

断面力表示型二曲面モデルによる鋼構造部材の有限変位解析

FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF STEEL MEMBERS WITH TWO-SURFACE MODEL
IN FORCE SPACE

水野英二*, 劉 青芸**, 近藤智之***, 鈴木健泰****

Eiji MIZUNO, Qing Yun LIU, Tomoyuki KONDOH, Takehiro SUZUKI

*正会員 Ph.D. 中部大学 教授 工学部土木工学科 (〒487 愛知県春日井市松本町 1200)

**学生会員 工修 名古屋大学大学院 工学研究科博士課程(後期課程) (〒464-01 名古屋市千種区不老町)

***学生会員 工修 JR 東海 (〒103 東京都中央区八重洲一丁目 6 番 6 号)

****工修 静岡県 土木部 (〒420 静岡市追手町 9-6)

This study deals with the inelastic large displacement analysis of steel members and frame under cyclic loading. An elasto-plastic plane beam-column element formulation accounting for both the material and geometrical nonlinearities is developed and is implemented in the computer program, FEAP, used in the analysis. In order to predict the sectional behavior of beam-columns under cyclic loading, a two surface plasticity model in the force space is proposed to account for the material nonlinearity. The performance of the formulation is verified by comparing the obtained analytical results from present model with those of the experiments and other models.

Key words: two-surface model, force space, plasticity, steel, and cyclic deformation

1. 緒言

塑性域にまでおよぶ範囲で繰り返し载荷を受ける鋼構造部材の非線形挙動に関する基礎的研究は、大型鋼骨組構造物の設計に関して有益かつ重要な情報を提供する。このため、地震力など大きな繰り返し外力が作用する鋼構造物の繰り返し変形挙動を明確に把握する上で、幾何学的非線形性と材料的非線形性とを考慮した弾塑性有限変位解析を行うことは重要である。

鋼素材の応力-ひずみ関係モデル（以下、応力表示型構成モデルと呼ぶ）を採り入れて鋼構造物の有限要素解析を行う場合、部材断面を有限個の要素に分割して各要素ごとに応力表示型構成モデルのパラメータ値の更新などを逐次行う必要がある。このため、多自由度の骨組構造物の弾塑性解析を行う場合には膨大な記憶容量を必要とし、さらに、計算時間も長大なものとなることから未だ現実的な手法とは言えない。

現実的なレベルで鋼構造物の弾塑性解析を可能とするために、二次元または三次元断面力空間（モーメント M -軸力 P -曲率 Φ 空間）で降伏曲面を設定し、塑性論によって部材断面の弾塑性挙動を記述する断面力-断面変形関係モデル（以下、断面力表示型構成モデルと呼ぶ）が開発された^{1)~5)}。断面力表示型構成モデルを有限要素構造解析に適用することにより、上述のような応力表示型構成モデルを用いた有限要素解析に比べて計算量・記憶量が

大幅に少なくできること、計算時間が短くて済むことが確認されている^{3)~5)}。

これまで筆者の一人は、Dafalias・Popov⁶⁾による二曲面モデルを基に、仮想境界線、記憶曲面などを導入することにより複合応力下の構造用鋼材の降伏棚域からひずみ硬化域を含む範囲で弾塑性挙動を精緻に表現できる応力表示型の修正二曲面モデルを開発してきた^{7)~9)}。

本研究では、この応力表示型修正二曲面モデルの概念に立脚し、一軸曲げモーメント-軸力空間での断面力表示型構成モデルの開発を行う。さらに、幾何学非線形性を採り入れるため近似更新ラグランジェ法を用いて、平面骨組鋼構造部材および鋼フレームの複合非線形有限要素解析を行う。本研究で提案する断面力表示型構成モデルを用いた解析結果と、実験結果ならびに応力表示型修正二曲面モデルおよび完全弾塑性型構成モデルによる解析結果とを比較することにより、断面力表示型構成モデルの適用性・妥当性について検討する。

2. 一軸曲げ-軸力空間での断面力表示型二曲面モデル

本節では、応力表示型修正二曲面モデル^{7)~9)}の概念に立脚して、一軸曲げ-軸力空間で降伏曲線、降伏棚曲線、境界曲線、仮想境界曲線、および記憶曲線などを導入することにより断面力表示型二曲面モデルを構築する。特別の場合として、軸力状態では、断面力表示型二曲面モ

デルは応力表示型修正二曲面モデルに帰着する。断面力表示型モデルの構築に際して、次の基本仮定を用いる：

- (a) 平面保持の仮定が成り立つ。
- (b) 断面の変形は無視する。
- (c) 断面内の応力は直応力のみを仮定する。

2.1 基本概念

軸力 N を降伏軸力 N_y で、曲げモーメント M を初期降伏モーメント M_y でそれぞれ無次元化した無次元断面力空間 (m, n) を定義する。無次元断面力空間 (m, n) における、初期状態での各曲線群（例えば、降伏曲線、降伏棚曲線、境界曲線）の概略を図-1に示す。

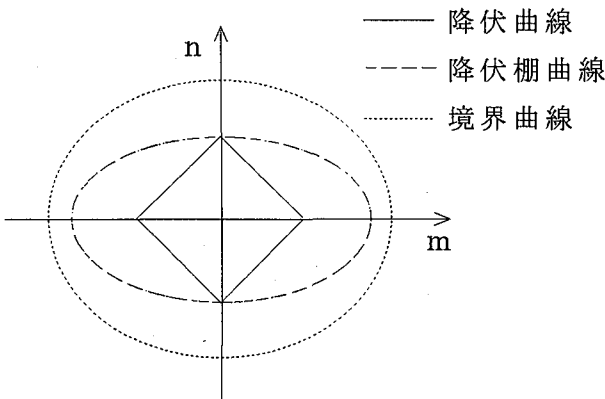


図-1 初期状態での各種曲線

一軸（引張・圧縮）载荷による軸力-塑性軸ひずみ関係は塑性域に入ると同時に降伏棚が表れ、その後ひずみ硬化を示す。このことから、初期降伏曲線と降伏棚曲線は n 軸上で接する。一方、一軸曲げによる曲げモーメント-塑性曲率関係は弾塑性域に入った後、緩やかなカーブを描いて傾きがゼロに近い定常域に至り、ひずみ硬化を示す。よって、初期降伏曲線と降伏棚曲線とは m 軸上では接しない。降伏棚曲線が消失した後は、断面状態は硬化を始め、負荷曲線は境界曲線に向かう。本モデルにおいても、記憶曲線と仮想境界曲線は、境界曲線と形状が相似であり、同じ中心を有する曲線として定義する。

2.2 曲線式

(1) 初期降伏（負荷）曲線

鋼部材断面が塑性化し始める状態を次式で定義する。

$$F_0(m, n) = |m| + |n| - 1 = 0 \quad (1)$$

(2) 降伏棚曲線

断面内の多くの部分が降伏棚域にある場合、断面の挙動も剛性がほぼゼロに近い状態となる。応力-ひずみ関係を降伏棚として完全弾塑性性を仮定した場合の全断面塑性曲線を降伏棚曲線 F_y として採用する。曲線式を次式で与える。

$$F_y(m, n) = \left| \frac{m}{f_y} \right|^{C_1} + |n|^{C_2} - 1 = 0 \quad (2)$$

ここで、 C_1, C_2 ：定数、 f_y ：形状係数（表-2 参照）。

(3) 境界曲線

境界曲線 F_b を次式で与える。

$$F_b(m, n, \beta_m, \beta_n, r_b) = G_b(m, n, \beta_m, \beta_n, r_b) - 1 = 0 \quad (3)$$

$$= \left| \frac{m - \beta_m}{r_b \cdot f_b} \right|^{C_3} + \left| \frac{n - \beta_n}{r_b} \right|^{C_4} - 1 = 0$$

ここで、

f_b ：形状パラメータ

r_b ：修正二曲面モデルの境界曲面半径 $\bar{\kappa}$ と初期降伏曲面半径 κ_0 との比。

(β_m, β_n) ： (m, n) 空間での境界曲線の中心座標

(4) 記憶曲線と仮想境界曲線

記憶曲線と仮想境界曲線は、境界曲線と形状が相似で境界曲線と同じ中心を有する曲線であると仮定する。

記憶曲線 F_m は、以下のように表される。

$$F_m(m, n, \beta_m, \beta_n, r_m) = G_b(m, n, \beta_m, \beta_n, r_m) - 1 = 0 \quad (4)$$

