

擬似対角ブロック行列の高速並列 SOR 反復法

FAST ITERATIVE SOR METHOD BY PARALLEL COMPUTING
FOR THE QUASI-DIAGONAL BLOCK STIFFNESS MATRIX

有尾 一郎* ・ 藤井 堅** ・ 佐藤 誠**

Ichiro ARIO, Katashi FUJII and Makoto SATO

*博士 (工学) 広島大学助手 工学部第四類 (建設系) (〒739 東広島市鏡山 1-4-1)

**工博 広島大学助教授 工学部第四類 (建設系) (同上)

Recently, the block-diagonalization method (BDM) has been proposed as a means to exploit the symmetry of structures. In this paper, we employed a numerical analysis in local symmetries of a series of substructures with different symmetries. Thus, the stiffness matrix of symmetric structures is formed the quasi-block diagonal matrix using the BDM. By applying to iterated calculation SOR method for regular polygonal net-structures so as to realize fast and parallelized iterative calculation method. We showed the advantages of the present method, including high-speed approximate solutions and reduced computer memory requirements for the large scaling symmetric structures.

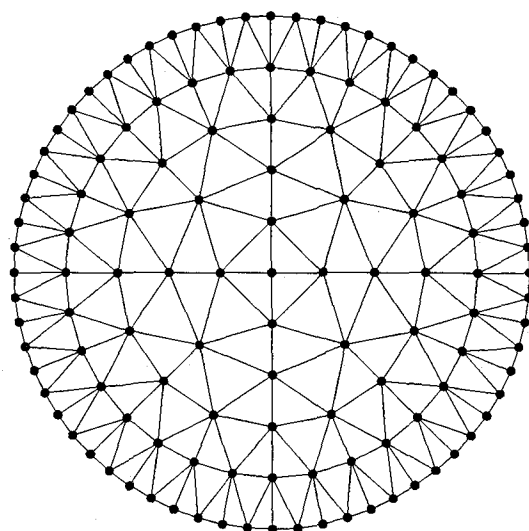
Key Words : block-diagonalization, iterative calculation, SOR, group-representation theory, local symmetric structures

1. はじめに

近年対称性を持つ構造系の剛性行列をブロック対角化する手法 (BDM) が利用されてきた^{1) ~ 7)}. この手法は対称な系の剛性行列をその幾何学的特性に基づいた座標変換を用いて, 剛性方程式を並列化するものである. 例えば, 円や球に近い対称性を持つ部分構造は, 高次の対称性が存在し, 工学的に有益な幾何情報として利用される. しかし, その利用はこれまで構造物全体の大局的な対称性に限定されたものであり, 局所的に異なる対称性の理論的応用には至っていなかった.

例えば, 図-1に示されるような軌道単位で異なる対称性を持つ構造系の剛性行列を局所的な対称性に対応する座標変換を行うことにより, 位相構造を持つ擬似対角ブロック行列¹⁾が生成されることが, 池田・室田⁸⁾によって発見された. さらに, このブロック構造は階層的な対称性の結び付き (応用数学では鎖適合基底と呼ばれる) により形成されることが明らかにされつつある.

本研究は, 局所対称構造物の構造解析法に擬似対角ブロックを利用することにより, 更なる対称性の利用法と新たな数値計算アルゴリズムを提案する. 我々はこのような擬似対角ブロック構造を持つ剛性方程式の線形反復法における, 並列化解析手法を開発した. 擬似対角ブロックに変換後, 対角ブロック毎に並列に Gauss の消去法や SOR 法を適用し, 数値計算の並列化・高速化と所要配列容量の縮小化の両立を実現する. この

図-1 $D_4, D_8, D_{16} \dots$ 軌道からなる局所対称構造系

ブロック毎の解を, 線形反復法などの反復計算の初期値として与え, 反復計算の高速化を図る. 数値計算例として, 対称構造系 (二面体群に同変な系) のネット構造に本手法を適用し, 本手法の有用性と妥当性を検証する.

2. 擬似対角ブロック変換

この章では, 局所対称性を持つ構造物の剛性方程式の擬似対角ブロック化の変換論について述べる.

¹⁾ この行列はスパースな行列となり, 局所対称構造の組成から連成ブロックが出現するものである.

