

有限要素解析における応力算定法に関する一研究

ON STRESS EVALUATION METHODS IN FINITE ELEMENT ANALYSIS

山口栄輝*, 久保喜延**
Eiki YAMAGUCHI and Yoshinobu KUBO

*Ph. D. 九州工業大学助教授 工学部建設社会工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

**工博 九州工業大学教授 工学部建設社会工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

Stress evaluation is very often the major objective of structural analysis. However, the evaluation method associated with the finite element analysis has not been well established: there exist some methods, but none of them are really satisfactory. In short, the stress distribution due to the stress projection method is not smooth and the simple interpolation-extrapolation formula yields discontinuous stress fields across interelement boundaries. Against this background, an evaluation method is proposed herein. This method is the combination of the two existing methods. In practice, it is similar to the stress projection method, but it requires the application of the reduced integration scheme to the evaluation of the right-hand-side vector. The method is thus simple and indeed needs less computational time than the stress projection method. Furthermore, it can be directly applied to a lower-order element. Numerical examples are solved; the smooth and quite accurate stress distribution is obtained, confirming the effectiveness of the proposed method.

Key Words: finite element method, stress computation, stress projection, optimal stress locations

1. はじめに

構造解析の主目的のひとつに、応力状態を求めることが挙げられる。広範に用いられている有限要素法では、まず有限要素方程式（剛性方程式）を解いて節点変位を求め、得られた節点変位にひずみ-節点変位マトリクス、さらに応力-ひずみマトリクスを乗じて応力を算出するのが一般的である。この方法（以下では直接法と記す）を用いれば、領域内の任意点における応力を求めることはできるものの、要素間で応力は不連続となり、また厳密解とかけ離れた応力分布が得られるといった精度上の問題を生じることがある。

こうした問題点に関しては、1970年代より検討が進められており^{1)~6)}、応力算定法として、応力プロジェクション（stress projection）法⁵⁾やガウス積分点での応力をもとにした単純な補間法⁶⁾（以下では単純補間法と記す）が提案されている。これら既存の算定法については2で説明し検討を加えるが、いずれも十分に満足できるものではない。端的には、応力プロジェクション法では、特に要素境界近傍で応力分布の乱れが見られ、単純補間法では要素境界で応力が不連続となる。また、計算速度を問題にすれば、低次（一次）要素を用いることが必要となる⁷⁾が、二次要素を対象に提案された単純補間法を一次要素に適用するには無理がある。

本研究では、1) 応力分布の乱れが少ない、2) 要素境界

でも応力分布は連続する、3) 一次要素への適用も可能である、の3条件を満たす応力算定法の提案を目的とする。なお、ここでは2次元問題を対象とし、一般によく用いられる8節点四角形アイソパラメトリック要素（Q8要素）、4節点四角形アイソパラメトリック要素（Q4要素）を用いて検討を行う。

2. 既存の応力算定法

2.1 応力プロジェクション法⁵⁾

この算定法では、節点応力と形状関数を用いて、要素内の応力分布を次のように表す。

$$\{\sigma^*\} = \{N\}^T \{\bar{\sigma}^*\} \quad (1)$$

ここに、 $\{\sigma^*\}$ 、 $\{N\}$ 、 $\{\bar{\sigma}^*\}$ は、求める応力、形状関数、節点応力のベクトルである。なお、この応力補間は、各応力成分ごとに独立して行われる。

応力プロジェクション法の基本未知数は節点応力となるが、これは次の汎関数の停留条件から求められる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} (\{\sigma^*\} - \{\sigma_D\})^2 d\Omega \\ &= \sum_e \int_{\Omega^e} (\{N\}^T \{\bar{\sigma}^*\} - [D][B]\{\bar{U}\})^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