ここで、

r_m ：修正二曲面モデルで記憶曲面の半径 $\bar{\kappa}_m$ と初期降伏曲面半径 κ_0 との比。

荷重点が記憶曲線の外側に位置する場合、記憶曲線は図-2のように逐次更新される。

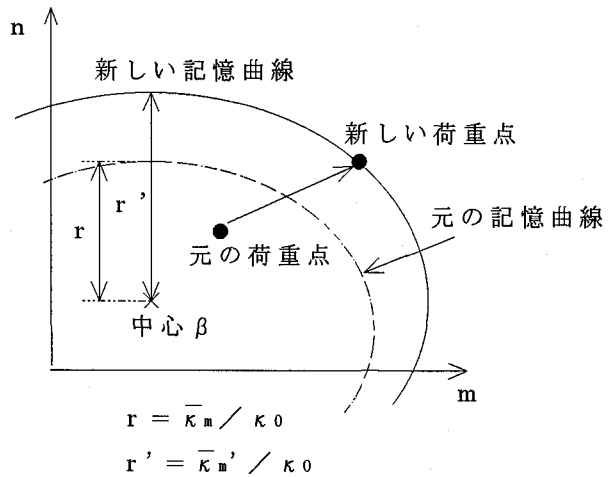


図-2 記憶曲線の定義

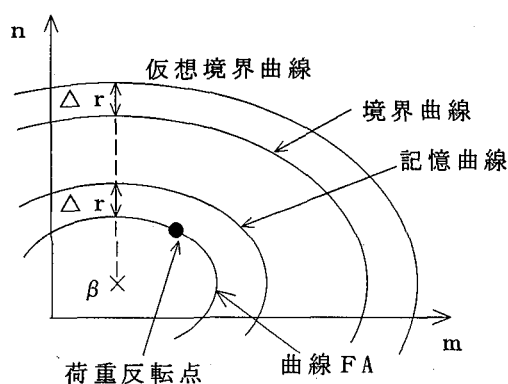
一方、仮想境界曲線 F_v は以下のように表される。

$$F_v(m, n, \beta_m, \beta_n, r_v) = G_b(m, n, \beta_m, \beta_n, r_v) - 1 = 0 \quad (5)$$

ここで、

r_v ：修正二曲面モデルの仮想境界曲線の半径 $\bar{\kappa}_v$ と初期降伏曲面半径 κ_0 との比。

荷重点が反転する場合に、仮想境界曲線が設定される。いま、除荷点(Unloading Point) を通り、境界曲面と相



似て同じ中心を持つ曲線を考える(図-3)。この曲線の大きさを $r_i = \kappa_i / \kappa_0$ とすると、 r_i は中心 β から n 軸方向への大きさであり、一軸状態であれば、 $\Delta r = r_n - r_i$ が、修正二曲面モデルの δ_v に相当する。よって、仮想境界曲線の大きさ $\bar{r}_v$ は、 $\bar{r} + \Delta r$ となる。

(5) 累積相当塑性ひずみ曲線

修正二曲面モデルの累積相当塑性ひずみ曲線 (*A.E.P.S.*) に対応する曲線を無次元塑性ひずみ $\varepsilon/\varepsilon_y$ —無次元塑性曲率 ϕ/ϕ_y 空間で次のように定義する (図-4 参照)。

$$\Phi(\varepsilon^P/\varepsilon_y, \phi^P/\phi_y) = \left[\frac{\varepsilon^P}{\varepsilon_y} - \eta_\varepsilon \right]^2 + \left[\frac{\phi^P}{\phi_y} - \eta_\phi \right]^2 - \rho^2 = 0 \quad (6)$$

ここで、

 ε_v : 降伏ひずみ, ϕ_v : 降伏曲率

$(\eta_\varepsilon, \eta_\phi)$: 曲線の中心座標, ρ : 曲線の半径

上式を一軸応力状態に帰着させると、 $2\rho\epsilon_s$ が修正二曲面モデルの累積相当塑性ひずみに相当する塑性パラメータになる。累積相当塑性ひずみ曲線の中心の移動量は、従来の修正二曲面モデル⁹⁾と同様の方法で計算する。

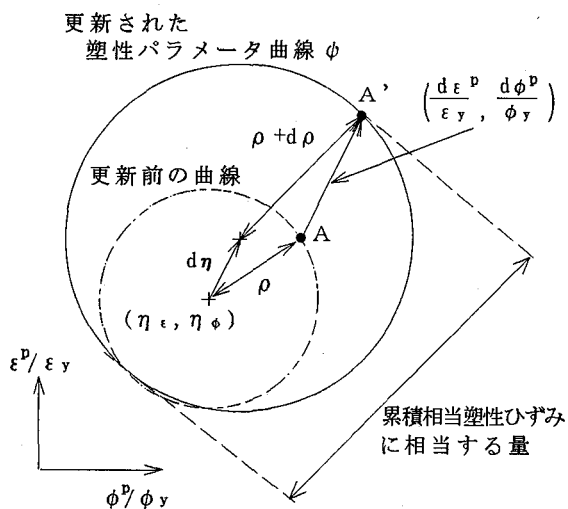


図-4 累積相当塑性ひずみ曲線の定義

2.3 硬化則

荷重点が初期降伏曲線に達すると、修正二曲面モデルと同様に、負荷(降伏)曲線と境界曲線は複合硬化を起こす。等方硬化(各曲面の大きさ)および負荷曲線の移動硬化については応力表示型修正二曲面モデルと同様な仮定を用いる。

しかし、本モデルの各強度曲線の形状は図-1に示すように互いに相似ではないので、形状を保ったまま降伏曲線が移動硬化することにより、降伏棚曲線(または境界曲線)とオーバーラップを生ずる。それゆえ、図-5に示すように、負荷曲線は等方・移動硬化に伴い、その時点で共役な曲線(降伏棚曲線または境界曲線)に相似な曲線へと変形すると仮定する。例えば、負荷曲線は初期状態では正方形(図-5(a))であるが、荷重点が降伏棚曲線に接する段階では、降伏棚曲線に相似な形状に変形する(図-5(b),(c))。また、降伏棚消失後に境界曲線と接する段階では、負荷曲線は境界曲線に相似な形状になると仮定する(図-5(d),(e))。

(1) 負荷曲線の変形

塑性変形とともに、初期降伏曲線（負荷曲線）は降伏棚曲線と相似な形状に変形し、さらに降伏棚曲線消失後は境界曲線に相似な形状へと変形する。この変形状態を表すため、内挿補間することにより負荷曲線式 f を以下のように定義する。

降伏棚曲線が存在する間：

$$f(m, n, \alpha_m, \alpha_n, r) = \theta_1 \cdot \left\{ \left| \frac{m - \alpha_m}{r} \right| + \left| \frac{n - \alpha_n}{r} \right| \right\} + (1 - \theta_1) \cdot \left\{ \left| \frac{m - \alpha_m}{r \cdot f_y} \right|^{c_1} + \left| \frac{n - \alpha_n}{r} \right|^{c_2} \right\} - 1 = 0 \quad (7)$$