2.1 剛性方程式の局所群同変性

複数の G_i 不変部分構造を持つ局所対称構造物の剛性方程式

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1)$$

とする。ここに、 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{f}$ は変位ベクトルと外力ベクトルをそれぞれ表し、剛性行列 $\mathbf{K}$ は

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{G_1} & K_{G_1 G_2} & & 0 \\ K_{G_2 G_1}^T & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & K_{G_{M-1}} & K_{G_{M-1} G_M} \\ 0 & & K_{G_M G_{M-1}}^T & K_{G_M} \end{bmatrix} \quad (2)$$

の部分構造 $K_{G_i G_j}$ から構成されているものとする。剛性方程式の局所対称性を記述するにあたり、本論文では部分構造の対称性が増加する対称構造物を対象とする²。幾何学的変換を表す元 g から構成される部分構造の対称群 G_i には部分群の鎖適合関係

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \cdots \subset G_M \quad (3)$$

が存在する⁴⁾。ここに、 $\subset$ の左側が親群 G_i を、右側が群 G_i の真部分群を示す。構造物全体の対称性は群 G によって定義される。これは群の表現論からよく知られている。部分構造の対称群の群元 g は $N \times N$ の表現行列 $T_i(g)$ により群の作用変換

$$T_i(g)\mathbf{u} = g(\mathbf{u}), \quad \forall g \in G_i \quad (4)$$

を満たすものとする。ここでは、外力ベクトル $\mathbf{f}$ は $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ と同一の空間に存在するものとする。

この系の局所対称性は、群 G_i の元 g が作用する写像変換 $T_i(g)$ に対する、方程式 $\mathbf{F}$ の不変性（群 G_i 不変性）

$$T_i(g)\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = \mathbf{F}(T_i(g)\mathbf{u}, T_i(g)\mathbf{f}), \quad \forall g \in G_i \quad (5)$$

という方程式 $\mathbf{F}$ の同変条件式を得る。これは幾何学的対称条件を一般化した式であり、この式が全ての $\mathbf{u}$ について成立することから、

$$T_i(g)K_{G_i} = K_{G_i}T_i(g), \quad \forall g \in G_i \quad (6)$$

という条件が求まる。これは部分構造 K_{G_i} がある座標変換行列によりブロック対角化が可能であることを意味する。この座標変換行列は既約表現 $\mu_i \in R(G_i)$ から組成したユニタリーな行列である^{4) ~ 6)}。

さらに、部分構造の対称群 $\{G_i \in G | G_1, \dots, G_M\}$ の既約表現全体を $R(G_i)$ とし、群 G_{i+1} から G_i の既約表現 μ_{i+1} に限定した記述を $\mu_{i+1} \downarrow G_i$ と記し、文献⁸⁾に準拠する。このように限定された表現は既約である必要はなく、鎖適合基底より

$$\mu_{i+1} \downarrow G_i = \sum_{\mu_i \in R(G_i)} m_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \cdot \mu_i, \quad \forall \mu_{i+1} \in R(G_{i+1}) \quad (7)$$

² ここでは対称性が増加していく対称構造物を考えるが、この理論は対称性が減少していく対称構造物にも容易に適用できる。

と表される。ここに、 $m_{\mu_i}^{\mu_{i+1}}$ は自然数である。これは、異なる対称群の間に派生する表現の鎖適合関係を系統的に分類・整理することにより、階層的な部分構造の仕組みを表現し、擬似対角ブロックによる並列計算を可能とするものである。

2.2 剛性方程式の擬似対角ブロック変換

群 G_i に対応する座標変換行列は既約表現 μ_i の列行列 H^{μ_i}

$$H_{G_i} = [\cdots, H^{\mu_i}, \cdots], \quad \forall \mu_i \in R(G_i)$$

から構成される。既約表現 μ_i に対応する局所座標系を、

$$\mathbf{u}_{G_i} = H_{G_i} \mathbf{w}_{G_i} = \sum_{\mu_i \in R(G_i)} H^{\mu_i} \mathbf{w}^{\mu_i} \quad (8)$$

とする。ここに、新しい座標系の変数 $\mathbf{w}_{G_i}$ は

$$\mathbf{w}_{G_i} = [\cdots, (\mathbf{w}^{\mu_i})^T, \cdots]^T, \quad \forall \mu_i \in R(G_i) \quad (9)$$

と既約表現毎の変数として表す。構造物全体の座標系の変位ベクトルをそれぞれ

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_{G_1}^T, \cdots, \mathbf{u}_{G_M}^T]^T, \\ \mathbf{w} = [\mathbf{w}_{G_1}^T, \cdots, \mathbf{w}_{G_M}^T]^T$$

とする。 i 番目の部分構造における剛性行列 K_{G_i} は座標変換行列 H_{G_i} により

$$H_{G_i}^T K_{G_i} H_{G_i} = \text{diag} [\cdots, \tilde{K}^{\mu_i}, \cdots], \quad \forall \mu_i \in R(G_i) \quad (10)$$