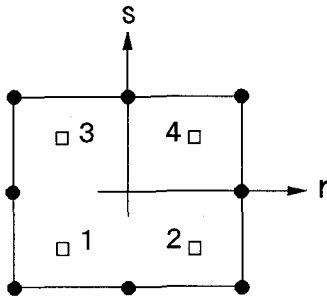


図-1 ガウス積分点番号

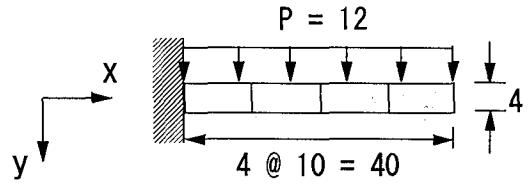


図-2 片持梁

ここに、 Ω は全解析領域、 Ω^e は一要素の領域を表す。また $\{\sigma_D\}$ は直接法による応力であり、 $[D]$ 、 $[B]$ 、 $\{\bar{U}\}$ はそれぞれ応力-ひずみマトリクス、ひずみ-節点変位マトリクス、節点変位ベクトルである。また総和記号は、各要素ごとに積分計算をし、それらを足し合わせて全体系の評価を行うことを意味している。式(2)の第1変分を0とおけば、次の連立一次方程式が誘導される。

$$[A]\{\bar{\sigma}^*\} = \{B\} \quad (3)$$

ここに、

$$[A] = \sum_e \int_{\Omega^e} \{N\} \{N\}^T d\Omega \quad (4)$$

$$\{B\} = \sum_e \int_{\Omega^e} \{N\} [D] [B] \{\bar{U}\} d\Omega \quad (5)$$

式(3)を解けば節点応力が得られ、その結果と式(1)を用いれば、任意点の応力が求められる。

以上より、応力プロジェクション法は、直接法で得られる応力分布を基本とし、それとの差が最小で、かつ要素間での連続性が保たれる応力分布を求める算定法と理解できる。なお、応力の形状関数 $\{N\}$ は、有限要素解析における変位の形状関数と同じものを用いるのが一般的であり、本論文のすべての数値計算例においても、 $\{N\}$ には変位の形状関数を使用する。

2.2 単純補間法⁶⁾

直接法で応力を算定した場合、その精度は各点ごとに異なり、Q8要素の場合、応力算定最適点は 2×2 のガウス積分点となる⁸⁾。単純補間法はQ8要素を対象とし、最適点での応力をもとに双一次関数で表される応力分布を定め、これにより要素内の任意点での応力を算定するものである。すなわち、アイソパラメトリック要素の自然座標 (r, s) を用いれば、任意点での応力が次式で表されることになる。

$$\sigma_{ij}^{**} = \frac{1}{4} [(1-\sqrt{3}r)(1-\sqrt{3}s)\sigma_{ij}^1 + (1+\sqrt{3}r)(1-\sqrt{3}s)\sigma_{ij}^2 + (1-\sqrt{3}r)(1+\sqrt{3}s)\sigma_{ij}^3 + (1+\sqrt{3}r)(1+\sqrt{3}s)\sigma_{ij}^4] \quad (6)$$

ここに、 σ_{ij}^a は a 番目のガウス積分点 (図-1 参照) における応力値である。

歴史的には、単純補間法は Hinton らが最初に提案している⁴⁾ が、その時点では、応力算定最適点は経験的に知り得たものに過ぎなかった。応力算定最適点の証明は、その後、Barlow⁸⁾ によって行われた。その成果により、単純補間法の根拠が初めて明らかにされたこととなる。

なお、本算定法では、各要素内で独立に補間を行うため、要素境界で応力は不連続となる。また、Q4要素の応力算定最適点は 1×1 のガウス積分点のみ⁸⁾ であり、この場合には、単純補間法は適切な手法となり得ない。

2.3 数値計算例

直接法で求めた応力が、本来の解と大きく異なる例として、片持梁のせん断応力分布がよく知られている⁵⁾。ここでは、等分布荷重 P が作用する片持梁 (図-2) を大きさの等しい4個のQ8要素で解析し、上記2つの算定法で応力を求めてみた。この解析ではヤング率 2.0×10^6 、ポアソン比 0.25、梁の幅 1.0 を仮定した。