ここで、

(α_m, α_n) : 負荷曲線の中心座標

 θ_i : 変形記述パラメータ

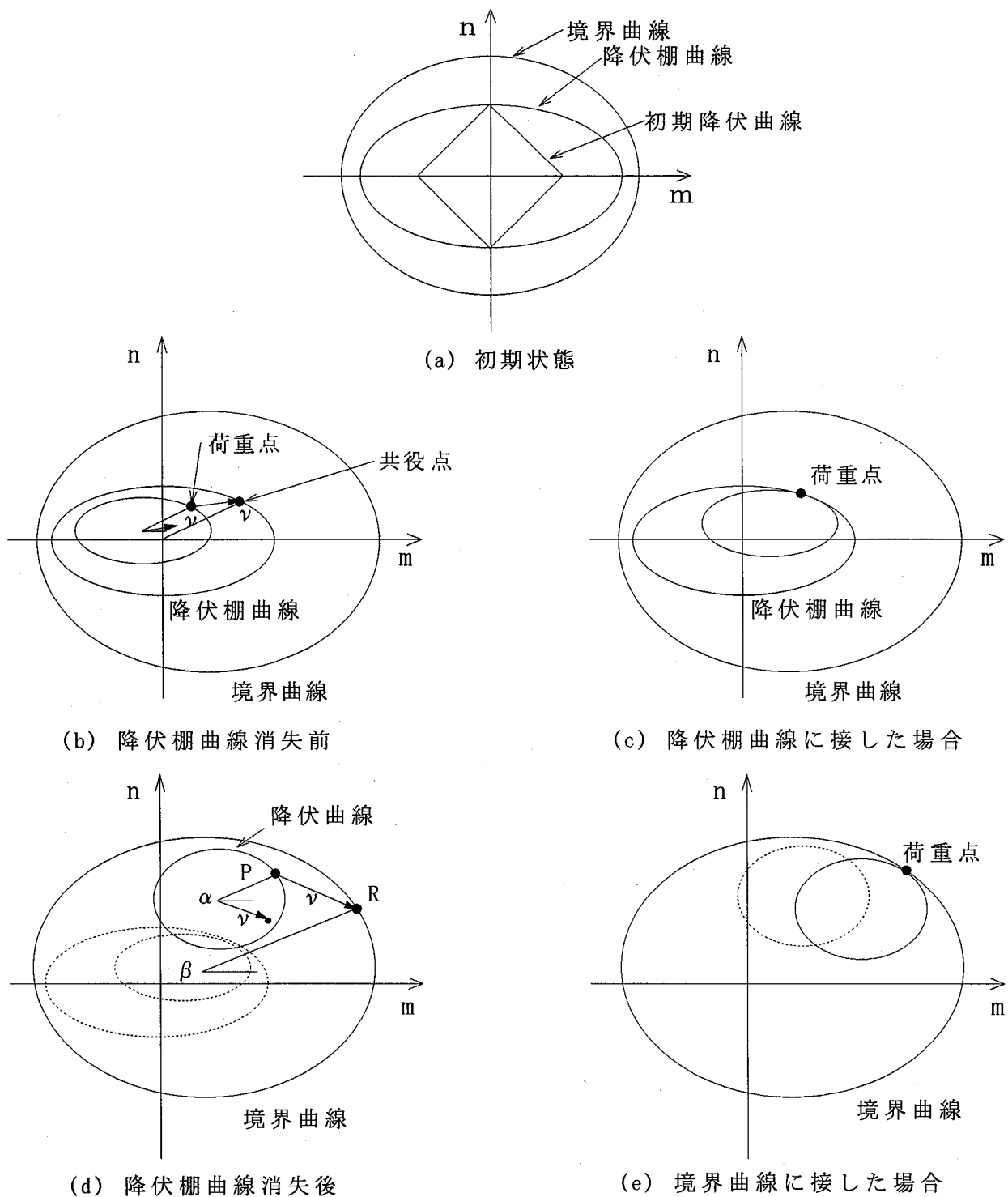
r : 修正二曲面モデルの負荷曲線半径 κ と初期降伏曲面半径 κ_0 との比。ちなみに、 κ/κ_0 は、修正二曲面モデルにて用いられる、「弾性域の大きさの低減」を示す式であり、次式にて表現される：

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \alpha - a \exp(-b\rho\varepsilon_y \times 200) - (\alpha - a - 1) \cdot \exp(-c\rho\varepsilon_y \times 200) \quad (8)$$

ここで、式(8)の各種パラメータ (α, a, b, c) は応力表示型修正二曲面モデル^{7~9)}にて用いられているパラメータであり、これら数値を表-1に示す。さらに、 ρ は累積相当塑性ひずみ曲線の半径であり、 ε_y は降伏ひずみである。

降伏棚曲線の消失後：

$$f(m, n, \alpha_m, \alpha_n, r) = \theta_2 \cdot \left\{ \frac{m - \alpha_m}{r \cdot f_y} \right\}^C + \left\{ \frac{n - \alpha_n}{r} \right\}^C \Bigg\} + (1 - \theta_2) \cdot \left\{ \frac{m - \alpha_m}{r \cdot f_b} \right\}^C + \left\{ \frac{n - \alpha_n}{r} \right\}^C \Bigg\} - 1 = 0 \quad (9)$$



図－5 硬化則

ここで、 θ_2 ：変形記述パラメータ。

式(7)および式(9)で用いられる変形記述パラメータ θ_1 および θ_2 は、最初は 1.0 であり、負荷曲線が対象とする強度線に接する時点で 0.0 となる。すなわち、塑性変形が進行するに伴い、初期降伏曲線は降伏棚曲線に相似な形状となり、最終的には境界曲線に相似な形状となる。

図-6 に示すように、荷重点と強度曲線との距離 δ を用

いて、パラメータ θ_1 および θ_2 を、次式のように定義する。

$$\theta_1 = \left[\frac{\delta^{YP}}{\delta_m^{YP}} \right]_{\min} \quad \text{および} \quad \theta_2 = \left[\frac{\delta^{BC}}{\delta_m^{BC}} \right]_{\min} \quad (10)$$

ここで、

δ^{YP} ：降伏棚曲線と荷重点との距離

δ_{in}^{YP} ：降伏棚曲線と荷重点との距離の初期値

δ^{BC} : 境界曲線と荷重点との距離

δ_{in}^{BC} : 境界曲線と荷重点との距離の初期値

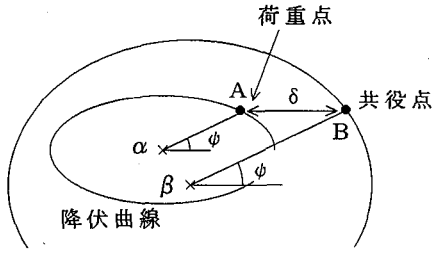


図-6 距離 δ の定義

(2) 負荷曲線の硬化則

本モデルの移動硬化則として、応力表示型の修正二曲面モデルと同様に、曲線同士の交差が生じないように Mroz¹⁰⁾の硬化則を用いる。この硬化則では、図-7 に示すように、現荷重点 A と、これに共役な境界曲線または降伏棚曲線上の点 B とを結ぶベクトル ν 方向に負荷曲線の中心点 α が移動する。中心の移動量 $(\Delta\alpha_m, \Delta\alpha_n)$ は次の式で表される。

$$(\Delta\alpha_m, \Delta\alpha_n) = C_\alpha (\nu_m, \nu_n) \quad (11)$$

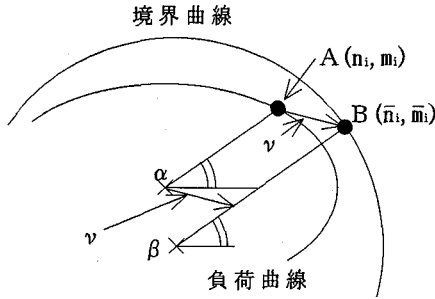


図-7 負荷曲線の移動硬化

係数 C_α については、連続条件式 $df=0$ より求める。一方、荷重点において負荷曲線と降伏棚曲線（または境界曲線）が接する場合には、両曲線の幾何学的な関係より負荷曲線の中心の位置 (α_m, α_n) を求める。

(3) 境界曲線の硬化則

応力表示型修正二曲面モデルと同様に、境界曲線の移動には移動硬化の影響と等方硬化の影響の二つを考える。移動量を次式のように仮定する。

$$\begin{Bmatrix} d\beta_m \\ d\beta_n \end{Bmatrix} = C_b \begin{Bmatrix} d\phi^p / \phi_y \\ d\varepsilon^p / \varepsilon_y \end{Bmatrix} + C_c \begin{Bmatrix} j_m \\ j_n \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここで、右辺の第1項は移動硬化による移動量を、第2項は等方硬化による移動量を表す。なお、 j_m および j_n は、図-8 に示すように、点 B' と点 β'' とを結ぶ線上にある単位ベクトルの m 軸および n 軸方向の成分である。

上式を文献9) に示される一軸応力状態での応力表示型の構成式と比較することにより、定数 C_b および C_c を

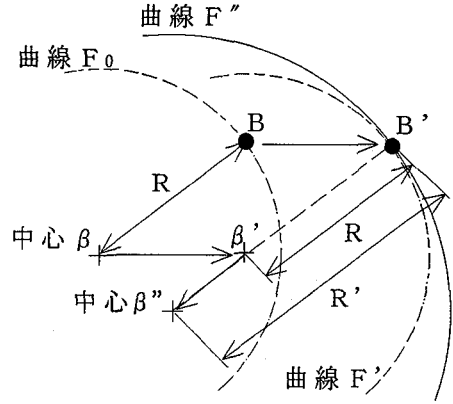


図-8 境界曲線の移動

定義する。まず、相当塑性ひずみ $d\chi$

$$d\chi = \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon^p}{\varepsilon_y}\right)^2 + \left(\frac{d\phi^p}{\phi_y}\right)^2} \quad (13)$$

