

クロスプライ積層偏平シェルの自由振動問題に関する一解析法

A FREE VIBRATION ANALYSIS OF CROSS-PLY LAMINATED SHALLOW SHELLS

森田千尋*・松田 浩**・崎山 毅***・佐治孝記****・浦田英知****・黄 美†

Chihiro MORITA, Hiroshi MATSUDA, Takeshi SAKIYAMA, Takanori SAJI, Hidetomo URATA
and Huang MEI

*博(工学) 長崎大学講師 工学部構造工学科 (〒 852-8521 長崎市文教町 1-14)

**工博 長崎大学助教授 工学部構造工学科 (〒 852-8521 長崎市文教町 1-14)

***工博 長崎大学教授 工学部構造工学科 (〒 852-8521 長崎市文教町 1-14)

****長崎大学大学院生 工学研究科構造工学専攻 (〒 852-8521 長崎市文教町 1-14)

†長崎大学大学院生 海洋生産科学研究科 (〒 852-8521 長崎市文教町 1-14)

In this paper, a discrete method for analyzing the free vibration problem of laminated shallow shells is proposed. By transforming the differential equations into integral equations and applying the numerical integration, the discrete solutions can be obtained. The characteristic equation of the free vibration is derived by applying the Green function which is obtained as a discrete solution of differential equations governing the flexural behavior of the laminated shallow shells under the action of a concentrated load. By applying the characteristic equation, the behavior of the free vibration of the laminated shallow shells can be analyzed efficiently without a calculation by trail and error method.

As the application of the present method, free vibration problem of cross-ply laminated shallow shells(elliptic-, cylindrical, hyperbolic-, paraboloidal shells) having the arbitrary boundary conditions can be calculated. The numerical results obtained by this method are verified to be in good agreement with the exact solution.

Key Words : laminated shallow shells, free vibration analysis, a discrete method, Green function

1. はじめに

近年, 世界最大である中央支間長 1,990m の明石海峡大橋を遥かに凌ぐ, 2,500m 規模の超長大橋吊橋案が国内外で計画されつつある。このような大規模橋梁構造物においては, 上部構造は実績スパン長を 2~3 割上回る吊橋となり, 既存の技術では合理的かつ経済的な設計は難しく, より耐風性に優れた桁断面やケーブルシステムを用いた吊橋の開発, および減衰性能を向上させるような制振技術が必要とされる。例えば超長大橋では, 橋梁桁断面を流線形にするなど, 流体力学を駆使して耐風安定性を高めている。

一方, 構造軽量化が重要となる航空・宇宙工学の分野では, 繊維強化プラスチック (FRP) の異方性を積極的に利用した研究が進められている。FRP は, 比強度, 比剛性および軽量性に優れており, これを積層状にした積層板は, 力学的に強い異方性を示し, 積層順序, 配向角などを変えらることにより力学特性を自由に設計(テーラリング)できる。例えば航空機の翼は, 前進翼になると空気力学的に優れていることがわかってきたが, 等方性の金属では不可能とされていた。ところが複合材料では, クロスエラスティシティの効果をうまく利用することにより可能となり, 次世代の航空機には複合材料の異

方性の効果が積極的に利用されている¹⁾。

このように, 超長大橋梁の上部構造桁部材においては, テーラリングできる複合材料を用いて, 異方性を積極的に利用した板殻構造の使用が考えられるが, 積層曲面構造の力学的特性については, 等質・等方性のそれと比べれば必ずしも十分な検討が行われていないのが現状である。

積層板の自由振動問題に関する研究は, 厳密解が得られる四辺単純支持された場合を除けば, 何らかの近似解法によらなければならないが, 有限要素法²⁾, 伝達マトリックス法³⁾, 選点法⁴⁾, スプライン帯板法⁵⁾などによる検討が行われている。しかしながら, 積層シェルに関する研究は, 周辺単純支持された円筒パネルの解析が多く^{6), 7)}, 任意の境界条件を取り扱ったものは, 水澤ら⁸⁾により相対する二辺は単純支持と限定した円筒パネルの解析程度である。このように, 任意の境界条件および曲面形状を持つ積層偏平シェルの自由振動性状に関する研究は著者らの知る限り見当たらない。

著者らは既に, 任意の境界条件の下での矩形板の自由振動⁹⁾や面外座屈¹⁰⁾などの固有値問題を, 基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により, 矩形板の基礎微分方程式の離散解を求め,