計算結果として、図心軸上のせん断応力分布を図-3に示す。図中、METHOD-1 が応力プロジェクション法による結果、METHOD-2 が単純補間法による結果であり、梁の左端を $x=0$ としている。この図からわかるように、応力プロジェクション法による結果は連続な応力分布となっているものの、各要素内で大きく変動する乱れた応力分布となっている。この乱れは、直接法で求めた応力分布の大きな変動を引き継いだものであり、応力プロジェクション法の精度が直接法の精度に大きく依存することを示している。これに対し、単純補間法では、各断面での平均せん断応力を表す妥当な結果が得られている。

片持梁の例では、いずれの算定法でも梁全域にわたって連続な応力分布が得られているが、一般には、単純補間法による応力分布は要素間で不連続となる。この点を明確に示すため、内圧 P を受ける円筒 (図-4) の解

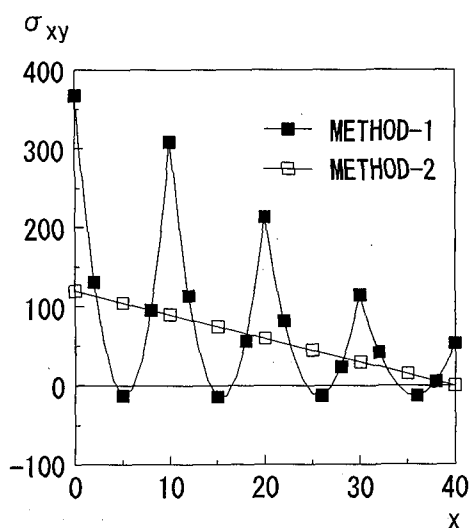
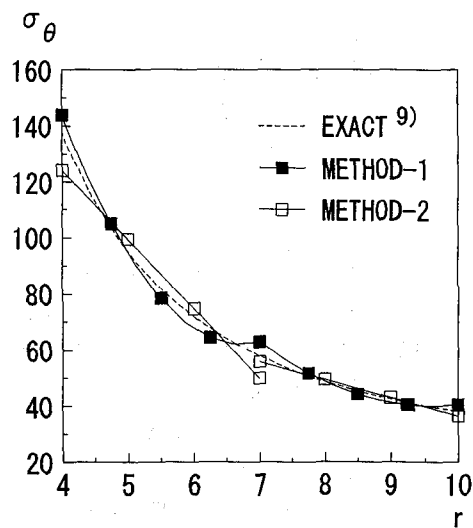


図-3 図心軸上の σ_{xy} 分布 (片持梁)



(a) Q8要素8個

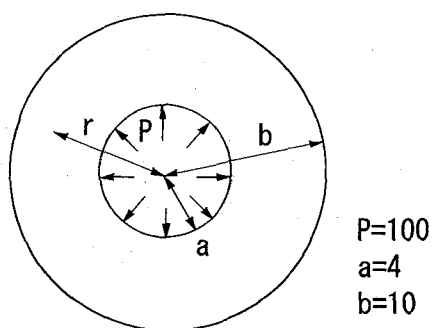
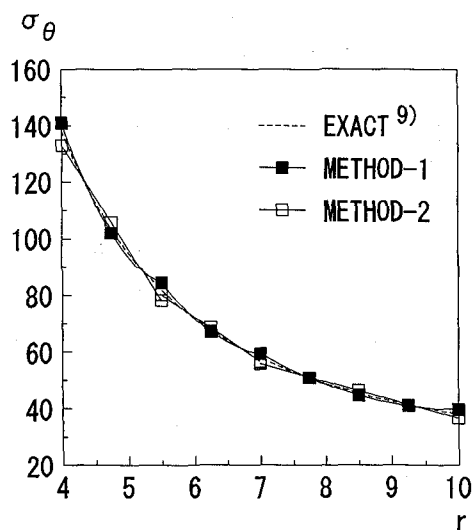
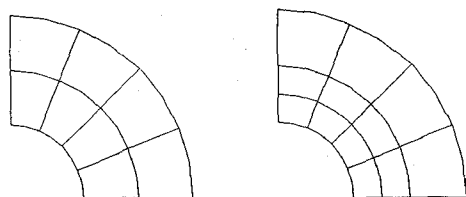