および、応力表示型構成モデルの一軸応力空間での境界曲線の移動量 $d\beta$ と本断面力表示型構成モデルの移動量 $(d\beta_m, d\beta_n)$ との関係

$$d\beta = \sqrt{(d\beta_m)^2 + (d\beta_n)^2} \quad (14)$$

より、定数 C_b は次式にて表される。すなわち、

$$C_b = \frac{E_0^p}{E} \quad (15)$$

ここで、 E はヤング係数、 E_0^p は境界曲線の接線塑性係数である。

次に、境界曲線の大きさの変化による中心の移動を考える。図-8 に示すような複合硬化による中心の移動を考える。まず、荷重点 A と共役な点 B、中心 β を有する曲線 F_0 を考える。この曲線 F_0 は移動硬化によって、中心 β' 、共役点 B' を有する曲線 F' になる。さらに、等方硬化により、曲線は F'' となり、中心は β' から β'' へと移る。このことより、係数 C_c は次のようになる。

$$C_c = -(R' - R) = -\frac{\Delta\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}} R \quad (16)$$

なお、

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_\infty + (\bar{\kappa}_0 - \bar{\kappa}_\infty) \exp[-\zeta(\rho\varepsilon_y)^2] \quad (17)$$

ここで、 $\bar{\kappa}_\infty$ および $\bar{\kappa}_0$ は、それぞれ、応力表示型修正二曲面モデルでの境界曲面の限界半径および初期半径であり、それらの値は表-1 に示す。

3. モデルパラメータ

本断面力表示型構成モデルは、応力表示型修正二曲面モデルを基礎としているため、本節 3.1~3.3 で紹介するモデルパラメータは、応力表示型修正二曲面モデルと同じモデルパラメータであることに留意されたい。

表－1 応力表示型修正二曲面モデルパラメータ

Parameter	SS400	SM490	SM570	Parameter	SS400	SM490	SM570
$E(Mpa)$	2.067×10^5	2.058×10^5	2.156×10^5	e	5.00×10^2	3.16×10^2	1.04×10^2
$\kappa_0(Mpa)$	274.4	356.7	524.3	f/E	0.30	0.484	0.361
ν	0.29	0.25	0.25	M	-0.37	-0.052	—
E_{st}^p/E	2.49×10^{-2}	3.40×10^{-2}	1.02×10^{-2}	E_0^p/E	8.96×10^{-3}	1.01×10^{-2}	7.85×10^{-3}
ε_{st}^p	1.53×10^{-2}	1.24×10^{-2}	0.00	$\omega \cdot \kappa_0$	18.2	4.00	2.67
a	-0.505	-0.528	-0.553	$\bar{\kappa}_0/\kappa_0$	1.15	1.13	1.06
b	2.17	1.88	6.47	$\bar{\kappa}_\infty/\kappa_0$	1.81	1.61	1.22
c	14.4	18.7	34.8	$\zeta \cdot \varepsilon_y^2$	9.89×10^{-4}	1.52×10^{-3}	8.04×10^{-3}
α	0.191	0.217	0.175				

3.1 負荷曲面の接線塑性係数

Dafalias・Popov 二曲面モデル⁹⁾の特徴は、負荷曲線上の荷重点と共役な点を降伏棚曲線または境界曲線上に設定し、その两点間の距離 δ (応力の次元) により、負荷曲線の接線塑性係数 E^p を決定することにある。すなわち、

$$E^p = E_0^p + h \frac{\delta}{\delta_m - \delta} \quad (18)$$

ここで、 E_0^p : 境界線の傾き (接線塑性係数), h : 形状パラメータ, δ_m : 塑性開始点での境界線までの距離。なお、形状パラメータ h は、次式で与えられる。

$$h = e \cdot \delta + f \quad (19)$$

ここで、 e および f は、鋼種に依存する定数であり、その数値を表－1に示す。

本研究で提案する断面力表示型構成モデルでは、図－6に示したように、無次元断面力空間 (m, n) において、負荷曲線上の荷重点に対する降伏棚曲線 (または境界曲線) 上の共役点を、それぞれの曲線の中心点からの方向が同一である点として定義し、荷重点と共役点との無次元距離に降伏応力 σ_y を乗じた量を式(18)および式(19)の δ として用いる。

3.2 境界曲線の接線塑性係数

応力表示型修正二曲面モデルと同じ接線塑性係数を用いる。

$$E_0^p = \frac{E_0^p}{1 + \omega W^p} \quad (20)$$

ここで、 E_0^p は、境界曲線の初期接線塑性係数、 ω は定数である。さらに、 W^p は塑性仕事量であり、次式にて与えられる。

$$W^p = (N_y \int n d\varepsilon^p + M_y \int m d\phi^p) / A \quad (21)$$

ここで、 A は部材断面積であり、他のパラメータの数値は表－1に示す。

3.3 降伏棚消失判定パラメータ

応力表示型修正二曲面モデルと同様、降伏棚曲線上に荷重点が停留しているかどうかの判定を次式を用いて行う。

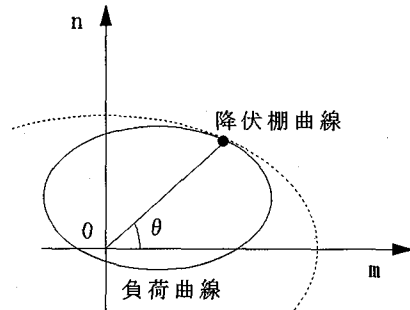
$$\left(\frac{2\rho \cdot \varepsilon_y}{\varepsilon_{st}^p} - 1 \right) - M \cdot \left(\frac{W^p}{W_{st}^p} - 1 \right) \begin{cases} < 0 & \text{降伏棚継続} \\ \geq 0 & \text{降伏棚消失} \end{cases} \quad (22)$$

ここで、 ε_y : 降伏ひずみ、 ε_{st}^p : ひずみ硬化開始時点での塑性ひずみ、 W_{st}^p : ひずみ硬化開始時点での塑性仕事量、 M : 材料に固有の定数。

降伏棚消失後の硬化域に入った時点の接線塑性係数 E_{st}^p については、次式により決定する。

$$E_{st}^p = E_{stM}^p \cdot |\cos \theta| + E_{stN}^p \cdot |\sin \theta| \quad (23)$$

ここで、 E_{stN}^p は、一軸引張・圧縮状態での硬化開始時の接線塑性係数であり、応力表示型修正二曲面モデルで定義されている E_{st}^p と同じである。一方、 E_{stM}^p は、一軸曲げ状態での硬化開始時の接線塑性係数であり、今回新たに、本断面力構成モデルで定義されるパラメータである。また、式(23)の θ は、図－9で定義される角度である。



図－9 角度 θ の定義

3.4 各強度曲線のパラメータの決定

本モデルに必要なパラメータは、応力表示型修正二曲面モデルに関連する 17 個のパラメータ（材料定数 5 個を含む）の他に、断面力空間における降伏棚曲線および境界曲線を定義する係数 C_p , C_ϕ , C_σ , C_ϕ , 形状係数 f_p , および形状パラメータ f_b である。

本研究では、矩形断面、円管断面、および箱形・I 型(強軸回り)断面を対象とし、これら断面の初期境界曲線を数値計算により設定し、それら形状パラメータを決定した。なお、鋼種は SS400, SM490, SM570 の 3 種類を対象とした。

(1) 初期境界曲線の設定

以下の手順により、上述の各種断面に対して、断面の初期境界曲線を決定した：

- 1) 図-10(a)に示すように、軸ひずみ増分 $\Delta \varepsilon$ と曲率増分 $\Delta \phi$ との比が一定である、比例载荷経路に対し、断面力（モーメント M および軸力 N ）の計算を断面分割法（ここでは、要素数を 100 とした）により行う。なお、各断面要素の応力-ひずみ関係には修正二曲面モデルを用いた。
- 2) 得られた $n - \varepsilon^p$ 関係および $m - \phi^p$ 関係の十分に硬化した定常部分を近似した直線と n 軸 ($\varepsilon^p = 0.0$) および m 軸 ($\phi^p = 0.0$) との交点（図-10(b)の n_i , 図-10(c)の

m_i ）を、初期境界曲線上のサンプル点とする。

- 3) 軸ひずみ増分 $\Delta \varepsilon$ と曲率増分 $\Delta \phi$ との比をさまざまに変えた载荷経路 ($i = 1, m$) に対して、境界曲線上のサンプル点 (m_i, n_i) を求め、これらの点を曲線近似して初期境界曲線とする。

