x \rightarrow x + l_x \\ \sigma_x &: x \rightarrow -x \\ t_y(l_y) &: y \rightarrow y + l_y \\ \sigma_y &: y \rightarrow -y \end{aligned}$$

に関して不変であり, 周期対称性と鏡映対称性を持つ. ただし, $t_x(l_x)$ は x 軸方向への長さ l_x の並進変換, σ_x は yz 平面に関しての鏡映変換を表わす. $t_y(l_y)$ は y 軸方向への長さ l_y の並進変換, σ_y は xz 平面に関しての鏡映変換を表わす. この対称性を表わす群は

$$G = C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \quad (8)$$

である. ここに,

$$C_{\infty v} = \langle \sigma_x, t_x(l_x) \rangle, \quad \tilde{C}_{\infty v} = \langle \sigma_y, t_y(l_y) \rangle$$

であり, $\times$ は群のテンソル積を表し, $\langle \cdot \rangle$ は括弧内の元により生成される群を表わす.

この長方形領域の分岐後の変形パターンは, 対称群 G の部分群により表わされる. 以下に代表的な変形パターンとそれを表わす部分群を示す.

1) ダイヤモンドパターン (Diamond Pattern)

$$DI_{n\tilde{n}} = \left\langle \sigma_x, \sigma_y, t_x\left(\frac{L_x}{2n}\right) t_y\left(\frac{L_y}{2\tilde{n}}\right), t_x\left(\frac{L_x}{2n}\right) t_y\left(-\frac{L_y}{2\tilde{n}}\right) \right\rangle \quad (9)$$

2) ストライプパターン (Oblique Stripe Pattern)

$$OB_{n\tilde{n}}^{\pm} = \left\langle \sigma_x \sigma_y, \left\{ t_x(l_x) t_y(l_y) \mid n \frac{l_x}{L_x} \pm \tilde{n} \frac{l_y}{L_y} = N, N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \right\rangle \quad (10)$$

3) エシェロンモード (Echelon Mode), 雁行モード

$$EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm} = \left\langle \sigma_x \sigma_y, t_x\left(\mp L_x \frac{\tilde{n}}{dk}\right) t_y\left(\frac{L_y}{d} \frac{n}{dk}\right), t_x\left(\frac{L_x}{d} \left(p \mp \frac{\tilde{n}l}{dk}\right)\right) t_y\left(\frac{L_y}{d} \left(\tilde{p} \pm \frac{nl}{dk}\right)\right) \right\rangle \quad (11)$$

ここに, n と $\tilde{n}$ はそれぞれ x 方向と y 方向の周波数を表わす正整数, k はある正整数, d は n と $\tilde{n}$ の最大公約数, l は $0 \leq l \leq d-1$ を満足する整数, p と $\tilde{p}$ は $np + \tilde{n}\tilde{p} = d$ を満たす整数である.

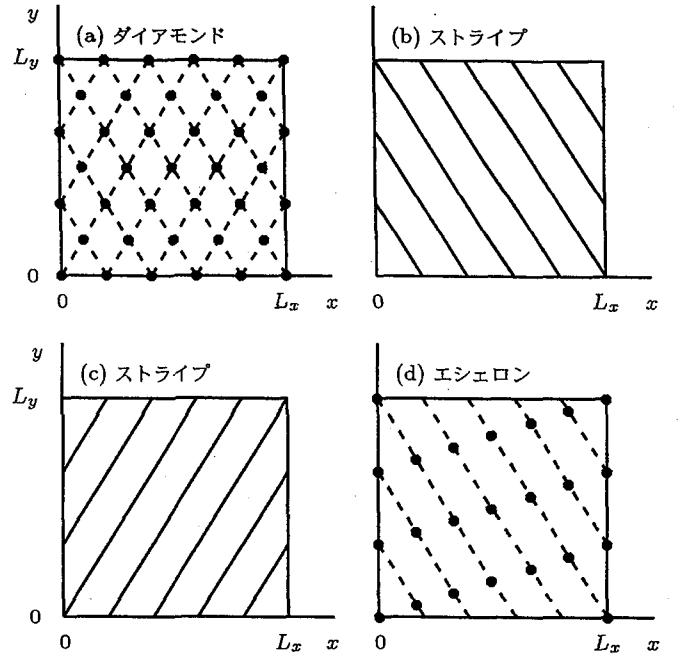


図-1 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 同変な系の代表的な分岐モードの模式図

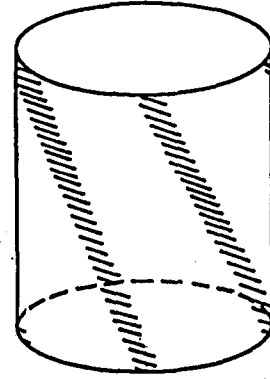


図-2 円筒表面に発生したエシェロンモードの模式図

表-1 群 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ の既約表現 $(k, \tilde{k})$ の次数.

$(k, \tilde{k})$ の次数	k	$\tilde{k}$
1	+, -	+, -
2	+, -	1, 2, ...
	1, 2, ...	+, -
4	1, 2, ...	1, 2, ...

上記の変形パターンの模式図を図1に示す. 図中, 実線(—)と黒丸(●)は同一の物理特性(応力, 変位等)を持つ線や点の位置を表わす. 例えば, 図1(a)では, 同一の物理特性を持つ黒丸(●)が周期的に分布することにより, ダイヤモンドパターンを形成している.