図-4 円筒



(b) Q8要素12個



(a) Q8要素8個

(b) Q8要素12個

図-5 円筒のモデル化

析を次に行い、検討を加えた。この解析ではヤング率 2.0×10^5 、ポアソン比 0.45、円筒長さ 1.0 を仮定した。

対称性を利用して、ここでは $1/4$ 領域のみを解析対象とし、Q8要素を8個 (図-5(a)) ないし12個 (図-5(b)) 用いてモデル化した。12要素を用いた場合、応力勾配の大きな内側領域で、半径方向の要素長を $1/2$ にしている。

有限要素解析で節点変位を求めた後、上記2つの応力

図-6 円筒内の σ_θ 分布 (既存法)

算定法で応力分布を算出し、計算結果として円周方向の直応力 σ_θ を図-6に示している。いずれの算定法を用いても、厳密解⁹⁾に見合った妥当な結果が得られている。特に、12要素を用いた解析ではかなり良好な結果が得られている。しかしながら、8要素の場合はもとより、12要素による解析結果でも、応力プロジェクション法 (METHOD-1) では要素境界近傍で応力分布の乱れが認められ、単純補間法 (METHOD-2) では要素間で応力が不連続となっている。

上記の計算結果をもとに、既存の応力算定法の特徴をまとめれば、次のようになる。

応力プロジェクション法：応力分布は連続であるが、乱れが生じてスムーズさに欠ける。

単純補間法：応力算定最適点での応力を用いているため、精度的な問題は比較的少ない。しかし、要素間で応力分布が不連続となる。

3. 提案する応力算定法

3.1 基礎方程式

既存の算定法の長所を生かし短所を補う手法として、ここでは、単純補間法で得られる応力分布を基本とし、それとの差が最小で、かつ要素間での連続性が保たれる応力分布を求める算定法を提案する。具体的には、この算定法は、応力プロジェクション法で用いる基本応力分布を単純補間法による応力分布に替えるものである。すなわち、式(2)を修正した次の汎関数の停留条件から節点応力を求め、式(1)により任意点の応力を算定することになる。

$$I_2 = \int_{\Omega} (\{\sigma^*\} - \{\sigma^{**}\})^2 d\Omega$$

$$= \sum_e \int_{\Omega^e} (\{N\}^T \{\bar{\sigma}^*\} - \{\sigma^{**}\})^2 d\Omega \quad (7)$$

ここに、 $\{\sigma^{**}\}$ は単純補間法で得られる応力 (式(6)) である。式(7)の第一変分を0とおけば、次の連立一次方程式が得られる。

$$[A]\{\bar{\sigma}^*\} = \{C\} \quad (8)$$

ここに、

$$\{C\} = \sum_e \int_{\Omega^e} \{N\} \{\sigma^{**}\} d\Omega \quad (9)$$

$[A]$ は式(4)で与えられる。式(3)、(8)から明らかなように、応力プロジェクション法と提案法の違いは右辺ベクトルにある。以下では、Q8要素を対象として、右辺ベクトル $\{C\}$ の評価法について考える。

Q8要素は2次元要素であり、その形状関数は2個の独立変数を有している。またこれは二次要素であるため、形状関数にはいずれの変数についても二次の項が含まれる。したがって、直接法による応力分布は一般に二次関数で表現されることになる。その結果、式(5)の積分をガウス積分公式で計算する場合には、3×3の公式を用いる必要がある。これに対し、単純補間法による応力分布は双一次関数で表現されるため、式(9)の積分は2×2の積分公式で計算できる。

ところで、単純補間法で利用する応力算定最適点での

応力とは、直接法で算出した2×2のガウス積分点における応力に他ならない。また上述のように、式(9)の積分には2×2のガウス積分公式を適用できるが、これは単純補間法による応力分布として、2×2のガウス積分点での応力がわかっていることを意味する。これらのことは、式(5)の $\{B\}$ を2×2のガウス積分公式で計算すれば、その結果が式(9)の $\{C\}$ に等しくなることを意味している。すなわち、提案する算定法は、単純補間法で求めた応力分布を基本とするものではあるが、実際に単純補間法で応力分布を算定する必要はなく、実用上は、既存の応力プロジェクション法の右辺ベクトルに次数低減積分を適用する方法と見なすことができる。