(2) 計算結果

図-11 に示すように、各部材断面の断面分割数を 100 とし、载荷経路数 16 に対して計算を行った。一例として、鋼種が SS400 である矩形断面、円管断面、箱形・I 型(強軸回り)断面の境界曲線の計算結果を図-12 に示す。図(a)は、高さ $H=40.0\text{mm}$, 幅 $B=30.0\text{mm}$ の矩形断面、図(b)は、外径 $D=100.0\text{mm}$, 板厚 $t=5.0\text{mm}$ の円管断面、図(c)は、高さ $H=100.0\text{mm}$, 幅 $B=100.0\text{mm}$, フランジ板厚 $t_f=5.0\text{mm}$, ウェブ板厚 $t_w=3.7\text{mm}$ の箱形断面の計算例である。円管断面および箱形・I 型(強軸回り)断面の場合は、それぞれ、径厚比 (D/t) およびフランジ面積とウェブ面積との比 (A_f/A_w) が異なれば、降伏棚曲線および境界曲線の形状も変化するため、本研究では、降伏棚曲線および境界曲線を定義する係数 C_p , C_ϕ , C_σ , C_ϕ , 形状係数 f_p , および形状係数 f_b を、それぞれ (D/t) および (A_f/A_w) の関数とした。これら係数決定の詳細については、文献 11) を参照されたい。

各鋼管断面（鋼種 SS400, SM490, SM570）の曲線

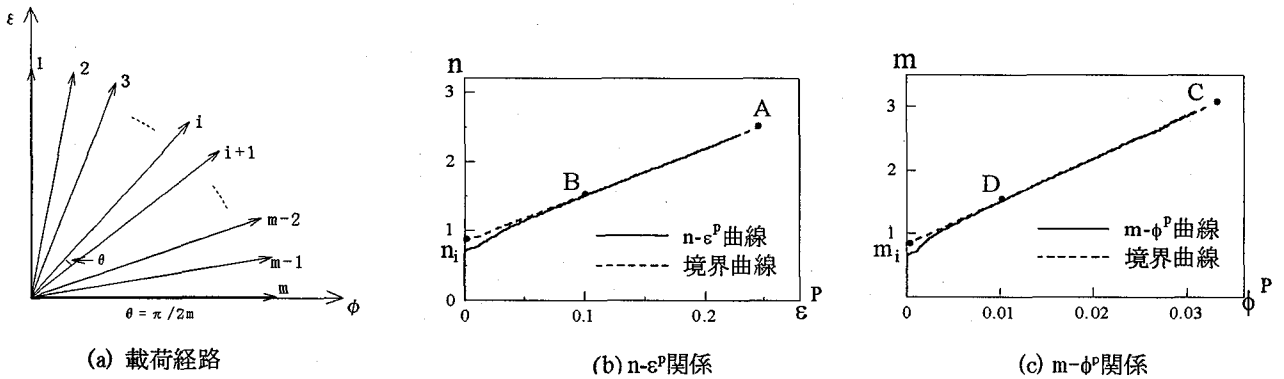


図-10 初期境界曲線の設定

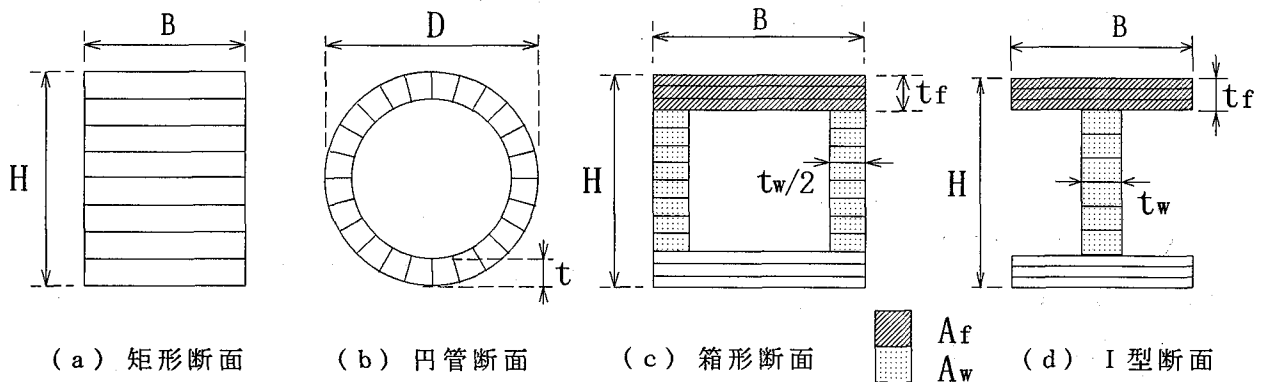


図-11 各種断面分割図

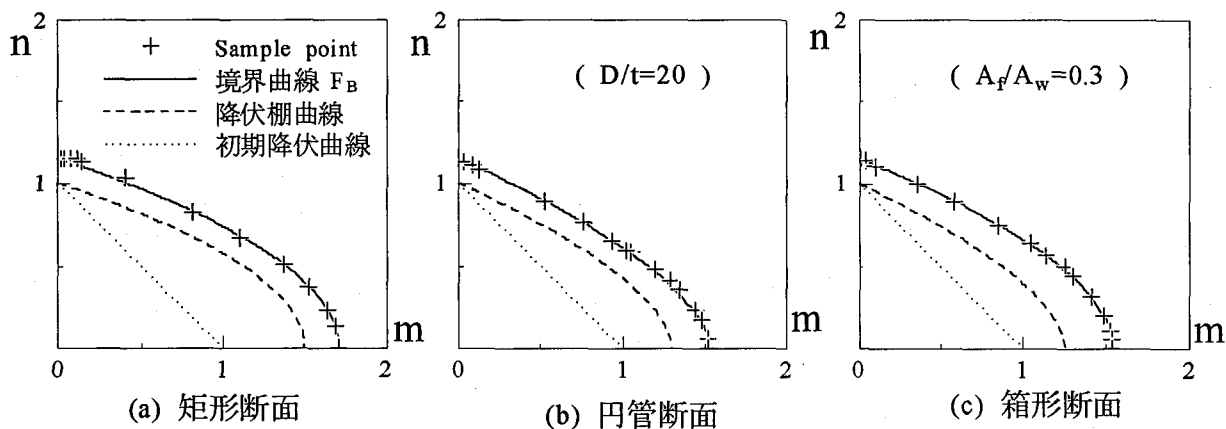


図-1.2 初期境界曲線の計算結果

表-2 断面力表示型構成モデルの強度曲線パラメータ

	Circular section			I section or Box section		
	SS400	SM490	SM570	SS400	SM490	SM570
C_1	1.00	—	—	1.00	—	—
C_2	1.73	—	—	$1.75 - 0.27 \left(\frac{A_f}{A_w} \right)$	—	—
f_y	$1.30 + 0.33 \exp \left\{ -0.11 \left(\frac{D}{t} \right) \right\}$	—	—	$1.08 + 0.28 \exp \left\{ -1.77 \left(\frac{A_f}{A_w} \right) \right\}$	—	—
C_3	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
C_4	1.67	1.44	1.45	$1.29 + 0.78 \exp \left\{ -0.93 \left(\frac{A_f}{A_w} \right) \right\}$	$1.79 - 0.18 \left(\frac{A_f}{A_w} \right)$	$1.44 + 0.04 \left(\frac{A_f}{A_w} \right)$
f_b	$1.36 - 1.19 \times 10^{-3} \left(\frac{D}{t} \right)$	1.40	1.33	$1.14 + 0.34 \exp \left\{ -1.59 \left(\frac{A_f}{A_w} \right) \right\}$	$1.17 + 0.05 \left(\frac{A_f}{A_w} \right)$	$1.15 + 0.05 \left(\frac{A_f}{A_w} \right)$

D/t : 径厚比, A_f/A_w : ウェブ面積に対するフランジ面積比

形状パラメータ C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , f_y および f_b の関数を表-2に示す。

4. 増分構成関係式

以下の基本仮定を用いて増分構成関係式を誘導する。

4.1 線形関係

$$\begin{Bmatrix} dn \\ dm \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\bar{\varepsilon}^e \\ d\bar{\phi}^e \end{Bmatrix} \quad (24)$$

ここで,

$$d\bar{\varepsilon}^e = d\varepsilon^e / \varepsilon_y, \quad d\bar{\phi}^e = d\phi^e / \phi_y$$