群 $DI_{n\tilde{n}}$ は, 図1(a)に示すダイヤモンドパターンの対称性を表す. 群 $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ は図1(b)と(c)に示すように,

表-2 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 同変系の核空間 $\hat{X}$ の対称群 $G^{(\mu)}$ と分岐解の対称群.

重複度 M	既約表現 $(k, \tilde{k})$	対称群	
		$G^{(\mu)}$	分岐解
1	(+, +)	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$
	(+, -)	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty}$	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty}$
	(-, +)	$C_{\infty} \times \tilde{C}_{\infty v}$	$C_{\infty} \times \tilde{C}_{\infty v}$
	(-, -)	$D_{\infty \infty}$	$D_{\infty \infty}$
2	(+, $\tilde{n}$)	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\tilde{n}}$	$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\tilde{n}v}$
	(-, $\tilde{n}$)	$\langle t_x(l_x), \sigma_x t_y \left(\frac{L_y}{2\tilde{n}} \right) \rangle$	$\langle \sigma_y, t_x(l_x), \sigma_x t_y \left(\frac{L_y}{2\tilde{n}} \right) \rangle$
	(n , +)	$C_n \times \tilde{C}_{\infty v}$	$C_{nv} \times \tilde{C}_{\infty v}$
	(n , -)	$\langle t_y(l_y), \sigma_y t_x \left(\frac{L_x}{2n} \right) \rangle$	$\langle \sigma_x, t_y(l_y), \sigma_y t_x \left(\frac{L_x}{2n} \right) \rangle$
4	($n, \tilde{n}$)	$C_n \times \tilde{C}_{\tilde{n}}$	$DI_{n\tilde{n}}, OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$

$$D_{\infty \infty} = \langle \sigma_x \sigma_y, t_x(l_x), t_y(l_y) \rangle$$

$$C_{\infty} = \langle t_x(l_x) \rangle$$

$$\tilde{C}_{\infty} = \langle t_y(l_y) \rangle$$

$$C_{nv} = \left\langle \sigma_x, t_x \left(\frac{L_x}{n} \right) \right\rangle$$

$$\tilde{C}_{\tilde{n}v} = \left\langle \sigma_y, t_y \left(\frac{L_y}{\tilde{n}} \right) \right\rangle$$

$$C_n = \left\langle t_x \left(\frac{L_x}{n} \right) \right\rangle$$

$$\tilde{C}_{\tilde{n}} = \left\langle t_y \left(\frac{L_y}{\tilde{n}} \right) \right\rangle$$

帯状の模様が直線群

$$n \frac{x}{L_x} \pm \tilde{n} \frac{y}{L_y} = N, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

と平行に規則的に並んだストライプパターンを表す.

群 $EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$ は図 1(d) に示すように、同じ状態 (物理量) を持つ点が離散的かつ、空間 2 方向に周期的に分布するパターンを表す. 図 2 に円筒表面に発生したエシエロンモードの模式図を示す.

3.2 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 同変系の第 1 次分岐

群 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ の既約表現の全体は

$$R(C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}) = \{(k, \tilde{k}) \mid k, \tilde{k} = +, -, 1, 2, \dots\} \quad (12)$$

により与えられる. ここに k は群 $C_{\infty v}$ の既約表現に、 $\tilde{k}$ は群 $\tilde{C}_{\infty v}$ の既約表現にそれぞれ対応する. 既約表現 $(k, \tilde{k})$ の次数は k と $\tilde{k}$ の積に等しい. k と $\tilde{k}$ の値は 1 か 2 であるので、表 1 にまとめるように、 $(k, \tilde{k})$ の次数は 1, 2 か 4 である. この既約表現 $(k, \tilde{k})$ に対応する特異点の重複度 M もこの値に等しく、1, 2 か 4 である.

$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 同変系の既約表現 $\mu = (k, \tilde{k})$ に対応する特異点における核空間 $\hat{X}$ の対称群 $G^{(\mu)}$ を表 2 に分類する. 分岐方程式 (4) を対称条件 (5) のもとに解くことにより求まる分岐経路の対称性は、表 2 に示す核空間 $\hat{X}$ の対称性と必ずしも同一でないことには注意を要する.

(1) 単純特異点 ($M = 1$)

1 次既約表現に対応する 4 個の部分群 $G^{(k, \tilde{k})}$ ($k, \tilde{k} = +, -$) は単純特異点に対応する. 部分群 $G^{(+, +)}$ は荷重パラメータ f の極大・極小点に対応し、残りの 3 個の部分群は単純対称分岐点に対応している. これらの分岐点から枝分かれする分岐経路は核空間 $\hat{X}$ の対称群 $G^{(\mu)}$ と同一の対称性を持っている.