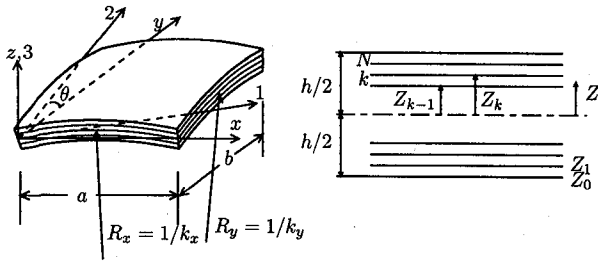


図-1 積層偏平シェル

これに基づく矩形板の解法を提示している。しかしながらこれらの固有値問題では、係数マトリックスの行列式をゼロとする固有値を試行錯誤により求めなければならず、高次の固有値を求める際には難点とされていた。

そこで本論文では、偏平シェルの自由振動問題に関して、境界要素法などで用いられているグリーン関数を用いた固有値問題の解析手法を新たに提示し、限られた境界条件の場合にのみ得られる厳密解と本解析法による結果を比較することにより、本解析法の妥当性を検証する。さらに、曲率、積層数、積層順序および境界条件などのパラメータが積層偏平シェルの自由振動特性に及ぼす影響を調べるために、今回はクロスプライ積層偏平シェルに限定して、その自由振動特性を明らかにすることを目的としている。

2. 積層偏平シェルの基礎微分方程式

シェル厚中央面に座標 x, y 、それらに垂直な座標 z を定め、曲面の x, y 方向の曲率を k_x, k_y 、ねじれ率を k_{xy} とし、これらがあまり小さくなく、投影形状が矩形の曲面板を考える。図-1に示す積層偏平シェルは、 N 層のラミナから成り、各ラミナは均質な直交異方性材料とし、密度および厚さは同じであり、それぞれ完全に密着しているものと仮定する。図-1に示すように、材料の直交異方性主軸を $(1, 2, 3)$ で表わし、主軸 1 と 2 はそれぞれ x 軸と y 軸に対し傾き θ (プライ配向角) だけ傾いているものとする。

図-2に示すように、板厚中央面に対して接線方向の面内変位成分を u, v 、および垂直方向の変位成分を w とし、面内力を N_{xy}, N_y および N_x 、せん断力を Q_y, Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y, M_x 、たわみ角を θ_y, θ_x とすれば、曲面に対して接線方向および垂直方向に作用する荷重成分 q_x, q_y および q_z を受ける積層偏平シェルの曲げに関する基礎微分方程式は、一次せん断変形理論に基づいて、次の連立偏微分方程式となる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - k_x Q_x = -q_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - k_y Q_y = -q_y \quad (2)$$

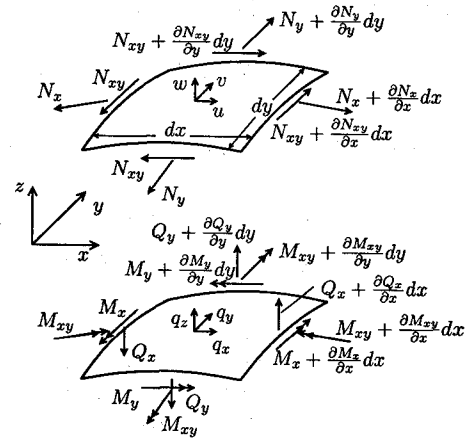


図-2 偏平シェルの断面力および変形

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + 2k_{xy} N_{xy} = -q_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (5)$$

$$M_x = B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + B_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + B_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{16} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (6)$$

$$M_y = B_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + B_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + B_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$M_{xy} = B_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + B_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + D_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$Q_y = \kappa A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (9)$$

$$Q_x = \kappa A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (10)$$

$$N_x = A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + A_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + A_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right) + B_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$N_y = A_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w \right) + A_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w \right) + A_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{xy} w \right)$$

$$+B_{12}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+B_{22}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+B_{26}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} N_{xy} = & A_{16}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\kappa_x w\right)+A_{26}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\kappa_y w\right) \\ & +A_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2\kappa_{xy} w\right) \\ & +B_{16}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+B_{26}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+B_{66}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right) \quad (13) \end{aligned}$$