とブロック対角化できる。ここに $\text{diag}[\cdots]$ はブロック対角行列を表す。各対角ブロック $\tilde{K}^{\mu_i}$ は座標変換 H^{μ_i} より

$$\tilde{K}^{\mu_i} = (H^{\mu_i})^T K_{G_i} H^{\mu_i}, \quad \forall \mu_i \in R(G_i)$$

と可換である。

さらに群全体の座標変換行列 H は各群 G_i に対応する H_{G_i}

$$H = \text{diag} [H_{G_1}, \cdots, H_{G_M}] \quad (11)$$

からなる。このとき、この構造物全体の階層的な構造は

$$\tilde{K} = H^T K H = \text{diag} [\cdots, \tilde{K}^{\mu}, \cdots] \quad (12)$$

ブロック対角化が可能である。構造物全体の対称性に対する既約表現 μ の座標変換行列 H^{μ} を用いて

$$\tilde{K}^{\mu} = (H^{\mu})^T K H^{\mu}, \quad \forall \mu \in R(G) \quad (13)$$

と変換できる。したがって、剛性方程式 (1) は

$$H^T \mathbf{F} = H^T K H \mathbf{w} - H^T \mathbf{f} \\ = \tilde{K} \mathbf{w} - H^T \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (14)$$

と各既約表現に分解された方程式を得る。

ところで、構造物の局所対称性から派生する擬似対角ブロックは、文献⁴⁾より異なる対称性間の鎖適合関

係に支配される。擬似対角ブロック行列形は

$$\tilde{K}^\mu = \begin{bmatrix} \hat{K}^{\mu_1} & \hat{K}^{\mu_1}_{\mu_2} & \hat{K}^{\mu_1}_{\mu_3} & 0 \\ (\hat{K}^{\mu_1}_{\mu_2})^T & \hat{K}^{\mu_2} & 0 & \ddots \\ (\hat{K}^{\mu_1}_{\mu_3})^T & 0 & \hat{K}^{\mu_3} & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots \\ & & & \hat{K}^{\mu_m} \end{bmatrix} \quad (15)$$

と既約表現毎に分解された $\tilde{K}^\mu$ 行列内の組成構造を指す。既約表現 μ に対応する対角ブロックは、さらにそのブロックの細部にも遺伝的に対角ブロック行列 $\hat{K}^{\mu_i}$ と非対角ブロック $\hat{K}^{\mu_i}_{\mu_j}$ が存在する。我々は、この対角ブロック $\tilde{K}^\mu$ の細部構造とそれらの連成項の組成を数値計算に利用する。

3. 擬似対角ブロックの並列近似計算法

擬似対角ブロックの反復計算の並列化原理は他の反復法にも適用可能であるが、線形反復法の収束性の高いSOR法の適用に限定する。また、局所対称構造系の剛性方程式をブロック対角化後に派生する狭義の既約優対角ブロック行列が

$$\begin{aligned} \phi_i &\equiv \sum_{j=1}^{n^{\mu_i}} |\tilde{K}^{\mu_i}_{ij}| - \sum_{\substack{\mu_j \in R(G_j) \\ \mu_j \neq \mu_i}} \sum_{j=1}^{n^{\mu_j}} |\hat{K}^{\mu_i}_{\mu_j ij}| > 0, \\ i &= 1, 2, \dots, n^{\mu_i}, \quad \mu_i \in R(G_i) \\ \phi_j &\equiv \sum_{i=1}^{n^{\mu_j}} |\tilde{K}^{\mu_j}_{ij}| - \sum_{\substack{\mu_i \in R(G_i) \\ \mu_i \neq \mu_j}} \sum_{i=1}^{n^{\mu_i}} |\hat{K}^{\mu_j}_{\mu_i ij}| > 0, \\ j &= 1, 2, \dots, n^{\mu_j}, \quad \mu_j \in R(G_j) \end{aligned} \quad (16)$$

と優位な行列を満たすとき収束安定性が保証される⁹⁾。ここに、 n^{μ_i} , n^{μ_j} はあるブロック行列の行列サイズを表す。

擬似対角ブロック行列 $\tilde{K}^\mu$ は対角ブロック $\hat{K}^\mu$ と非対角ブロック Q の和

$$\tilde{K}^\mu = \hat{K}^\mu + Q \quad (17)$$

として表される。ここに、

$$\hat{K}^\mu = \text{diag} [\hat{K}^{\mu_1}, \hat{K}^{\mu_2}, \dots, \hat{K}^{\mu_m}] \quad (18)$$