(2) 2 重分岐点 ($M = 2$)

部分群 $G^{(+, \tilde{n})}$, $G^{(-, \tilde{n})}$, $G^{(n, +)}$ と $G^{(n, -)}$ は 2 重分岐点に対応している. 表 2 に示すように、分岐経路は核空

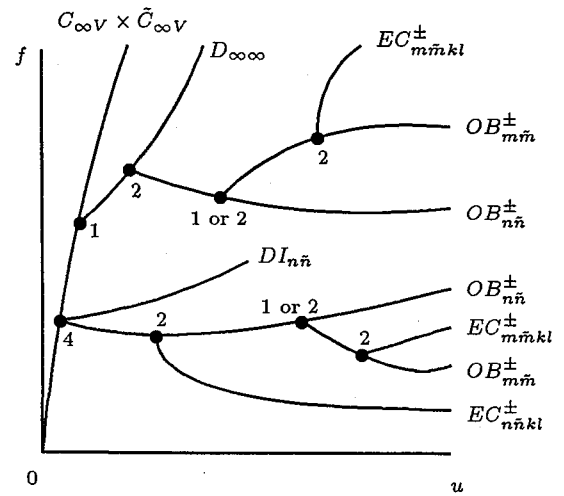


図-3 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 同変系の代表的な分岐の仕組み図.

間 $\hat{X}$ の対称性 $G^{(\mu)}$ よりも高い対称性を持っている. 対称群を定義するにあたり鏡映は σ_x と σ_y , すなわち $x = 0$ と $y = 0$ の位置に便宜上固定しているが、鏡映の位置をずらしたのも同様に解であることには注意を要する. 本論文の数値解析では鏡映を σ_x と σ_y に固定した解を代表として取り上げることとする.

(3) 4 重分岐点 ($M = 4$)

部分群 $G^{(n, \tilde{n})}$ は 4 重分岐点 ($M = 4$) に対応している. 分岐方程式 (4) は、式 (9) または (10) によりそれぞれ定義される群 $DI_{n\tilde{n}}$ または $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ に対し不変な解を持つ. 分岐解は、核空間 $\hat{X}$ の対称性 $G^{(n, \tilde{n})} = C_n \times \tilde{C}_{\tilde{n}}$ よりも高い対称性を持つ.

3.3 $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変な解からの 2 次分岐

群 $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ の既約表現は 1 次または 2 次であるので、分岐点は単純または 2 重分岐点 ($M = 1$ または 2) である. 単純分岐点からの分岐解の詳細については文献⁸⁾に

譲ることとし、ここではエシェロンモードが発生する2重分岐点に着目する。

2重分岐点における分岐解は2種類に分類される。最初の種類は群 $OB_{m\tilde{m}}^{\pm}$ により表されるものである (m と $\tilde{m}$ はそれぞれ n と $\tilde{n}$ の約数であり, $n/m = \tilde{n}/\tilde{m} \geq 3$ を満足する)。2番目の種類は式 (11) により定義される群 $EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$ により表されるエシェロンモードである。このモードは図 1(d) により表される。すなわち、エシェロンモードは2次分岐

$$\begin{aligned} C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \rightarrow OB_{n\tilde{n}}^{\pm} &\rightarrow EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm} \\ &\searrow OB_{m\tilde{m}}^{\pm} \rightarrow EC_{m\tilde{m}kl}^{\pm} \end{aligned}$$

の結果として発生する。図 3 に $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 同変な系の分岐の仕組みを示す。図中の数字は分岐点の多重度 M を表わす。例えば、 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 不変な主経路上の4重分岐点からダイヤモンドパターンの分岐解 $DI_{n\tilde{n}}$ とストライプパターンの分岐解 $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ が同時に分岐し、 $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変な経路上の2重分岐点からエシェロンモード $EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$ が分岐している。均質領域が分岐にともない、パターンを発生しながら乱れて行くことになる。

4. 解空間の2重フーリエ級数表示

第2, 3章で導入した一般論を、具体的な問題に適用するに当たり、どのような変位を対象とするかが問題となる。この章では、サイズ $L_x \times L_y$ の $x-y$ 平面内の長方形領域の z 方向変位 $w(x, y)$ を2重フーリエ級数

$$\begin{aligned} w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} &\left[A_{n\tilde{n}} \sin 2\pi n \frac{x}{L_x} \sin 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y} \right. \\ &+ B_{n\tilde{n}} \cos 2\pi n \frac{x}{L_x} \cos 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y} \\ &+ C_{n\tilde{n}} \sin 2\pi n \frac{x}{L_x} \cos 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y} \\ &\left. + D_{n\tilde{n}} \cos 2\pi n \frac{x}{L_x} \sin 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

により離散化した場合に対して第2, 3章の理論を適用する。このとき式 (6) の直和解に整合する形で2重フーリエ級数を分解できることが理論展開上重要である。すなわち、式 (12) の既約表現成分

$$R(C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}) = \{(k, \tilde{k}) \mid k, \tilde{k} = +, -, 1, 2, \dots\}$$

に、どのフーリエ級数項が対応するかを逐一調べることをとする。

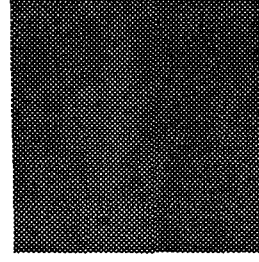
4.1 主経路からの分岐解

(1) 単純特異点 ($M = 1$)

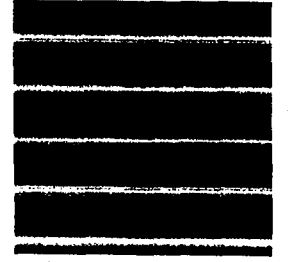
群 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ の4個の1次既約表現に対応する部分空間を張るフーリエ級数項は

$$\begin{aligned} X(+, +) &= \text{span}[0] \\ X(-, +) &= X(+, -) = X(-, -) = \text{span}[\phi] \end{aligned} \quad (14)$$