$d\varepsilon^e$: 弾性ひずみ増分, $d\phi^e$: 弾性曲率増分

ε_y : 降伏ひずみ, ϕ_y : 降伏曲率

4.2 ひずみ増分の分解

$$\begin{Bmatrix} d\bar{\varepsilon} \\ d\bar{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\bar{\varepsilon}^e \\ d\bar{\phi}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\bar{\varepsilon}^p \\ d\bar{\phi}^p \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここで, 変数の右上の p は塑性を意味する。

4.3 流れ則

負荷曲面に塑性変形ベクトル (塑性ひずみ $d\varepsilon^p$ および塑性曲率 $d\phi^p$) は垂直に生ずる (関連流れ則) と仮定する。

なお, 図-13 に示すように, 初期降伏曲線の隅点 L_2 および L_3 での法線は, 唯一的に決定できないので, それぞれ n 軸方向および m 軸方向に塑性変形ベクトルは生じると仮定する。

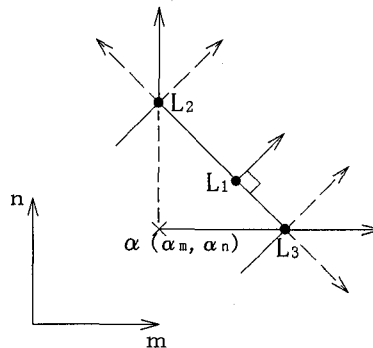


図-1.3 隅点の塑性ベクトル

$$\begin{Bmatrix} d\bar{\varepsilon}^p \\ d\bar{\phi}^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{K^p} \begin{Bmatrix} \{dn\}^T \\ \{dm\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i_n \\ i_m \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1/N_y \varepsilon_y & 0.0 \\ 0.0 & 1/M_y \phi_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_n \\ i_m \end{Bmatrix} \quad (26)$$

ここで、 K^p は、 $E^p A / N_y^2$ で与えられる塑性硬化係数である。なお、 E^p および A は、それぞれ接線塑性係数および部材断面積である。 i_n および i_m は、負荷曲面上の荷重点での法線ベクトルの成分である。

4.4 増分構成式

以上の基本仮定より、増分構成式は次式のようにになる。

$$\begin{Bmatrix} dh \\ dm \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{i_n^2}{N_y \varepsilon_y} & \frac{i_n \cdot i_m}{N_y \varepsilon_y} \\ \frac{i_n \cdot i_m}{N_y \varepsilon_y} & 1 - \frac{i_m^2}{M_y \phi_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_y} \\ \frac{d\phi}{\phi_y} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

5. 断面の繰り返し載荷挙動

本断面力構成モデルを断面の繰り返し載荷挙動の予測に適用する。載荷は「平面保持の仮定」に基づいて軸ひずみと曲率による制御で行い、以下に、本モデルによる計算結果と断面積分法による計算結果とを比較する。

計算対象する断面は矩形で、その寸法および断面諸量は、高さ $H=40.0\text{mm}$ 、幅 $B=30.0\text{mm}$ 、降伏曲率、 $\phi_y = 6.77 \times 10^{-5}$ である。なお、鋼種は $SS400$ であり、表-1のデータを用いる。また、 $E_{SM}^p = 5.92 \times 10^{-2} E$ を用いた。

5.1 一軸引張・圧縮繰り返し載荷

載荷経路は対称繰り返し経路とし、ひずみの変動幅は $\pm 2.5\%$ まで1サイクルごとに 0.5% の増加とした。無

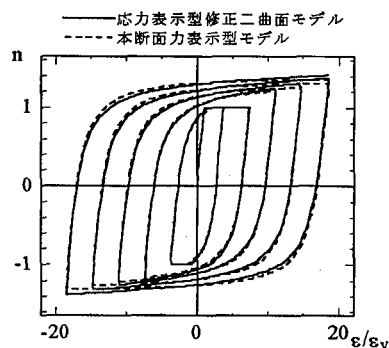


図-14 一軸引張・圧縮繰り返し載荷

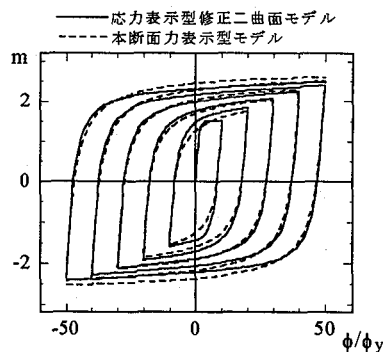


図-15 一軸繰り返し曲げ載荷

次元化軸力-ひずみ関係を図-14に示す。破線は本断面力表示モデルによる結果を、実線は断面積分法による結果を示す（以下の図においても同様である）。本断面力表示型構成モデルは応力表示型修正二曲面モデルに立脚しているため、この場合、両者はほぼ一致している。

5.2 一軸曲げ繰り返し載荷

繰り返し載荷は、載荷経路の変動幅を $\pm 50 \phi_y$ とし、1サイクルごとに $10 \phi_y$ の増加とした。図-15に計算結果を示す。繰り返し一軸曲げ載荷に対しては、本構成モデルは概ね良好な値を予測している。

5.3 比例繰り返し載荷

無次元化ひずみと無次元化曲率の比率を一定にした載荷経路に対する計算結果を図-16および17に示す。

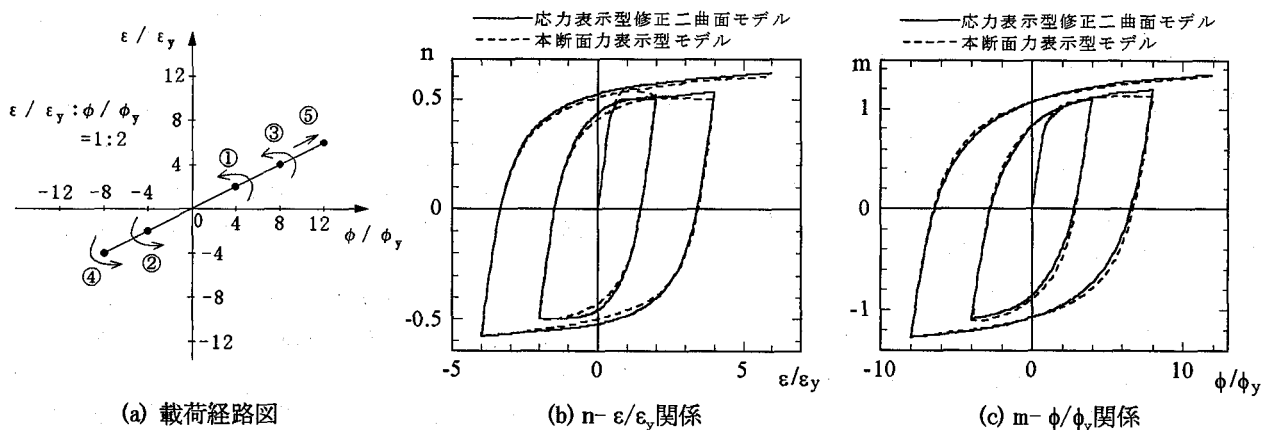


図-16 比例繰り返し載荷（比例1）

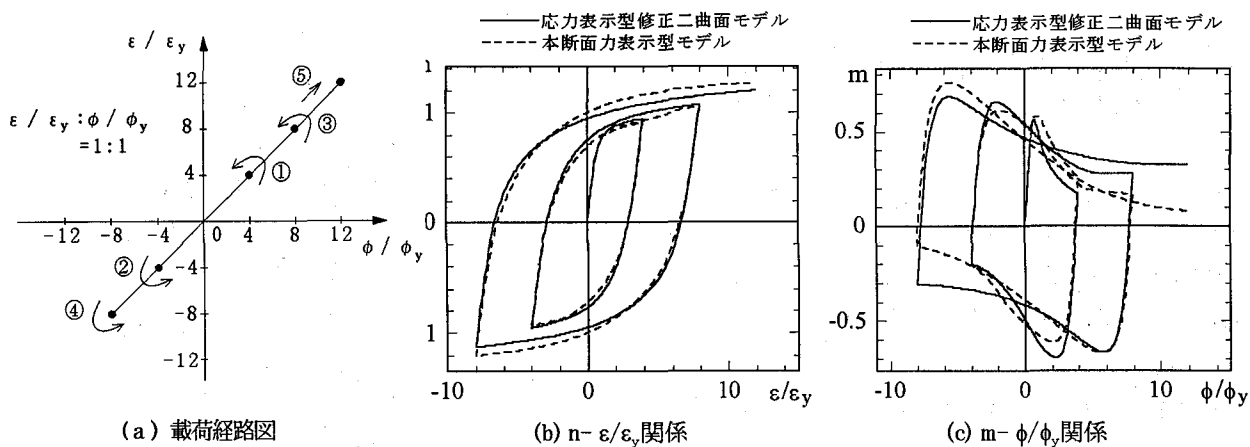


図-17 比例繰返し载荷 (比例2)