ここで、 $q_x = q_x(x, y)$, $q_y = q_y(x, y)$: 接線方向荷重強度、 $q_z = q_z(x, y)$: 垂直方向荷重強度、 $\kappa = 5/6$: セン断修正係数であり、 A_{ij} : 面内剛性、 B_{ij} : カップリング剛性、 D_{ij} : 曲げ剛性は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned}$$

なお、 $\bar{Q}_{ij}$ は付録に示すとおりである。

3. 解析手法

本論文においては、グリーン関数を用いた固有値問題の解析手法を提示する。

まず、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により、積層偏平シェルの基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づき離散化されたグリーン関数を求める。さらに、このグリーン関数を用いて運動方程式を積分方程式に変換し、これに数値積分を適用して固有値解析を行う。

3.1 離散化グリーン関数

次の無次元量 $X_{e1} \sim X_{e13}$ ($e = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} X_{e1} &= \frac{a^2 Q_y}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & X_{e2} &= \frac{a^2 Q_x}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \\ X_{e3} &= \frac{a M_{xy}}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & X_{e4} &= \frac{a M_y}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \\ X_{e5} &= \frac{a M_x}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & X_{e6} &= \theta_y, & X_{e7} &= \theta_x, \\ X_{e8} &= \frac{w}{a}, & X_{e9} &= \frac{v}{a}, & X_{e10} &= \frac{u}{a}, \\ X_{e11} &= \frac{a^2 N_{xy}}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & X_{e12} &= \frac{a^2 N_y}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \\ X_{e13} &= \frac{a^2 N_x}{D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})} \end{aligned}$$

および、 x, y に関して、 $x = a\eta, y = b\zeta$ なる無次元量 η, ζ を導入すると、無次元化された離散化グリーン関数は、任意の点 $x = x_0, y = y_0$ ($x_0/a = \eta_0, y_0/b = \zeta_0$) に

作用する単位荷重 P_1, P_2 および P_3 により、次のように表わされる。

$$X_{18}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_1 a^2}{D_0} W_1(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (14)$$

$$X_{19}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_1 a^2}{D_0} V_1(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (15)$$

$$X_{110}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_1 a^2}{D_0} U_1(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (16)$$

$$X_{28}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_2 a^2}{D_0} W_2(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (17)$$

$$X_{29}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_2 a^2}{D_0} V_2(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (18)$$

$$X_{210}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_2 a^2}{D_0} U_2(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (19)$$

$$X_{38}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_3 a^2}{D_0} W_3(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (20)$$

$$X_{39}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_3 a^2}{D_0} V_3(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (21)$$

$$X_{310}(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) = \frac{P_3 a^2}{D_0} U_3(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) \quad (22)$$

ここで、式 (14) ~ (16) は、任意の点 (η_0, ζ_0) に単位荷重 P_1 が作用した場合 ($q_x(\eta, \zeta) = P_1 \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0)$)、式 (17) ~ (19) は、単位荷重 P_2 が作用した場合 ($q_y(\eta, \zeta) = P_2 \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0)$)、式 (20) ~ (22) は、単位荷重 P_3 が作用した場合 ($q_z(\eta, \zeta) = P_3 \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0)$) のそれぞれ垂直方向および接線方向変位である。

無次元化されたグリーン関数を求めるため、式 (1) ~ (13) を無次元化すると次のように書き表わされる。

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{13} \left\{ F_{1ts} \frac{\partial X_{es}}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial X_{es}}{\partial \eta} + F_{3ts} X_{es} \right\} \\ + \frac{P_e a^2}{D_0} \delta_{et} \delta(\eta - \eta_0) \delta(\zeta - \zeta_0) = 0 \quad (23) \\ (e = 1, 2, 3, \quad t = 1 \sim 13) \end{aligned}$$

ここで、 $F_{1ts}, F_{2ts}, F_{3ts}$ は断面力および変形にかかる無次元化された係数であり、 $\delta(\eta - \eta_0), \delta(\zeta - \zeta_0)$: ディラックのデルタ関数、 $\delta_{e1}, \delta_{e2}, \delta_{e3}$: クロネッカーのデルタである。

図-3に示すように、偏平シェルの矩形 Base を横、縦方向にそれぞれ m, n 等分し、これらの等分割線の交点の集合体とみなす。ここで、任意の交点 (i, j) に関連する矩形領域 $0 \leq \eta \leq \eta_i, 0 \leq \zeta \leq \zeta_j$ に注目し、これを $[i, j]$ と表記することとする。また、●印を付けた交点を任意領域 $[i, j]$ の主要点、○印を付けた交点を内部従属点、●印を付けた交点を境界従属点と称して区別する。