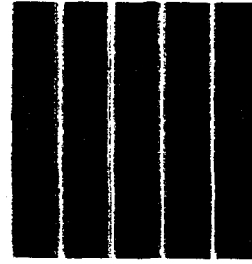
(a) 一様モード



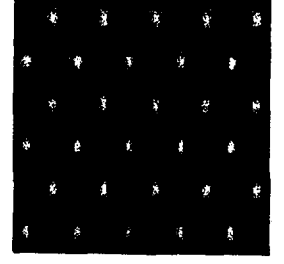
(b) y 方向の平行縞



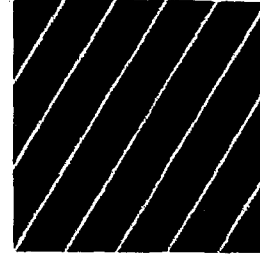
(c) x 方向の平行縞



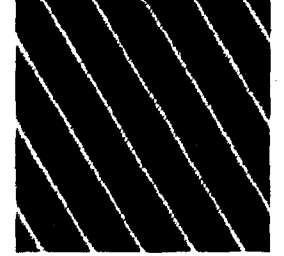
(d) ダイヤモンド



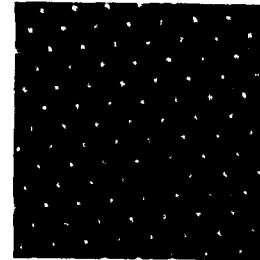
(e) ストライプ1



(f) ストライプ2



(g) エシェロン1



(h) エシェロン2

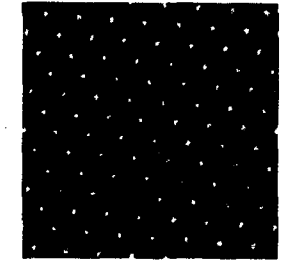


図-4 代表的なパターンの濃淡図

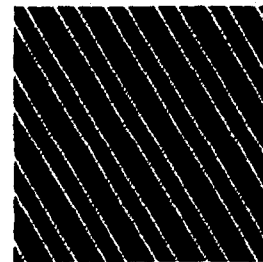


図-5 モードインタラクションによる変形の局所化

により与えられる。ここに $\text{span}[\cdot]$ は対応する部分空間が $[\cdot]$ 内のフーリエ級数項により張られることを表わし、0 は自明解 $w = 0$ に対応し、 ϕ は対応する空間が存在しないことを意味する。この場合には、自明解 $w = 0$ 上の荷重の極大・極小点に対応する部分空間 $X^{(+,+)}$ だけが存在し、単純分岐点は存在しないことになる。

(2) 2重分岐点 ($M = 2$)

群 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ の4個の2次既約表現に対応する部分空間を張るフーリエ級数項は

$$X^{(+,\tilde{n})} = \text{span} \left[\cos 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y}, \sin 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y} \right] \quad (15)$$

$$X^{(n,+)} = \text{span} \left[\cos 2\pi n \frac{x}{L_x}, \sin 2\pi n \frac{x}{L_x} \right] \quad (16)$$

$$X^{(-,\tilde{n})} = X^{(n,-)} = \text{span}[\phi] \quad (17)$$

である。 $X^{(+,\tilde{n})}$ と $X^{(n,+)}$ に対応する分岐解はそれぞれ $\cos(2\pi \tilde{n} y / L_y)$ と $\cos(2\pi n x / L_x)$ の方向に存在し、それぞれ y 方向と x 方向の平行縞状パターンを表わす。図4(a)に群 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 不変な完全に均質な変形モードを、(b)と(c)に式(15)と式(16)が表す平行縞状の変形モードをそれぞれ示す。この図は変形の大きさを濃淡により表したものである。

(3) 4重分岐点 ($M = 4$)

4次の既約表現 $(n, \tilde{n})$ に対応する部分空間は、

$$X^{(n,\tilde{n})} = \text{span} \left[\begin{aligned} &\cos 2\pi n \frac{x}{L_x} \cos 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y}, \sin 2\pi n \frac{x}{L_x} \sin 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y}, \\ &\cos 2\pi n \frac{x}{L_x} \sin 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y}, \sin 2\pi n \frac{x}{L_x} \cos 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y} \end{aligned} \right]$$

というフーリエ級数項により張られる。この4個のベクトルの任意の線形結合が分岐解となるのではなく、以下の2種類のパターンの方向にのみ分岐解が存在する。

$$\begin{cases} \cos 2\pi n \frac{x}{L_x} \cos 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y} & \text{ダイヤモンドパターン} \\ \cos 2\pi \left(n \frac{x}{L_x} \pm \tilde{n} \frac{y}{L_y} \right) & \text{ストライプパターン} \end{cases}$$

(鏡映 σ_x と σ_y の位置をずらしたのも解である)。図4(d)にダイヤモンドパターンの、(e)と(f)に2種類のストライプパターンの変形モードの濃淡図を示す。