である。これを式(14)に代入すると

$$(\hat{K}^\mu + Q) w^\mu - b^\mu = 0 \quad (19)$$

と表される。ここに、 $b^\mu = (H^\mu)^T f$ である。式(19)を変形することにより、

$$w_{k+1}^\mu = (\hat{K}^\mu)^{-1} r^\mu \quad (20)$$

線形反復式を得る。ここに、 r^μ は残差ベクトル($r^\mu = b^\mu - Q w_k^\mu$)である。すなわち、

$$w_{k+1}^{\mu_i} = (\hat{K}^{\mu_i})^{-1} \left((H^{\mu_i})^T f - \sum_{\substack{\mu_j \in R(G_j) \\ \mu_j \neq \mu_i}} \hat{K}^{\mu_i}_{\mu_j} w_k^{\mu_j} \right),$$

$$\forall \mu_i \in R(G_i), \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

と表される。反復法による収束計算で問題となるのは、条件の悪い行列によって解が収束しにくいときがあることと、初期値によって収束性が変動することである。

一方、 $\hat{K}^\mu$ を既約表現ごとの下三角行列、対角行列、および上三角行列の和

$$\hat{K}^\mu = \hat{L}^\mu + \hat{D}^\mu + \hat{R}^\mu, \quad \forall \mu \in R(G) \quad (22)$$

とすると、式(21)は

$$\begin{aligned} w_{k+1}^\mu &= \omega (\tilde{D}^\mu)^{-1} (r^\mu - \tilde{L}^\mu w_{k+1}^\mu - \tilde{R}^\mu w_k^\mu) \\ &+ (1 - \omega) w_k^\mu, \quad \forall \mu \in R(G) \end{aligned} \quad (23)$$

と求められる。ところで、残差ベクトル r^μ の $\hat{K}^{\mu_i}_{\mu_j}$ は、下三角行列 $\hat{L}$ と上三角行列 $\hat{R}$ に分解できるので

$$\begin{aligned} r^\mu &= b^\mu - \sum_{\substack{\mu_j \in R(G_j) \\ \mu_j \neq \mu_i}} \hat{K}^{\mu_i}_{\mu_j} w_k^{\mu_j} \\ &= b^\mu - \hat{L} w_{k+1}^\mu - \hat{R} w_k^\mu \\ &= b^\mu - \sum_{\substack{\mu_j \in R(G_j) \\ \mu_j < \mu_i}} \hat{K}^{\mu_i}_{\mu_j} w_{k+1}^{\mu_j} - \sum_{\substack{\mu_j \in R(G_j) \\ \mu_j > \mu_i}} \hat{K}^{\mu_i}_{\mu_j} w_k^{\mu_j}, \\ &\quad \forall \mu \in R(G) \end{aligned} \quad (24)$$

と表せられる。また、 $\hat{K}^\mu$ が対称行列であればどちらかの三角行列だけで十分である。この一連の計算は既約表現 μ_i ごとに並列に近似解を求めた後、 $k = 1, 2, \dots$ を繰り返しSOR法によって収束させる。

非対角ブロックを無視したときの誤差評価の一つの方法として条件数を利用する。条件数については文献^{10),11)}を参照されたい。一般の誤差を含んだ連立方程式は

$$(\tilde{K}^\mu + \delta \tilde{K}^\mu)(w^\mu + \delta w^\mu) = b^\mu + \delta b^\mu$$

と表される。ここに $\tilde{K}^\mu = Q$ とし、この式の右辺の δb^μ は誤差を含まないものとする、行列ノルムの相対誤差比は

$$\frac{\|\delta w\|}{\|w\|} \leq \frac{\|(\tilde{K}^\mu)^{-1}\| \cdot \|Q\|}{1 - \|(\tilde{K}^\mu)^{-1}\| \cdot \|Q\|}$$

と表せられる。このとき条件数は

$$\text{cond}(\tilde{K}^\mu) = \|(\tilde{K}^\mu)^{-1}\| \cdot \|Q\| \quad (25)$$

となる。また、近似的に $\tilde{K}^\mu$ の代わりに $\hat{K}^\mu$ を用いると

$$\text{cond}(\hat{K}^\mu) = \|(\hat{K}^\mu)^{-1}\| \cdot \|Q\| \quad (26)$$

と示することができる。通常条件数が大きいときには誤差が大きくなるが、条件数が小さく非対角ブロックが非常にスパースな行列であれば誤差は小さい。

4. 擬似対角ブロックの数値計算

本理論の数値解析例として、正 n 角形状(D_n 不変)の部分構造系の剛性方程式に着目し、群 D_n と既約表現 μ の定義に関しては文献^{4),5)}に譲ることとする。