基礎微分方程式 (23) における $F_{1ts}, F_{2ts}, F_{3ts}$ が変数係数であることに注意し、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近

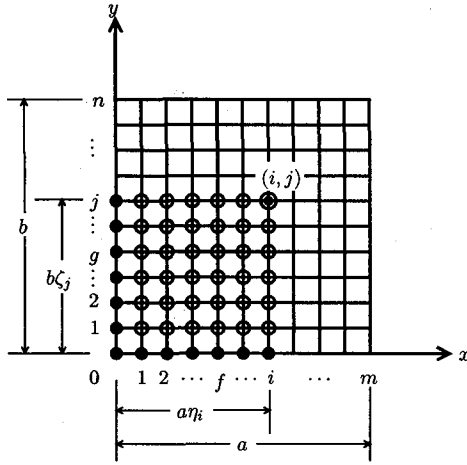


図-3 積層偏平シェルの矩形 Base の離散点

似解法を応用すると、偏平シェルの縦横の等分割線の交点に関する離散解は、次式のように整理される。

$$X_{epij} = \sum_{d=1}^{10} \left\{ \sum_{k=0}^i a_{epijkd} X_{erk0} + \sum_{l=0}^j b_{epijld} X_{es0l} \right\} + q_{epij} \quad (24)$$

($r = 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$, $s = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13$)

式 (24) は偏平シェルの離散表示された離散解である。この式に含まれる境界従属点の諸量 X_{erk0} , X_{es0l} はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 X_{epij} を、この領域の境界従属点における諸量 X_{erk0} , X_{es0l} に関係づける要素 a_{epijkd} , b_{epijld} は、格間伝達マトリックスに相当するものである。なお、離散解の導入過程の詳細は、文献 11) を参照されたい。

3.2 積分定数と境界条件

基礎微分方程式 (1) ~ (13) の近似解 (24) に含まれる積分定数 X_{erk0} , X_{es0l} は、具体的には、それぞれ偏平シェルの $y = 0, x = 0$ なる辺上における断面力および変形を表す。 $y = 0$ において Q_x, M_x, N_x , $x = 0$ において Q_y, M_y, N_y は積分定数として存在しないため、各等分割点において合計 10 個ずつの積分定数が存在するが、偏平シェルの境界条件に応じて、これらの中のいずれか 5 個の積分定数は、はじめから既知である。残りの 5 個の未知なる積分定数は、 $x = a, y = b$ の各辺の境界条件によって決定される。

図-4に、四辺単純支持 (ローラー) の場合の偏平シェルの積分定数と境界条件を示す。隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において、2 境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められ、 $\square$ で囲まれている。

その他の場合も含めて、具体的な境界条件を以下に示す。

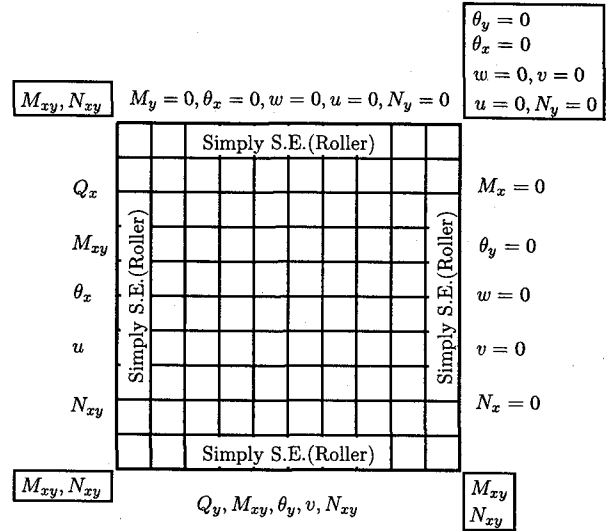


図-4 積分定数と境界条件

- $x = 0, x = a$ において、
 単純 (ローラー) : $M_x = \theta_y = w = v = N_x = 0$
 単純 (ピン) : $M_x = \theta_y = w = v = u = 0$
 固定 : $\theta_y = \theta_x = w = v = u = 0$
- $y = 0, y = b$ において、
 単純 (ローラー) : $M_y = \theta_x = w = u = N_y = 0$
 単純 (ピン) : $M_y = \theta_x = w = v = u = 0$
 固定 : $\theta_y = \theta_x = w = v = u = 0$