4.2 $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変経路からの分岐

$OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変な経路は分岐直後は

$$\cos 2\pi \left(n \frac{x}{L_x} \pm \tilde{n} \frac{y}{L_y} \right)$$

という変形モードであるが、モードインタラクションにより整数倍の波と混合することにより波形を崩す。従ってこの経路に対応する部分空間を張るフーリエ級数項は

$$\text{span} \left[\cos 2\pi j \left(n \frac{x}{L_x} \pm \tilde{n} \frac{y}{L_y} \right) \right]_{j=1}^{\infty}$$

である。図5にモードインタラクションにより奇数倍の波と混合することにより波形を崩したストライプパターンの変形モードの濃淡図を示す。以下、 $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変な経路から枝別れする代表的な分岐モードについて調べる。

(1) 単純分岐点 ($M = 1$)

$OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変な経路上の単純分岐点から枝分かれする分岐経路の対称性は下記の2種類である。1つは対称性 $\sigma_x \sigma_y$ を失うがストライプの間隔は保存されるモード、もう1つは対称性 $\sigma_x \sigma_y$ は保つがストライプの間隔が2倍になるモードである。

(2) $OB_{m\tilde{m}}^{\pm}$ 不変な分岐経路 (2重分岐点)

$OB_{m\tilde{m}}^{\pm}$ 不変な分岐経路 (m と $\tilde{m}$ はそれぞれ n と $\tilde{n}$ の約数であり、 $n/m = \tilde{n}/\tilde{m} \geq 3$) は $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変な経路上の2重分岐点から枝別れし、ストライプパターンのパターンの粗大化を引き起こす。この分岐点の核空間を張るフーリエ級数項は下記のとおりである。

$$\begin{aligned} &\text{span} \left[\cos 2\pi \left((nj+m) \frac{x}{L_x} \pm (\tilde{n}j+\tilde{m}) \frac{y}{L_y} \right), \right. \\ &\quad \left. \sin 2\pi \left((nj+m) \frac{x}{L_x} \pm (\tilde{n}j+\tilde{m}) \frac{y}{L_y} \right), \right. \\ &\quad \left. \cos 2\pi \left((n(j+1)-m) \frac{x}{L_x} \pm (\tilde{n}(j+1)-\tilde{m}) \frac{y}{L_y} \right), \right. \\ &\quad \left. \sin 2\pi \left((n(j+1)-m) \frac{x}{L_x} \pm (\tilde{n}(j+1)-\tilde{m}) \frac{y}{L_y} \right) \right]_{j=0}^{\infty} \end{aligned}$$

(3) エシエロン分岐解 (2重分岐点)

$OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変経路上の2重分岐点からエシエロンモード $EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$ の対称性を持つ分岐解が枝別れする。図4(g)と(h)にエシエロンモードの変形の濃淡図を示す。どのフーリエ級数項がエシエロンモード $EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$ に対応するかを調べることにする。簡略のために $d = 1$ ($l = 0$)、つまり n と $\tilde{n}$ が公約数を持たないときに着目する。この場合には、式(11)の右辺の第1番目と第3番目の要素による変換に対し、フーリエ級数項

$$\cos 2\pi \left(m \frac{x}{L_x} \pm \tilde{m} \frac{y}{L_y} \right) \quad (18)$$

は不変に保たれるので、 $EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$ の対称性は、式(11)の2番目の要素が引き起こす変換

$$x \rightarrow x \mp L_x \frac{\tilde{n}}{k}, \quad y \rightarrow y + L_y \frac{n}{k} \quad (19)$$

に対する不変性となる。式(19)を式(18)に代入すると

$$\begin{aligned} &\cos 2\pi \left(m \frac{x}{L_x} \pm \tilde{m} \frac{y}{L_y} \right) \\ &= \cos 2\pi \left[m \left(\frac{x}{L_x} \mp \frac{\tilde{n}}{k} \right) \pm \tilde{m} \left(\frac{y}{L_y} + \frac{n}{k} \right) \right] \\ &= \cos 2\pi \left[\left(m \frac{x}{L_x} \pm \tilde{m} \frac{y}{L_y} \right) \mp \frac{m\tilde{n} - \tilde{m}n}{k} \right] \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$m\tilde{n} - \tilde{m}n = jk, \quad j = 1, 2, \dots \quad (20)$$

を満足する m と $\tilde{m}$ に対しフーリエ級数項(18)は $EC_{n\tilde{n}k0}^{\pm}$ 不変になる。

表-3 $m\tilde{n} - \tilde{m}n$ の値の一覧表 ($n = 9, \tilde{n} = 8$)

		$\tilde{m}$					
		5	6	7	8	9	10
m	5	-5	-14	-23	-32	-41	-50
	6	3	-6	-15	-24	-33	-42
	7	11	2	-7	-16	-25	-34
	8	19	10	1	-8	-17	-26
	9	27	18	9	0	-9	-18
	10	35	26	17	8	-1	-10