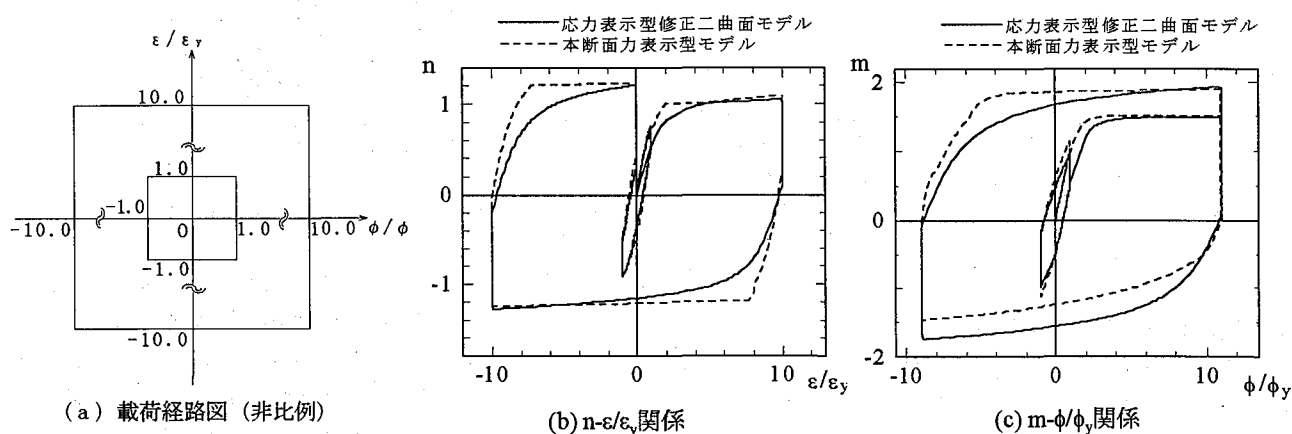


図-18 非比例繰返し载荷

図-16 は、無次元化ひずみと無次元化曲率との比率が 1 : 2 と曲率が卓越した载荷経路 (「比例 1」) の結果である。図(a)には载荷経路, 図(b)には無次元化軸力-ひずみ関係, 図(c)には無次元化曲げモーメント-曲率関係を示す。载荷経路は, 図(a)にあるように 1 サイクル毎に軸ひずみを $2\varepsilon_y$, 曲率を $4\phi_y$ ずつ増加させ, $6\varepsilon_y$, $12\phi_y$ までとした。

無次元化ひずみと無次元化曲率の比率が一定 (1 : 1) の载荷経路 (「比例 2」) に対する計算結果を図-17 に示す。载荷は, 1 サイクル毎に軸ひずみを $4\varepsilon_y$, 曲率を $4\phi_y$ ずつ増加させ, $12\varepsilon_y$, $12\phi_y$ までとした。結果は, $m-\phi$ 関係がピークを有する特徴的な曲線となった。

本断面力構成モデルの解析結果は, 断面積分法による結果と比較して, ピーク以降の挙動に相違はあるものの, 総じてピーク形状など曲線の特徴を良く表現している。

5.4 非比例载荷

载荷経路を図-18(a)に示す。まず, 純曲げ状態で ϕ_y まで载荷し, 続いて $\pm 1.0\varepsilon_y$, $\pm 1.0\phi_y$ の正方形型の経路, さらに $\pm 10\varepsilon_y$, $\pm 10\phi_y$ の正方形型の载荷経路に沿って (反時計廻りに) 载荷する。非比例载荷経路に対す

る計算結果を図-18(b)および(c)に示す。

計算結果は, 断面積分法の結果と形状は似たものとなっているが, $m-\phi$ 関係で, モーメントの負側で相違がある。軸力幅はほぼ同じ値となっているが, 曲げモーメント幅は断面力構成モデルの結果の方が小さい。

6. 構造解析への応用

本節では, 断面力構成モデルを有限要素法プログラム FEAP¹²⁾に組み込み, 以下の有限変位構造解析を行う。

6.1 構造部材解析

Sherman¹³⁾による一連の実験の一例を対象に解析を行う。本解析は, 海洋プラットフォームの鋼構造物を構成する典型的な部材 (Strut) を想定している。Strut は一定横荷重 Q の下で繰返し軸力 P が作用する両端固定ばりとしてモデル化される。

本解析で用いる部材断面は円管で, 断面の諸元は, 外径 $D=114.0\text{mm}$, 肉厚 $t=2.3\text{mm}$, 断面積 $A=807\text{mm}^2$, 断面二次モーメント $I=1.26 \times 10^6\text{mm}^4$, 断面係数 $W=2.21 \times 10^4\text{mm}^3$ である。また, 解析モデルの諸量は, 部材長 $L=5720\text{mm}$, 細長比 $L/t=144$ である。降伏応力は $\sigma_y=289\text{N/mm}^2$ であるため, 各種モデルパラメータはこの値を基

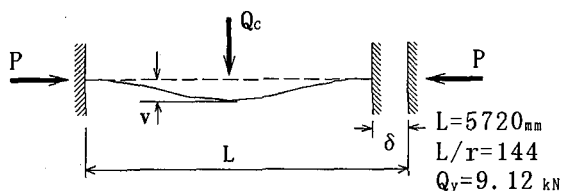


図-19 有限変位解析の荷重状態

に、表-1のSS400のデータより算定した。

さらに、径厚比 $D/t = 49.6$ の円管断面であるため、各強度曲線の形状パラメータを、表-2より $C_F=1.0$, $C_F=1.73$, $C_F=1.0$, $C_F=1.67$, $f_y=1.30$, $f_b=1.30$ とした。

荷重状態は図-19に示すように、柱の中央に $Q_c = 0.4 Q_y$ の一定荷重を載荷し、繰り返して軸力 P を作用させる。ここで、 Q_y は部材に初期降伏を生じさせる荷重であり、この場合、9.12kNである。

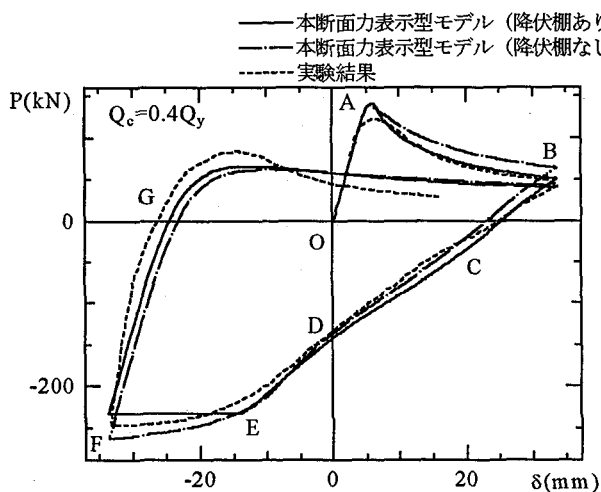


図-20 P- δ 関係 (実験値との比較)

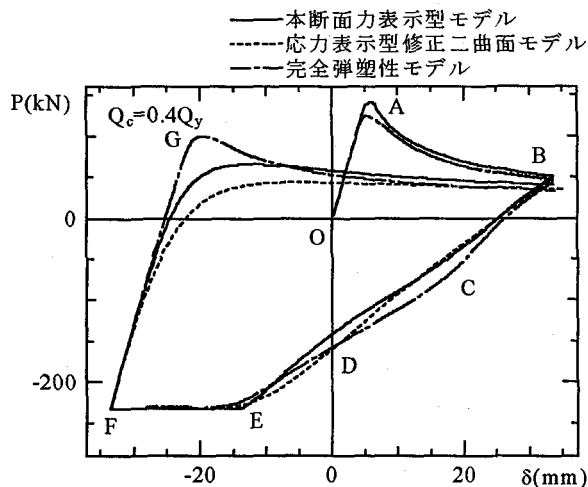


図-21 P- δ 関係 (他のモデルとの比較)