Q4要素の応力算定最適点は1×1のガウス積分点⁸⁾のみである。そのため、Q4要素に単純補間法を適用するには無理がある。あえて単純補間法の考え方を適用すれば、要素内で一定値をとる応力場を仮定することになる。本研究では、基本となる応力分布をそのように定め、提案する応力算定法をQ4要素にも適用する。そして、Q8要素の場合と同様に、式(9)の $\{C\}$ の評価法に関する考察を行った。その結果、Q4要素の形状関数は双一次関数であることから、式(5)の $\{B\}$ を1×1のガウス積分公式で計算すれば、式(9)の $\{C\}$ を算出できることが明らかとなった。すなわち、Q4要素の場合にも、実用上、提案する算定法は既存の応力プロジェクション法の右辺ベクトルに次数低減積分を適用する方法と見なすことができる。

3.2 数値計算例

まず片持梁 (図-2) のせん断応力分布を、提案する応力算定法で求めた。この計算例では単純補間法によるせん断応力分布が連続であるため、図-3に示す単純補間法の結果 (METHOD-2) と一致した、妥当な応力分布が得られた。

次に、内圧を受ける円筒 (図-4) を解析した。ここでは、Q8要素12個 (図-5(b)) とQ4要素48個による2種類の解析を行った。Q4要素の要素分割は、Q8要素1個の領域をQ4要素4個でモデル化したものである。本研究で提案した応力算定法の計算結果として、 σ_θ 分布を図-7にまとめている。いずれの解析においても、十分に良好な結果が得られている。図-6(b)と比較すれば、本算定法で得られた応力分布は連続でスムーズなものになっており、所期の目的にかなった算定法になっていることが理解される。

さらに、典型的な応力集中問題である、円孔を有する正方形板 (図-8) の解析を行った。対称性を利用し、1/4領域のみを解析対象とした。Q8要素を用いた場合の要素分割を図-9に示している。Q4要素による解析

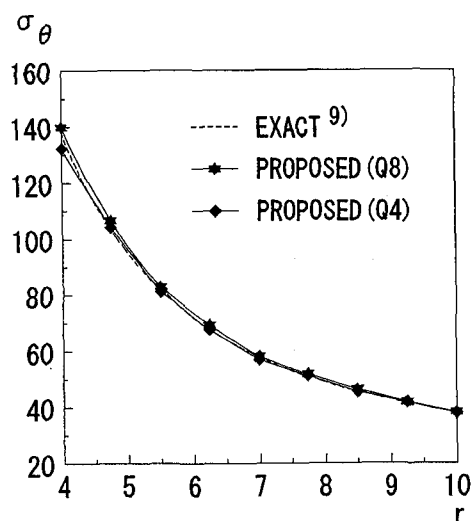


図-7 円筒内の σ_θ 分布 (提案法)

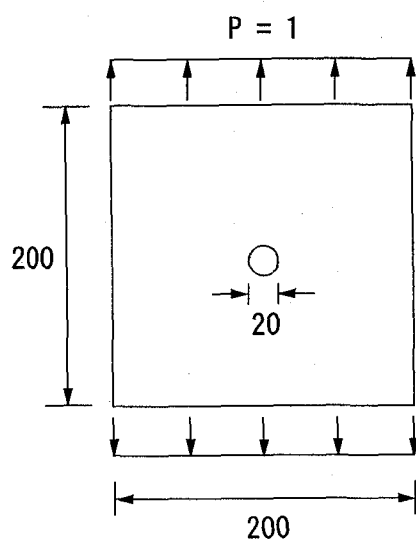


図-8 円孔を有する板

では、Q 8 要素 1 個の領域を Q 4 要素 4 個でモデル化した。また本解析ではヤング率 2.0×10^5 、ポアソン比 0.3、板厚 1.0 を仮定した。

本応力算定法による結果として、円孔に沿った直応力 σ_θ の分布を図-10 に示している。 θ は载荷方向から時計回りに測った角度である。図中に示す厳密解⁹⁾ は無限板の場合のものであるが、円孔の直径が板の一辺の 1/10 に過ぎないため、ここではそれを本問題の厳密解と見なしている。この解析においても、本算定法により、所期の目的にかなった、連続で乱れのない応力分布が得られている。