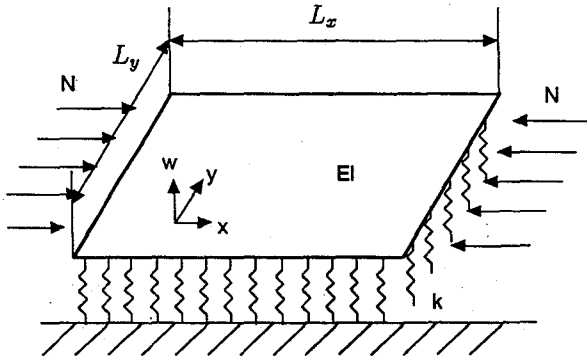


図-6 周期境界を持つ長方形板

$OB_{9,8}^{\pm}$ ($n = 9, \tilde{n} = 8$) の分岐解 $EC_{9,8,k,0}^{\pm}$ のモードの一例を式 (20) を用いて求めてみよう。 $5 \leq m \leq 10$, $5 \leq \tilde{m} \leq 10$ に対する $m\tilde{n} - \tilde{m}n$ の値を表 3 に示す。例えば、 $k = 10$ に対応する $EC_{9,8,10,0}^{\pm}$ 不変な分岐解の核空間は、この表の中の $m\tilde{n} - \tilde{m}n = \pm 10$ となる成分 $(m, \tilde{m}) = (8, 6), (10, 10)$ に対応するモードにより下記のように張られる。

$$\text{span} \left[\cos 2\pi \left(8 \frac{x}{L_x} \pm 6 \frac{y}{L_y} \right), \cos 2\pi \left(10 \frac{x}{L_x} \pm 10 \frac{y}{L_y} \right) \right]$$

5. 長方形板モデル

解析モデルとして、線形ばねにより鉛直反力 $q(x, y) = -kw$ を受ける、図 6 に示すサイズ $L_x \times L_y \times t$ の長方形板に x 軸方向面内に合力 N の一様圧縮力が作用する場合を考える。

5.1 ポテンシャル関数

このモデルに対するひずみの高次項まで考慮したポテンシャル関数は以下ようになる。

$$\Omega = \frac{D}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy$$

…面内曲げによる項

$$+ \frac{3D}{2t^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

…断面回転による膜力項

$$+ \frac{k}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w^2 dx dy$$

…線形ばねによる項

$$- \frac{2\pi^2 D}{L_y^2} f \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

…外力ポテンシャルの項

(21)

ここに E はヤング率、 ν はポアッソン比、 t は板厚、 $D = Et^3/[12(1-\nu^2)]$ は曲げ剛性であり、荷重パラメータ $f = L_y N/(4\pi^2 D)$ は無次元量として表わした。

5.2 2重フーリエ級数による離散化

サイズ $L_x \times L_y$ の $x-y$ 平面内の長方形領域の z 方向変位 $w(x, y)$ を 2 重フーリエ級数

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \left[A_{n\tilde{n}} \sin \left(2\pi n \frac{x}{L_x} \right) \sin \left(2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y} \right) + B_{n\tilde{n}} \cos \left(2\pi n \frac{x}{L_x} \right) \cos \left(2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y} \right) \right] \quad (22)$$

により離散化する。この離散化された変位に対し式 (21) のポテンシャル関数を表わし、偏導関数を求めることにより離散化された釣合い式を求め、この釣合い式を Newton-Raphson 法により解くことにより荷重変位関係を求める。

式 (21) の離散化にあたり、式 (13) の

$$\sin 2\pi n \frac{x}{L_x} \cos 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y}, \cos 2\pi n \frac{x}{L_x} \sin 2\pi \tilde{n} \frac{y}{L_y}$$

を無視したことに伴い、第 4 章で求めた分岐の仕組みは退化する。例えば、 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 不変経路上の 4 重分岐点は 2 重分岐点に退化してしまう。ダイヤモンドあるいはストライプパターンの対称性を持つ分岐解を平行移動させたものも分岐解となるという性質が消えてしまい、 $x = 0$ と $y = 0$ の位置の鏡映 σ_x と σ_y に不変なダイヤモンドパターンと $\sigma_x \sigma_y$ に不変なストライプパターンだけが分岐解として存在することになる。しかし、この退化は第 4 章でまとめた分岐の仕組みを壊すものでなく、第 4 章の主要な結果は殆どそのまま成り立つ。また、このように特定の分岐解だけが出てくることは数値解析の安定化にも好都合である。

6. 解析結果

分岐解析は低次の分岐モードが発生するケース 1 と高次の分岐モードが発生するケース 2 に対して行った。モデル諸元として $E = 1.12 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu = 0.27$, $k = 1.0 \text{ kgf/cm}^2$, $\alpha = L_x/L_y = 1.0$ を共通に用い、ケース 1