3.3 固有振動数方程式

積層偏平シェルの自由振動を支配する運動方程式は、式 (1) ~ (3) の荷重強度を単位面積当りの慣性力とすればよく、次式となる。

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} - k_x \bar{Q}_x = -\rho h \omega^2 \bar{u} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} - k_y \bar{Q}_y = -\rho h \omega^2 \bar{v} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + k_x \bar{N}_x + k_y \bar{N}_y + 2k_{xy} \bar{N}_{xy} = -\rho h \omega^2 \bar{w} \quad (27)$$

ここで、 ρ : 積層偏平シェルの材料密度、 ω : 固有円振動数であり、 $\bar{Q}_y, \dots, \bar{N}_x$ は前述の単位荷重を受ける場合の断面力および変形と区別している。

同様に次の無次元量 $Y_1 \sim Y_{13}$

$$Y_1 = \frac{a^2 \bar{Q}_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad Y_2 = \frac{a^2 \bar{Q}_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$Y_3 = \frac{a \bar{M}_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad Y_4 = \frac{a \bar{M}_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$Y_5 = \frac{a \bar{M}_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad Y_6 = \bar{\theta}_y, \quad Y_7 = \bar{\theta}_x,$$

$$Y_8 = \frac{\bar{w}}{a}, \quad Y_9 = \frac{\bar{v}}{a}, \quad Y_{10} = \frac{\bar{u}}{a},$$

$$Y_{11} = \frac{a^2 \bar{N}_{xy}}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad Y_{12} = \frac{a^2 \bar{N}_y}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$Y_{13} = \frac{a^2 \bar{N}_x}{D_0(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$$

を導入すると、積層偏平シェルの自由振動を支配する偏微分方程式は、次のように表わされる。

$$\sum_{s=1}^{13} \left\{ G_{1ts} \frac{\partial Y_s}{\partial \zeta} + G_{2ts} \frac{\partial Y_s}{\partial \eta} + G_{3ts} Y_s \right\} = 0 \quad (28)$$

$$(t = 1 \sim 13)$$

まず、無次元化した式 (25) の両辺に Y_{10} を乗じ、全領域において面積分を行い、2重積分することにより順次展開する。周辺の境界条件を考慮するといずれの境界条件の場合も整理され、次式となる。

$$Y_{10}(\eta_0, \zeta_0) = \mu \lambda^4 \int_0^1 \int_0^1 [U_1(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_{10}(\eta, \zeta) + V_1(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_9(\eta, \zeta) + W_1(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_8(\eta, \zeta)] h^* d\eta d\zeta \quad (29)$$

ここで、

$$\mu = \frac{b}{a}, \quad \lambda^4 = \frac{\rho h_0 \omega^2 a^4}{D_0}, \quad h^* = \frac{h(\eta, \zeta)}{h_0}$$

である。

同様に、無次元化した式 (26) の両辺に Y_9 を、式 (27) の両辺に Y_8 をそれぞれ乗じ、面積分を行い整理すると次式となる。

$$Y_9(\eta_0, \zeta_0) = \mu \lambda^4 \int_0^1 \int_0^1 [U_2(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_{10}(\eta, \zeta) + V_2(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_9(\eta, \zeta) + W_2(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_8(\eta, \zeta)] h^* d\eta d\zeta \quad (30)$$

$$Y_8(\eta_0, \zeta_0) = \mu \lambda^4 \int_0^1 \int_0^1 [U_3(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_{10}(\eta, \zeta) + V_3(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_9(\eta, \zeta) + W_3(\eta_0, \zeta_0, \eta, \zeta) Y_8(\eta, \zeta)] h^* d\eta d\zeta \quad (31)$$