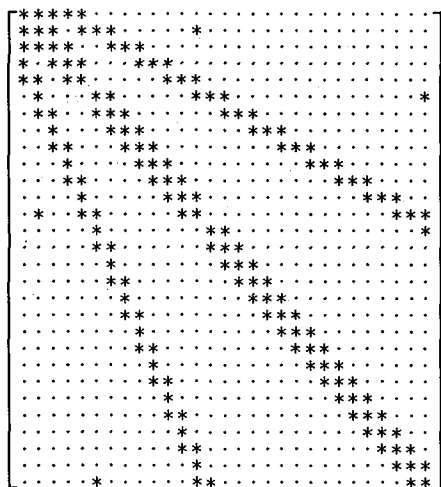


図-2 全体の剛性行列 K

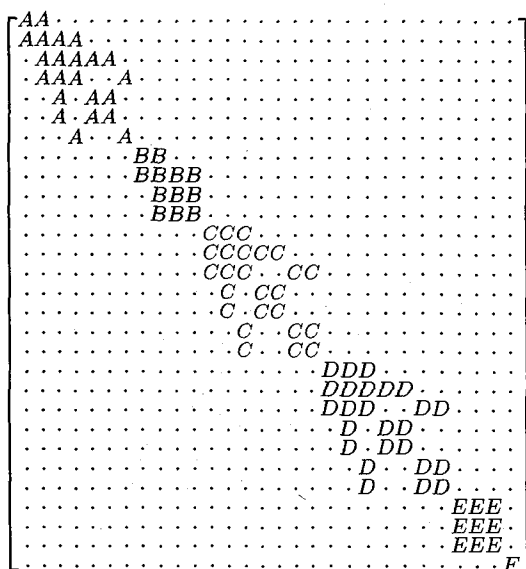


図-3 ブロック対角形へ変換

4.1 局所対称構造物の擬似対角ブロック例

図-1の D_4, D_8, D_{16} の3つの軌道までの梁要素の構造系を取り上げる。ここに、この局所対称ネット構造物 ($n = 16, m = 3$) の剛性方程式の擬似対角ブロック変換を考える。この構造モデルの自由度は Z 方向変位の1自由度/節点とし、モデル全体で29自由度である。このときの剛性行列の行列成分の有無を図-2に示す。図中の印*は非ゼロ成分を、印・はゼロ成分をそれぞれ表す。この剛性行列全体は従属的な関係となる³。このスパースな行列形における、計算速度は行列サイズや行列の帯幅に強く依存する¹²⁾。

一方、この構造物の幾何学的対称性である局所対称性において、この系の節点に関して3種類の軌道を持つ。内側の軌道から、二面体群の表記法で D_4, D_8, D_{16}

³ この関係は節点の選定と無関係に現れ、擬似対角ブロック変換はナンバリングには不変である。

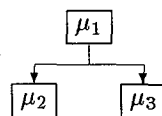


図-4 既約表現 μ_1, μ_2, μ_3 の階層構造

が存在し対称性の次数が増加する⁴。これらの軌道に関する対称性の関係は

$$D_4 \supset D_8 \supset D_{16}, \quad D_4, D_8, D_{16} \in G$$

と表され、このときの既約表現を文献⁵⁾より、各対称群毎に $\mu \equiv (d, j)_n$ と定義する。例えば、 D_4 であれば

$$(1, 1)_4, (1, 2)_4, (1, 3)_4, (1, 4)_4, (2, 1)_4^+, (2, 1)_4^-$$

の6個の既約表現が存在する。それぞれの対称性に対応する座標変換行列

$$H = \begin{bmatrix} H_{G_1} & & 0 \\ & H_{G_2} & \\ 0 & & H_{G_3} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} G_1 = D_4 \\ G_2 = D_8 \\ G_3 = D_{16} \end{cases}$$

を用いて、直接軌道毎に変換

$$\tilde{K} = H^T K H$$

を行なうと、図-3に示されるようにブロック対角形に変換できる。ブロック A は既約表現 $(1, 1)_4$ 、 B は $(1, 3)_4$ 、 C は $(2, 1)_4^+$ 、 D は $(2, 1)_4^-$ 、 E は $(1, 2)_4$ および F は $(1, 4)_4$ にそれぞれ属する。

例えば、ブロック $C (= \hat{K}^{(2,1)_4^+})$ の細部はさらに擬似対角ブロック細胞を形成している。このブロック内を既約表現で表すと

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{\mu_1}^{\mu_1} & \hat{K}_{\mu_2}^{\mu_1} & \hat{K}_{\mu_3}^{\mu_1} \\ \hat{K}_{\mu_1}^{\mu_2} & \hat{K}_{\mu_2}^{\mu_2} & 0 \\ \hat{K}_{\mu_1}^{\mu_3} & 0 & \hat{K}_{\mu_3}^{\mu_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w^{\mu_1} \\ w^{\mu_2} \\ w^{\mu_3} \end{Bmatrix} = b^{\mu} \quad (27)$$