では幅厚比 $\beta = L_y/t = 100.0$ をケース 2 では 500.0 をそれぞれ用いた。

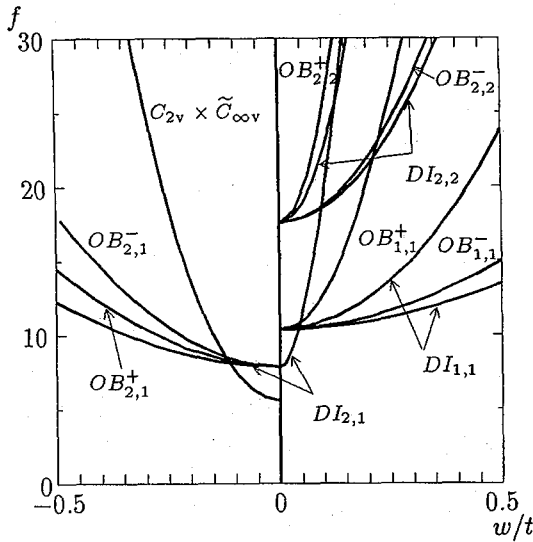


図-7 ケース 1 (低周波の分岐モード) の荷重変位曲線

(1) ケース 1 : 低周波の分岐モード

図 7 にケース 1 (低周波の分岐モード) に対し求めた分岐解曲線を示す。横軸 w/t は $(x, y) = (0.35L_x, 0.30L_y)$ の地点に対する値を用いた。式 (22) のフーリエ級数項の 1 次から 6 次までを用いた ($B_{n\tilde{n}}$ については $\tilde{n} = 0$ の項も用いた)。自明解である $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 不変な主経路上の 2 重分岐点から x 方向の縞模様解である $C_{2v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ が分岐している。また主経路上の 3 個の 2 重分岐点からストライプパターン $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ とダイヤモンドパターン $DI_{n\tilde{n}}$ [$(n\tilde{n}) = (1, 1), (2, 1), (2, 2)$] がそれぞれ同時に分岐している。以上の結果は第 4 章の理論と完全に合致しておりその妥当性を示している。図 8 に $OB_{2,1}^+$ 不変な分岐経路の変形モードの一例を示す。

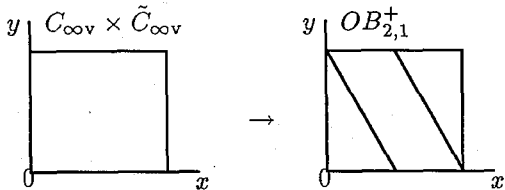


図-8 $OB_{2,1}^+$ 不変分岐モード

(2) ケース 2 : 高周波の分岐モード

図 9 にケース 2 (高周波の分岐モード) に対し求めた分岐解曲線を示す。式 (22) のフーリエ級数項の 5 次から 10 次までを用いた。自明解である $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ 不変な主経路上の 2 重分岐点からストライプパターン $OB_{8,5}^+$ とダイヤモンドパターン $DI_{8,5}$ が同時に分岐している。また主経路上の別の 2 重分岐点から (この分岐点では $DI_{9,8}$ 不変な分岐解は求めていない)

$$C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v} \rightarrow OB_{9,8}^+ \rightarrow EC_{9,8,111,0}^+$$

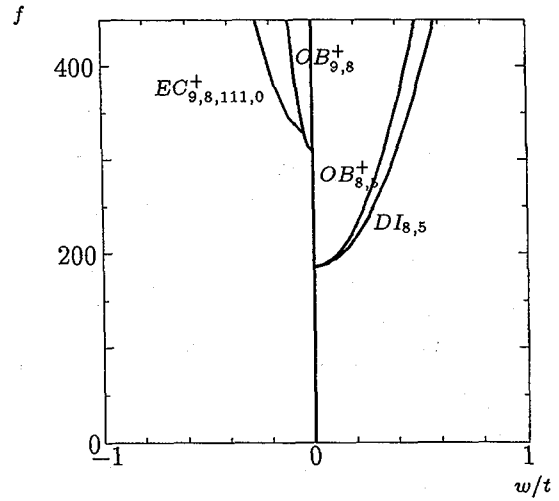


図-9 ケース 2 (高周波の分岐モード) の荷重変位曲線

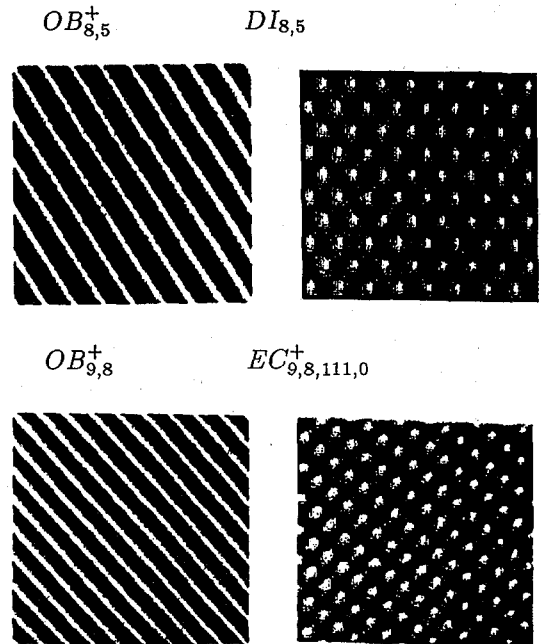
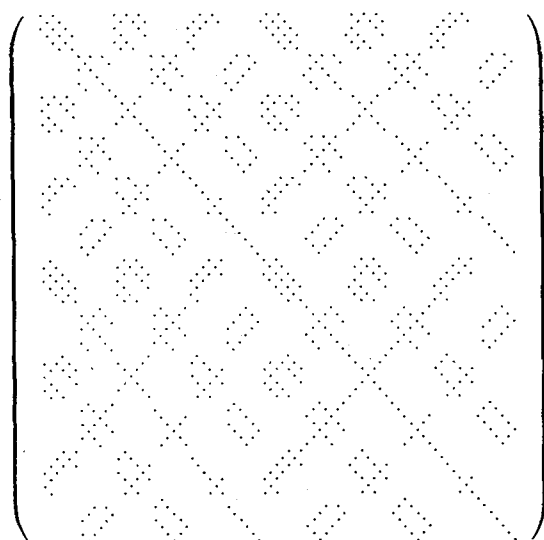