次に、式 (29) ~ (31) に等間隔の数値積分を適用すると次式が求まる。

$$Y_{10fg} = \mu \lambda^4 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \beta_{mi} \beta_{nj} [U_{1fgij} Y_{10ij} + V_{1fgij} Y_{9ij} + W_{1fgij} Y_{8ij}] h^* \quad (32)$$

$$Y_{9fg} = \mu \lambda^4 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \beta_{mi} \beta_{nj} [U_{2fgij} Y_{10ij} + V_{2fgij} Y_{9ij} + W_{2fgij} Y_{8ij}] h^* \quad (33)$$

$$Y_{8fg} = \mu \lambda^4 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \beta_{mi} \beta_{nj} [U_{3fgij} Y_{10ij} + V_{3fgij} Y_{9ij} + W_{3fgij} Y_{8ij}] h^* \quad (34)$$

$$(f = 0 \sim m, \quad g = 0 \sim n)$$

ここで、 β_{mi}, β_{nj} は数値積分における重み係数である。

式 (32) ~ (34) を整理すると積層偏平シェルの固有振動数方程式は次式となる。

$$\begin{vmatrix} \bar{U}_1 - \Lambda & \bar{V}_1 & \bar{W}_1 \\ \bar{U}_2 & \bar{V}_2 - \Lambda & \bar{W}_2 \\ \bar{U}_3 & \bar{V}_3 & \bar{W}_3 - \Lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

ここで、

$$[\bar{U}_e] = \begin{bmatrix} B_{00} U_{e0000} & B_{01} U_{e0001} & \cdots & B_{mn} U_{e00mn} \\ B_{00} U_{e0100} & B_{01} U_{e0101} & \cdots & B_{mn} U_{e01mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{00} U_{emn00} & B_{01} U_{emn01} & \cdots & B_{mn} U_{emnmn} \end{bmatrix},$$

$$[\bar{V}_e] = \begin{bmatrix} B_{00} V_{e0000} & B_{01} V_{e0001} & \cdots & B_{mn} V_{e00mn} \\ B_{00} V_{e0100} & B_{01} V_{e0101} & \cdots & B_{mn} V_{e01mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{00} V_{emn00} & B_{01} V_{emn01} & \cdots & B_{mn} V_{emnmn} \end{bmatrix},$$

$$[\bar{W}_e] = \begin{bmatrix} B_{00} W_{e0000} & B_{01} W_{e0001} & \cdots & B_{mn} W_{e00mn} \\ B_{00} W_{e0100} & B_{01} W_{e0101} & \cdots & B_{mn} W_{e01mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{00} W_{emn00} & B_{01} W_{emn01} & \cdots & B_{mn} W_{emnmn} \end{bmatrix},$$

$$(e = 1, 2, 3)$$

$$B_{ij} = \beta_{mi} \beta_{nj},$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 1/(\mu \lambda^4 h_{00}^*) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/(\mu \lambda^4 h_{01}^*) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/(\mu \lambda^4 h_{mn}^*) \end{bmatrix}$$

である。

4. 数値解析結果

数値解析例として本論文で用いた積層偏平シェルは、 $a/h = 100$, $a/b = 1$ の正方形のクロスプライ積層偏平シェルであり、材料特性としてはグラファイト / エポキシ材を仮定し、 $E_1 = 138[\text{GPa}]$, $E_2 = 8.96[\text{GPa}]$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 7.1[\text{GPa}]$, $\nu_{12} = 0.3$ としている。また、せん断修正係数は、 $\kappa = 5/6$ を用いた。

4.1 解法の実用性の検証

はじめに、本解析法の収束性を検討するために、四辺単純 (ローラー) 支持され、曲率 $ak_x = ak_y = 0.2$ を持つ等質・等方性の偏平シェルおよび3層 $[0/90/0]$ の積層偏平シェルの1次の固有値 λ^2 を厳密解¹²⁾ とともに表-1に示す。なお、括弧内の数値は本解析法による数値解の厳密解に対する比である。

同表より、本解析法による数値解は、4分割程度の粗い分割による解析においてもせいぜい2%程度の誤差であり、分割数の増大とともに一様に収束している。

次に、本解析法の実用性を検討するために、前述の偏平シェルの曲率および曲面形状を変化させた場合の固有値 λ^2 を厳密解¹²⁾ とともに表-2および表-3に示す。なお、表中の E.P. は Elliptic Paraboloidal (楕円放物

表-1 固有値 (λ^2) の収束性

$m = n$	isotropic shell	laminated shell
4	69.590 (1.011)	122.29 (1.017)
6	69.174 (1.005)	121.10 (1.007)
8	69.039 (1.003)	120.72 (1.004)
10	68.978 (1.002)	120.54 (1.003)
12	68.944 (1.001)	120.44 (1.002)
14	68.922 (1.001)	120.39 (1.002)
Exact	68.86	120.2