の式が成り立つ。このブロック行列の所要配列容量は全体の剛性行列の容量に対して、わずか6%になった。この既約表現間の鎖適合関係は図-4で示され、小ブロック μ_1 の計算後では μ_2 と μ_3 の計算は、互いに独立な並列計算が可能である。この計算原理に基づいて反復計算を局所的に並列化を行なう。

4.2 本手法による数値計算

式(27)の正規化された既約優対角ブロック $\hat{K}^{\mu}$ は

$$\hat{K}^{\mu} = \text{diag} [\hat{K}^{\mu_1}, \hat{K}^{\mu_2}, \hat{K}^{\mu_3}] \quad (28)$$

である。ここに、曲げ剛性 $EI = 1(\text{kNm}^2)$ としたときの各成分は

$$\hat{K}^{\mu_1} = \begin{bmatrix} 3.3 & -1.0 & -0.4 \\ -1.0 & 2.7 & 0.2 \\ -0.4 & 0.2 & 3.5 \end{bmatrix},$$

⁴ この系の場合、このほかに部材の軌道に関する対称性が存在し、節点軌道の対称性 D_{16} は部材軌道の対称性 D_8 と結合され、 D_{16} の対称性が崩れる。

表-1 並列化SOR法による数値計算結果

No.	r	w^{μ_1}				w^{μ_2}		w^{μ_3}	
1	14.6477	3.030	3.704	2.857	5.000	3.030	5.882	3.846	
2	0.4262	4.793	8.516	5.405	10.950	3.251	9.045	4.676	
3	0.0335	6.561	11.305	6.065	11.755	3.381	8.773	4.675	
4	0.0006	7.317	11.466	5.941	11.702	3.369	8.749	4.648	
5	0.0000	7.207	11.366	5.946	11.641	3.366	8.758	4.654	
6	0.0000	7.193	11.348	5.948	11.640	3.365	8.757	4.653	
Gauss	—	7.190	11.350	5.947	11.641	3.365	8.757	4.653	

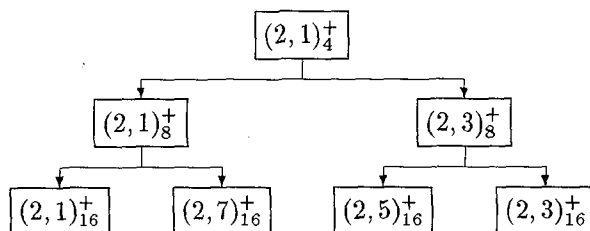


図-5 D_4, D_8 および D_{16} の既約表現 $(2,1)_m^+$ 階層構造 ($m=3$)

表-2 並列化SOR法による数値計算結果 (μ sec)

計算法	w^{μ_1}	w^{μ_2}	w^{μ_3}	計
SOR法	117	76	76	269
並列化SOR法	117	76		193
Gauss法		86		86

$$\hat{K}^{\mu_2} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.1 \\ 0.1 & 3.3 \end{bmatrix}, \quad \hat{K}^{\mu_3} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.1 \\ 0.1 & 2.6 \end{bmatrix}$$

であり、非対角ブロック行列の成分は

$$\hat{K}_{\mu_2}^{\mu_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.2 & -0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{K}_{\mu_3}^{\mu_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.9 & -0.5 \end{bmatrix}$$

となる。

このブロックの収束安定性が保証されるかを式(16)で確認する。 ϕ_i ($i=1,2,\dots$) について調べると

$$\phi_i > 0$$

となり、狭義の既約優対角ブロックである。また、条件数を Z 条件数を用いて計算すると、

$$Z(\hat{K}^{\mu}) = \|(\hat{K}^{\mu})^{-1}\|_{\infty} \cdot \|Q\|_{\infty} = 0.856$$

となり、行列ノルムの相対誤差比 $\|\delta w\|/\|w\| \leq 5.94$ となり、この擬似対角ブロック行列の非対角ブロックを無視できない。ところで、右辺の変換後の荷重ベクトルを

$$b^{(2,1)^+} = 10(1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$$

とする。この擬似対角ブロックに対して、本手法と直接法による両者の数値結果を表-1に示す。最終的に計算結果は直接法の Gauss の消去法とほぼ同一の解を得ており、従来の反復法による逐次計算と全く同一の近似解を得た。実質的な並列計算は、ブロック $\hat{K}^{\mu_1}$ の解 w^{μ_1} を算出後、ブロック $\hat{K}^{\mu_2}$ と $\hat{K}^{\mu_3}$ の計算段階では解 w^{μ_2} と