図-10 分岐経路における長方形板の変形モード

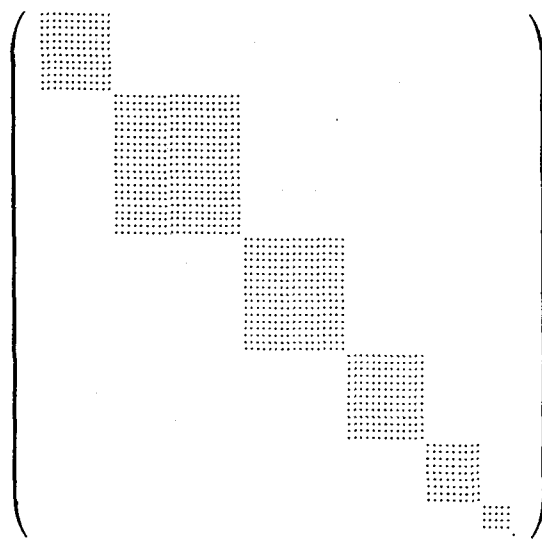
という 2 段階の分岐によりエシェロンモード $EC_{9,8,111,0}^+$ が分岐しており、第 4 章の理論の妥当性を裏付けている。図 10 に示す、各分岐経路における長方形板の変形モードは規則的な高周波の変形パターンを示している。

7. 接線剛性行列のブロック対角化

対称性を持つ系の特徴的な性質として、接線剛性行列が適当な座標変換によりブロック対角化できることがあげられる^{14),15)}。そこで、本論文でも第 4 章の終わりで述べた手続きに従い、フーリエ級数項の順序を並べ替えることにより、 $OB_{1,1}^+$ 不変経路における接線剛性行列



(a) ブロック対角化前



(b) ブロック対角化後

図-11 $OB_{1,1}^+$ 不変経路における接線剛性行列のブロック対角化

のブロック対角化を試みた。図 11(a) にブロック対角化前の (b) にブロック対角化後の接線剛性行列を示す。ブロック対角化により行列全体に散らばっていた非ゼロ項が対角ブロックに集まっており、数値解析に非常に有利な形になっている。

8. 結論

本論文では弾性床上に支持された周期境界を持つ長方形板の分岐解析を行うことにより、高周波の規則的な変形パターンの解析に成功した。この種の解析を大規模化し、より現実的な問題へと適用して行くことが今後の課題である。本論文で紹介した分岐の規則は分岐解析を行う上で有用であり、またブロック対角化法は大規模パターン解析の数値解析の効率化手法として有望である。

参考文献

- 1) 西牧孝洋: 砂の構成則に関する実験及び理論的考察, 東北大学工学部土木工学科修士論文, 1993.
- 2) 淡中泰雄, 中野正樹, 浅岡顕: 密な砂の限界状態近傍での非排水せん断挙動と破壊モードの観察, 土木学会第 52 回年次学術講演会講演概要集, III-A21, 42-43, 1997.
- 3) Davis, G.H.: Structural Geology of Rocks & Regions, John Wiley and Sons, 1984.
- 4) Petit, J. P.: Can natural faults propagate under mode II conditions? Tectonics 7, 1243-1256, 1988.
- 5) Turcotte, D. L.: Fractals and Chaos in Geology and Geophysics, Cambridge University Press, 1992.
- 6) Archambault, G., Rouleau, A., Daigneault, R. and Flamand, R.: Progressive failure of rock masses by a self similar anastomosing process of rupture at all scales and its scale effect on their shear strength, 133-141 In Scale Effects in Rock Masses 93, Edited by Da Cunha, A. P., Balkema, Rotterdam, 1993.
- 7) Ikeda, K. Murota, K. and Nakano, M.: Echelon modes in uniform materials. International Journal of Solids and Structures. 31, 2709-2733, 1994.
- 8) Murota, K. and Ikeda, K.: Mathematical mechanism underlying echelon-mode and shear-band formations — Bifurcation hierarchy of $O(2) \times O(2)$ -equivariant systems, Forschungsinstitut Diskrete Math., Univ. Bonn Report, No. 95844-OR, 1995.
- 9) Ikeda, K. and Murota K.: Recursive bifurcation as sources of complexity in soil shearing behavior, Soils and Foundations, Vol. 37, No. 3, 17-29, 1997.
- 10) 池田清宏, 中沢正利, 和知聡: 長方形板の分岐階層構造の境界条件による退化, 土木学会論文集, No.507/I-30, 65-75, 1995.
- 11) Sattinger, D.H.: Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory, Lecture Notes in Mathematics 762 Springer, Berlin, 1979.
- 12) Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G.: Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. 1, 1985.
- 13) Golubitsky, M., Stewart, I. and Schaeffer, D.G.: Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. 2, 1988.
- 14) Murota, K. and Ikeda, K.: Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, SIAM. J. of Scientific and Statistical Com-

- puting, Vol.12, No.2, 273-297, 1991.
- 15) Ikeda, K. and Murota, K.: Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 86, No.2, 215-243, 1991.
- 16) Ikeda, K., Murota, K. and Fujii, H.: Bifurcation hierarchy of symmetric structures, *Int. J. Solids Structures*, Vol.27, No.12, 1551-1573, 1991.
- 17) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W.: *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley and Sons, 1973.

(1997 年 9 月 26 日 受付)