軸力 P - 軸方向変位 δ 関係の解析結果を図-20に実線で示す。図中、点Eから点Fにて、実験結果 (破線) では、硬化域に入っているのに対して、解析結果は硬化域には入っていない。この原因としては、残留応力の影響があるものと推測される。実験供試体は冷間加工部材であるため、加工時に少なからずの塑性変形を受け、供試体内に残留応力が蓄積され、既に降伏棚が消失していると推測される。このことを考慮し、降伏棚が初期状態より既に消失していると仮定した場合の解析結果を図-20に一点鎖線で示す。

次に、本モデルの解析結果と修正二曲面モデル、完全弾塑性モデルの解析結果とを比較する。なお、修正二曲面モデルおよび完全弾塑性モデルによる有限変位解析では、断面を円周方向に20分割、半径方向に4分割し、断面積分法により断面力の算定を行った。図-21には、各モデルによる軸力 P - 軸方向変位 δ 関係を示す。図から理解できるように、点Oから点Bまでの挙動は、三モデルともほとんど同じ結果を示す。しかし、点Bで反転してからは、本モデル (実線) と修正二曲面モデル (破線) の解析結果が同じような傾向を示すが、完全弾塑性モデル (一点鎖線) は、点Cと点Gの付近で他のモデルと異なる傾向を示す。

6.2 フレーム解析

図-22に示すようなH型断面部材の集部材である肘型ラーメンの解析を行った¹⁴⁾。断面寸法は $H100 \times 100 \times 6 \times 8$ で $A_f/A_w = 1.59$ であるため、曲線形状を決める係数は $C_F=1.32$, $C_F=1.47$, $f_y=1.10$, $f_b=1.16$ と与えた。鋼材はSS400であり、実験供試体に用いた鋼材の引張試験から降伏応力は $\sigma_y = 261.8 \text{ N/mm}^2$, ヤング係数 $E = 2.07 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ である。このデータを基に表-1からモデルパラメータ値を算定した。断面積は $2.27 \times 10^3 \text{ mm}^2$, 断面二次モーメントは $4.06 \times 10^6 \text{ mm}^4$ を用いた。分割要素数は、はり部分で10要素、柱部分で10要素の計20要素とした。

図-23に示す解析結果と実験結果との比較より、本構成モデルは実験結果をよく再現していることが分かる。

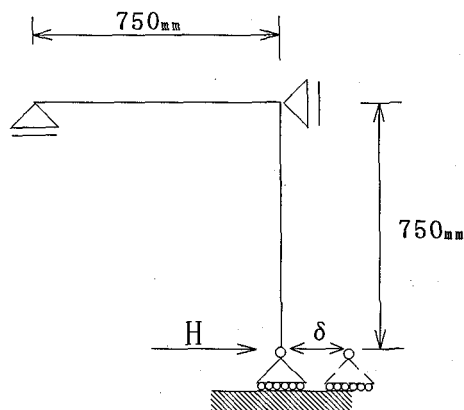


図-22 肘型ラーメン

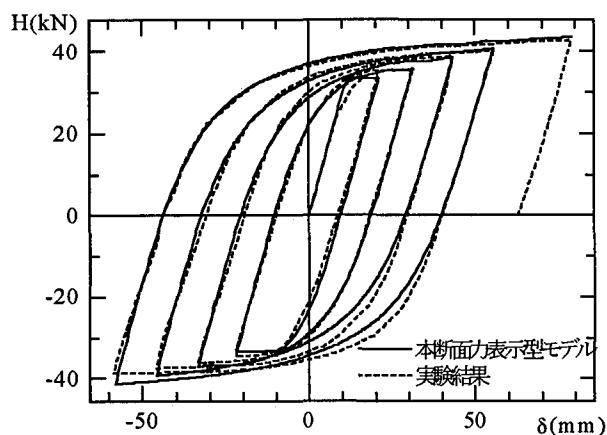


図-23 I型フレームの解析結果

7. 結論

本論文では、まず、応力表示型修正二曲面モデルの概念を、一軸曲げ-軸力空間に導入することにより、断面力表示型構成モデルを提案した。降伏曲線等の曲線形状を定めるパラメータ（6個）以外、すべて応力表示型修正二曲面モデルと同じモデルパラメータを用いる。続いて、本提案モデルを用いて、繰返し荷重を受ける鋼構造部材および鋼フレームの弾塑性有限変位解析を行った。

応力表示型の修正二曲面モデルおよび完全弾塑性型モデルによる有限要素解析結果、実験結果との比較を通して、次のことが明らかになった。

- (1) 本モデルの開発で用いた仮定、すなわち、累積相当塑性ひずみ（式(6)）および相当塑性ひずみ（式(13)）は一軸繰返し曲げ挙動（図-15）を再現できることから、妥当性があると思われる。
- (2) 関連流れ則については、非比例載荷挙動の予測結果（図-18）に応力表示型モデルによる結果とM-φレベルで食い違いが見られることより、全ての領域（P-M空間）で成立するかどうかは疑問である。
- (3) 本断面力表示型構成モデルの解析結果は、応力表示型の修正二曲面モデルによる解析結果と同様、鋼部材断面の繰返し挙動を良く表現できる。
- (4) 本モデルによる鋼構造部材および鋼フレームに対する有限要素解析結果は、応力表示型修正二曲面モデルの解析結果と同様、良好な精度を示す。
- (5) よって、本モデルを大型鋼構造物の有限変位構造解析に適用することで、応力表示型修正二曲面モデルによる解析結果と同精度の弾塑性挙動を短い計算時間で得ることが期待できる。

さらに、今後の課題として、次の事項が考えられる：

- (1) 部材断面の偏平化など、局部座屈の影響を表現できる構成モデルを部材の長さも考慮することにより検討する必要がある。
- (3) 二軸曲げモーメント、せん断力およびねじりモーメントなどを考慮した一般断面力空間に本モデルを拡張させることが望まれる。

参考文献

- 1) 修行稔：定軸力と繰返し二軸曲げ荷重を受ける鋼構造部材断面の弾塑性挙動について（その1），日本建築学会論文報告集，第323号，pp.1-11, 1983.
- 2) 修行稔：定軸力と繰返し二軸曲げ荷重を受ける鋼構造部材断面の弾塑性挙動について（その2），日本建築学会論文報告集，第329号，pp.15-25, 1983.
- 3) 尼子元久：繰返し荷重を受ける構造部材の弾塑性解析 - M-P-φモデルの開発 -，名古屋大学大学院修士論文，1986.
- 4) 水野克彦：断面力表示構成則による立体骨組み構造物の弾塑性有限変位解析，名古屋大学大学院修士論文，1989.
- 5) 宇佐美勉，柴田輝昭：断面力表示構成則を用いた鋼骨組構造物の弾塑性有限変位解析，土木学会論文集，第416号/I-13，pp.339-348, 1990.
- 6) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. : A model of nonlinear hardening materials for complex loading, Acta Mech., Vol.21, pp.173-192, 1975.
- 7) 田中良二，水野英二，沈赤，宇佐美勉：降伏棚を有する鋼材の繰返し弾塑性モデル - 二曲面弾塑性モデルの開発 -，構造工学論文集，Vol.37A，pp.1-14, 1991.
- 8) 水野英二，沈赤，宇佐美勉：鋼部材の繰返しねじり実験と二曲面モデルによる数値シミュレーション，構造工学論文集，Vol.39A，pp.221-234, 1993.
- 9) Shen C., Mizuno E., and Usami T. : A generalized two-surface model for structural steel under cyclic loading, Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. of JSCE, Vol.10, No.2, pp.23(59s)-33(69s), 1993.
- 10) Mroz, Z. : On the description of anisotropic work hardening, J. Mech. Phys. Solids, Vol.15, pp.163-175, 1967.
- 11) 鈴木健泰：断面力表示二曲面モデルによる鋼構造物の有限変位解析，名古屋大学大学院修士論文，1995.
- 12) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. : The finite element method : Fourth edition, Vol.2 Solid and fluid mechanics, Dynamics and non-linearity, 1991.
- 13) Sherman, D. R. : Post local buckling behavior of tubular strut type beam-columns : An experimental study, Report to Shell Oil Company, University of Wisconsin-Milwaukee, 1980.
- 14) 若林実，松井千秋，三谷勲：鉄骨ラーメンの弾塑性安定に関する実験的研究（その4）繰返し水平力を受けるH型鋼集合材，日本建築学会論文報告集，第195号，pp.25-37, 1972.

(1997年9月26日受付)