上記の数値計算例から明らかなように、本算定法は一次要素にも適用可能であり、Q 4 要素、Q 8 要素のいずれを用いても、連続で乱れの少ない応力分布を得ること

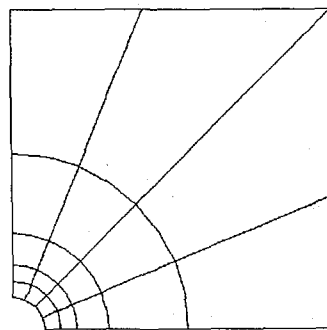


図-9 有孔板のモデル化 (Q 8 要素 20 個)

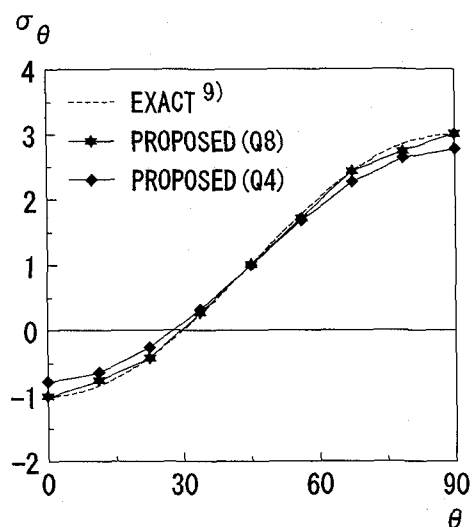


図-10 円孔縁の σ_θ 分布 (提案法)

ができる。しかしながら、精度の観点からすると、Q 4 要素の結果は Q 8 要素に比べて若干劣っている。これは、Q 4 要素の場合、基本となる応力分布を各要素内で一定と仮定したことに起因していると思われる。

4. Q 4 要素に関する補足

直接法で求めた応力算定最適点での応力を用いて単純補間し、それで得られた応力分布を基本として連続な応力分布を得るのが、本研究で提案する応力算定法である。しかしながら、この算定法は、応力算定最適点で単純補間法の応力値と一致する応力が得られることを保証するものではない。すなわち、これは、誤差の少ないことが保証されている応力値を必ずしもとらないことを意味しており、好ましいことではない。この点に鑑み、精度で劣る Q 4 要素を対象に、ここでは応力算定最適点での応力値と一致させる方法について提案する。

低次要素を用いることの利点は、その簡単な構造を利用して計算速度向上の工夫が容易にできることにある⁷⁾。

実際、Q4要素に関しては、式(4)、(9)などを数値積分を用いずに評価することが可能である。

以下では、これら2点について説明を加える。

4.1 応力算定最適点応力との一致

応力算定最適点において、提案する応力算定法が、直接法による応力値をとるようにするため、ここではペナルティ法¹⁰⁾を採用する。すなわち、式(7)の I_2 に替え、次の汎関数の停留条件を考える。

$$I_3 = \sum_e \left[\int_{\Omega^e} (\{N\}^T \{\bar{\sigma}^*\} - \{\sigma^{**}\})^2 d\Omega + \lambda (\{N_0\}^T \{\bar{\sigma}^*\} - \{\sigma_0^{**}\})^2 \right] \quad (10)$$

上式で、下付添字の0は点 $(r,s)=(0,0)$ における値であることを示している。また λ はペナルティ定数である。式(10)の第一変分を0とおけば、節点応力を未知数とする次の連立一次方程式が得られる。

$$[A']\{\bar{\sigma}^*\} = \{C'\} \quad (11)$$

ここに、

$$[A'] = \sum_e \left[\int_{\Omega^e} \{N\}\{N\}^T d\Omega + \lambda \{N_0\}\{N_0\}^T \right] \quad (12)$$

$$\{C'\} = \sum_e \left[\int_{\Omega^e} \{N\}\{\sigma^{**}\} d\Omega + \lambda \{N_0\}\{\sigma_0^{**}\} \right] \quad (13)$$