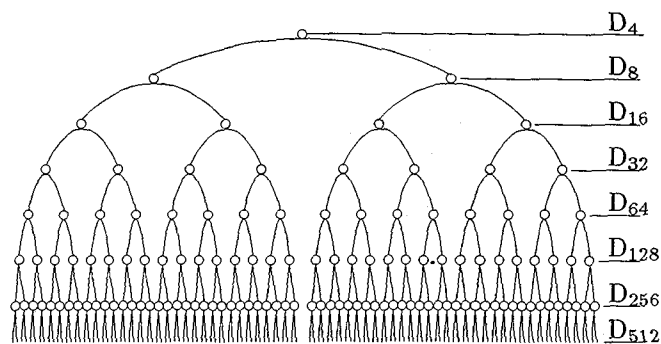


図-6 D_{128} 構造系の $\mu = (2,1)_4^+$ の鎖適合構造図

w^{μ_3} が一次独立な関係にあるので、局所的に独立な反復計算が可能となる。つまり、この構造系の既約表現は図-5に示されるような鎖適合関係があり、ブロック $(2,1)_4^+$ の計算後 $(2,1)_8^+$ 以下の表現と $(2,3)_8^+$ 以下の表現は対等な独立空間となる。このように本手法は、対称性の階層構造から局所的に並列計算を可能にしている。また、これらの行列における計算時間を可能な限り同一条件下で測定した。本研究で用いた計算機は DOS/V 汎用機 (Pentium 133Hz, SIMM 32Mbytes) である。その結果を表-2に示す。このモデルの剛性行列全体を汎用性のある Gauss の消去法では 86μ sec を、SOR 反復法では 269μ sec を、さらに、本手法⁵では 193μ sec をそれぞれ得た。この場合では本手法は直接法の 2.2 倍も計算時間がかかった。本手法は既約表現 μ_2, μ_3 においては対等なレベルで並列可能であり、対称性が増加するような場合では既約表現も増加し、並列化に適する手法となる。しかし、このような小規模の対称系構造では直接法 (Gauss の消去法) による計算が優位な結果となった。

次に、このような計算原理に基づいて大規模な局所対称構造系 ($n=128, m=6$) を考えよう。この系全体の対称性は D_4 群作用下にあるので、この群の既約表現は $(1,1)_4, (1,2)_4, (1,3)_4, (1,4)_4, (2,1)_4^+, (2,1)_4^-$ の 6 個存在する。このうち $(2,1)_4^+$ と鎖適合基底にある対称性の階層構造を図-6に示す。この階層構造は典型的な 2 倍化周期位相構造を持ち、これらの各軌道の対称性の既約表現の鎖適合基底により、低次の対称性から行列表現で表すと、図-7に示されるような擬似対角ブロック形が得られる。この行列形は、もはや図-2のような行列空間とは本質的に異なる。この行列が、もし対称行列であれば、図-8に示されるように、非ゼロのブロック成分のみを確保すればよい。このように縮約された行列サイズは擬似対角ブロック全体の約 8% まで圧縮できる。実際にはその変換後の行列組成が分かっている作業領域は行列サイズに比べ小さい。したがって、剛性行列全体に対してはこれ以上の圧縮効果が期待で

⁵ 既約表現 μ_2, μ_3 の行列演算を並列処理としたときの計算時間を算定した。

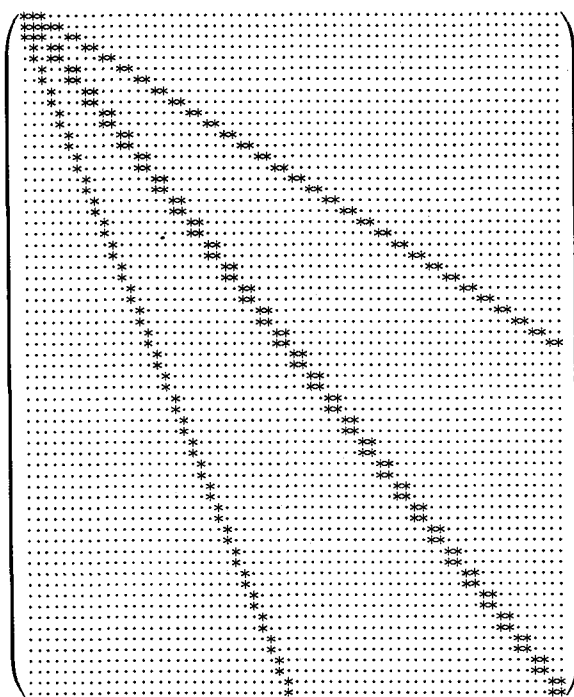


図-7 D_{128} 構造系の $\mu = (2, 1)_4^+$ の擬似対角ブロック行列

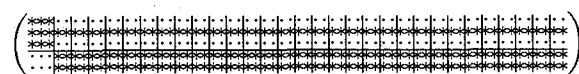


図-8 D_{128} 構造系の配列行列の格納例

きることとなる。

最後に、図-1におけるパラメータ m を変化させたときの、各種手法による計算時間を図-9に示す。図中の印□は Gauss の消去法を、印○は線形反復法の SOR 法を、および印●は本手法を、それぞれ用いたときの計算時間である。小規模の構造系に対しては直接法が優位であったが、大規模な D_{128} 系では本手法は直接法の $1/10$ ほどの計算時間で終了した。このときの並列可能な既約表現数は 30 個あり、大規模な構造系にもかかわらず、その並列化計算の適応性と優位性が示せた。この計算はどちらも擬似対角ブロック形の 1 つの既約表現内で計算しているので、直接変換前の全帯行列の剛性行列の計算と比較すると、この差は歴然たる違いが現れることになる⁶。

結 論

本研究では、擬似対角ブロックを用いることにより、局所対称構造系の剛性方程式の線形反復法を並列高速化できる計算原理を示すことができた。今後の課題として、本格的な構造解析への適用が望まれる。

⁶ 直接剛性行列全体とブロック対角化変換後の剛性行列の計算時間については文献⁷⁾を参照されたい。

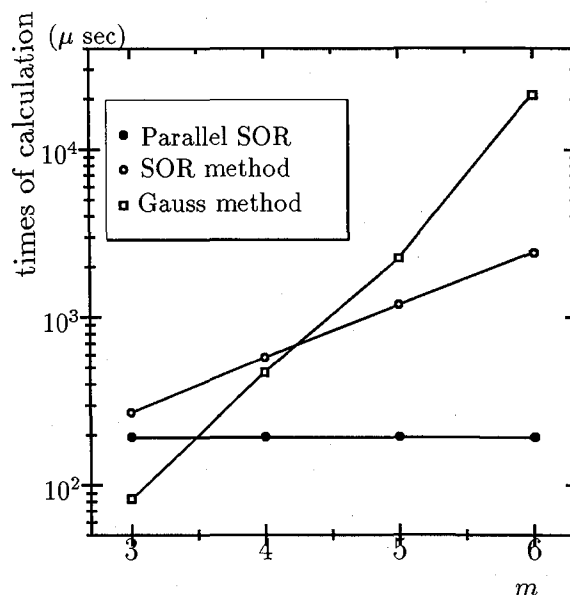


図-9 パラメータ m に対する各種計算時間の比較

参考文献

- 1) Zloković, G. : Group Theory and G -vector Spaces in Vibrations, Stability and Statics of Structures, *ICS, Beograd*, (In English and Serbo-Croatian), 1973.
- 2) Dinkevich, S. : Finite symmetric systems and their analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 27(10), pp. 1215-1253, 1991.
- 3) Healey, T.J. and Treacy, J.A. : Exact block diagonalization of large eigenvalue problems for structures with symmetry, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, pp.265-285, 1991.
- 4) Murota, K. and Ikeda, K. : Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *SIAM Journal on Statistical and Scientific Computing*, 12(2), pp.273-297, 1991.
- 5) Ikeda, K. and Murota, K. : Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 86(2), pp.215-243, 1991.
- 6) Ikeda, K., Ario, I. and Torii, K. : Block-diagonalization analysis of symmetric plates, *International Journal of Solids and Structures*, 29(22), pp.2779-2793, 1992.
- 7) Ario, I., Ikeda, K. and Murota, K. : Block-diagonalization method for symmetric structures with rotational displacements, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE*, No.489/I-27, pp.27-36, 1994.
- 8) 池田 清宏・室田 一雄 : 局所対称構造物のブロック対角化法による並列解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol.16, pp.165-170, 1992.
- 9) 薄井 正孝・仁木・小武守 恒・河野 敏行 : $(I + \beta U)$ 型前処理付 Gauss-Seidel 法の収束定理, 応用数理学会論文誌, Vol.6(4), pp.307-316, 1996.
- 10) R. Anthony and R. Philip : A First Course in Numerical Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, Inc., 1978.
- 11) 林 正・濱田 政則, 土木学会編 新体系土木工学 1, 数値解析, 技報堂出版, 1994.
- 12) 有尾 一郎・池田 清宏・藤井 堅・佐藤 誠, ブロック対角化法による対称構造系の剛性行列の高速 LU 分解, 土木学会 計算工学論文集, Vol.2(2), 1997.