式(11)を解いて節点応力 $\{\bar{\sigma}^*\}$ を求めれば、式(1)を用いることにより、任意点の応力が算出できる。

以下では、先に提案した応力算定法と区別するために、式(11)による応力算定法を修正提案法と呼ぶ。

4.2 係数マトリクス、右辺ベクトルの陽な表現

式(12)、(13)において $\lambda=0$ とおけば式(4)、(9)が得られるため、ここでは式(12)、(13)についてのみ考察する。

Kohらは代数的なアプローチを取ることにより、Q4要素のヤコビアンなどを (r,s) の関数として陽な形で表している¹¹⁾。それらの表現を用いれば、式(12)、(13)は容易に次のように書き改められる。

$$[A'] = \sum_e \left[J_0 \mathbf{C}_0 + J_1 \mathbf{C}_1 + J_2 \mathbf{C}_2 + \frac{\lambda}{16} \mathbf{I} \right] \quad (14)$$

$$\{C'\} = \sum_e \left[\frac{\sigma_0^{**}}{4} (J_0 + \lambda) \mathbf{H} \right] \quad (15)$$

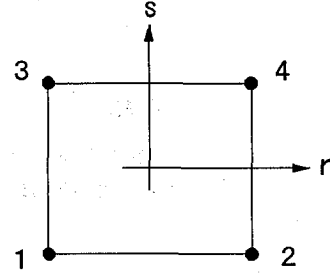


図-11 Q4要素の節点番号

ここに、

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ & 4 & 1 & 2 \\ \text{sym.} & & 4 & 2 \\ & & & 4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 \\ \text{sym.} & & -2 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ & -2 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{H}^T = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\} \quad (19)$$

$$J_0 = l_x m_y - l_y m_x \quad (20)$$

$$J_1 = l_x h_y - l_y h_x \quad (21)$$

$$J_2 = m_y h_x - m_x h_y \quad (22)$$

$$l_x = (-X_1 + X_2 - X_3 + X_4)/4 \quad (23)$$

$$l_y = (-Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4)/4 \quad (24)$$

$$m_x = (-X_1 - X_2 + X_3 + X_4)/4 \quad (25)$$

$$m_y = (-Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4)/4 \quad (26)$$

$$h_x = (X_1 - X_2 - X_3 + X_4)/4 \quad (27)$$

$$h_y = (Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4)/4 \quad (28)$$

X_a , Y_a は、それぞれ節点 a の x , y 座標を表す(節点番号は図-11に示している)。また式(14)の $\mathbf{I}$ は単位行列である。式(15)の σ_0^{**} は、点 $(r,s)=(0,0)$ のひずみに応力-ひずみマトリクス $[D]$ を掛けることにより求められるが、このひずみは次式により評価される。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J_0} \begin{Bmatrix} m_y l_u - l_y m_u \\ -m_x l_v + l_x m_v \\ m_y l_v - l_y m_v - m_x l_u + l_x m_u \end{Bmatrix} \quad (29)$$

ここに,

$$l_u = (-U_1 + U_2 - U_3 + U_4)/4 \quad (30)$$

$$l_v = (-V_1 + V_2 - V_3 + V_4)/4 \quad (31)$$

$$m_u = (-U_1 - U_2 + U_3 + U_4)/4 \quad (32)$$

$$m_v = (-V_1 - V_2 + V_3 + V_4)/4 \quad (33)$$

U_a, V_a は, それぞれ節点 a における節点変位の x, y 成分である.

Q4要素では, このように係数行列 $[A']$, 右辺ベクトル $\{C'\}$ とともに陽な表現が得られるため, 計算効率良く解析を行うことが可能となる. また, 修正提案法では λ の項が新たに導入されているが, 式(14), (15)から理解されるように, その導入に伴う計算量の増加はごくわずかなものに過ぎない.

4.3 数値計算例

修正提案法を用いて円筒 (図-4), 有孔板 (図-8) の応力分布を計算し, 結果をPROPOSED-Mとして図-12に示している. いずれの問題でも, 先の結果 (図-7, 10) に比して精度がかなり向上しており, Q8要素の計算結果に比べても遜色ない応力分布となっている. これにより, 修正提案法の有効性が理解される.

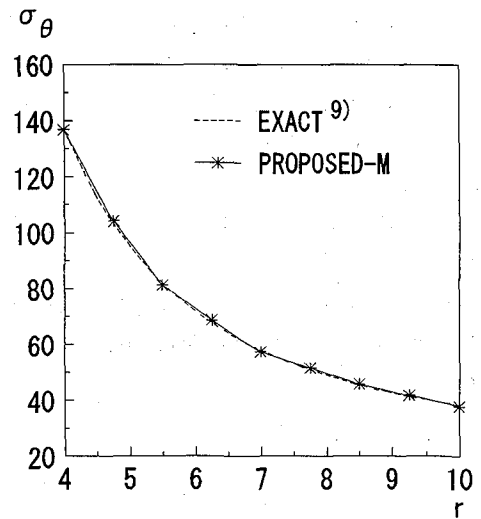
なお, 修正提案法ではペナルティ数 λ が導入されており, 本計算例では $\lambda = 20000$ とした. λ には数値計算上の問題が生じない範囲でできるだけ大きな値を与えるのが原則であるが, 本計算例の場合, λ を 20000 以上にしても得られる応力値に差はほとんど生じず, 実用上, $\lambda = 20000$ で十分であった.

5. おわりに

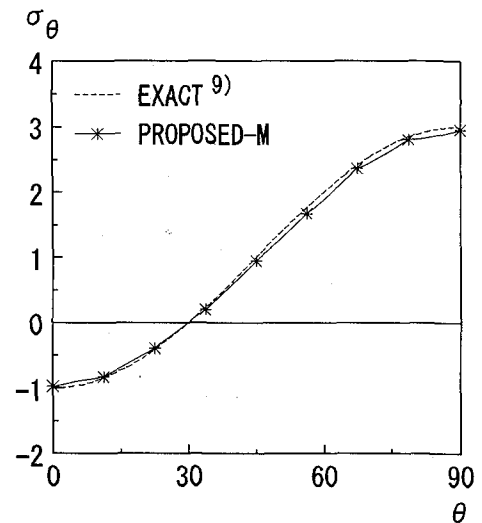
乱れが少なく, かつ要素間でも連続する応力分布が得られる応力算定法を提案し, 数値計算例によりその有効性を示した. 本算定法は, 既存の応力プロジェクション法の右辺ベクトルの評価に次数低減積分を適用するという簡便なものであり, 既存の応力プロジェクション法より計算時間はむしろ短くなる. またこの算定法は一次要素 (Q4要素) にも適用可能であり, 少しの工夫により, 二次要素 (Q8要素) と同等の精度が得られることも示した. 今後は, 本手法の3次元問題への適用性について検討を加えていく予定である.

参考文献

- 1) Oden, J.T. and Brauchli, H.J.: On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.3, pp.317-325, 1971.



(a) 円筒内



(b) 円孔縁

図-12 σ_θ 分布 (修正提案法)

- 2) Oden, J.T. and Reddy, J.N.: Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.6, pp.55-61, 1973.
- 3) Hinton, E. and Cambell, J.S.: Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.8, pp.461-480, 1974.
- 4) Hinton, E., Scott, F.C. and Ricketts, R.E.: Local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.9, pp.235-256, 1975.
- 5) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element

- Method, 4th edn., Vol.1, McGraw-Hill, 1989.
- 6) Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3rd edn., John Wiley & Sons, 1989.
 - 7) 菊池昇：有限要素法とその応用－最近の話題と発展－，土木学会論文集，第 392 号／1-9，pp.1-11，1988.
 - 8) Barlow, J.: Optimal stress locations in finite element models, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.10, pp.243-251, 1976.
 - 9) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.: Theory of Elasticity, 3rd edn., McGraw-Hill, 1970.
 - 10) Hughes, T.J.R.: The Finite Element Method, Prentice-Hall, 1987.
 - 11) Koh, B.C. and Kikuchi, N.: New improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol.65, pp.1-46, 1987.

(1997 年 9 月 26 日受付)