Exact = Exact Solutions¹²⁾

表-2 偏平シェルの固有値 (λ^2)

k_x/k_y	ak_x	$m = n$	(M,N)			
			(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
Plate	0.0	8	20.25	54.01	54.01	87.74
		10	20.06	52.22	52.22	84.36
		12	19.96	51.34	51.34	82.61
		Ex.V.	19.73	49.34	49.34	78.63
		Exact	19.74	49.35	49.35	78.96
1 (E.P.)	0.2	8	69.04	85.30	85.30	109.8
		10	68.98	84.18	84.18	107.1
		12	68.94	83.61	83.61	105.8
		Ex.V.	68.85	82.31	82.31	102.8
		Exact	68.86	82.43	82.43	102.9
	0.5	8	165.2	173.3	173.3	186.7
		10	165.1	172.7	172.7	185.1
		12	165.0	172.4	172.4	184.3
		Ex.V.	164.8	171.7	171.7	182.5
		Exact	164.6	171.7	171.7	182.6
0 (C.)	0.2	8	38.71	76.15	55.37	93.72
		10	38.61	74.67	53.70	90.57
		12	38.56	73.91	52.85	88.94
		Ex.V.	38.45	72.18	50.92	85.24
		Exact	38.44	72.30	51.06	85.56
	0.5	8	84.49	144.5	62.00	120.3
		10	84.40	143.1	60.84	117.8
		12	84.35	142.5	60.40	116.7
		Ex.V.	84.24	141.1	59.40	114.2
		Exact	84.18	140.8	59.18	114.0
-1 (H.P.)	0.2	8	20.15	67.93	67.93	87.64
		10	19.96	66.14	66.14	84.26
		12	19.86	65.21	65.21	82.51
		Ex.V.	19.63	63.10	63.10	78.53
		Exact	19.66	63.24	63.24	78.88
	0.5	8	19.64	116.0	116.0	87.12
		10	19.43	113.7	113.7	83.72
		12	19.31	112.6	112.6	81.96
		Ex.V.	19.04	110.1	110.1	77.96
		Exact	19.26	110.0	110.0	78.46

Ex.V. = Extrapolated Values [10-12]
Exact = Exact Solutions¹²⁾

表-3 積層偏平シェルの固有値 (λ^2)

k_x/k_y	ak_x	$m = n$	(M,N)			
			(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
Plate	0.0	8	45.43	78.37	174.0	196.4
		10	45.04	76.23	167.4	188.8
		12	44.78	75.12	164.1	184.9
		Ex.V.	44.19	72.60	156.6	176.0
		Exact	44.31	72.80	157.4	177.2
1 (E.P.)	0.2	8	120.7	156.6	213.8	226.0
		10	120.5	154.8	208.2	219.5
		12	120.4	153.9	205.3	214.7
		Ex.V.	120.2	151.9	198.7	203.8
		Exact	120.2	151.9	199.7	209.6
	0.5	8	280.3	346.2	354.9	341.0
		10	280.0	343.5	350.5	336.7
		12	279.8	342.1	348.2	334.4
		Ex.V.	279.3	338.9	343.0	329.2
		Exact	278.9	338.8	343.7	330.2
0 (C.)	0.2	8	72.02	135.2	175.4	204.1
		10	71.75	132.9	168.9	196.9
		12	71.61	131.7	165.7	193.1
		Ex.V.	71.29	129.0	158.4	184.5
		Exact	71.33	129.2	159.3	185.8
	0.5	8	146.0	285.2	182.6	240.5
		10	145.8	281.4	176.9	234.3
		12	145.7	279.4	173.9	231.2
		Ex.V.	145.5	274.9	167.1	224.2
		Exact	145.4	274.8	168.5	225.3
-1 (H.P.)	0.2	8	45.20	115.3	190.3	196.2
		10	44.77	112.6	183.8	188.6
		12	44.54	111.1	180.4	184.7
		Ex.V.	44.02	107.7	172.7	175.8
		Exact	44.13	108.1	173.7	177.0
	0.5	8	44.06	224.2	259.0	195.0
		10	43.58	219.2	251.8	187.4
		12	43.32	216.5	248.0	183.5
		Ex.V.	42.73	210.4	239.4	174.6
		Exact	43.23	210.6	240.4	176.1

Ex.V. = Extrapolated Values [10-12]
Exact = Exact Solutions¹²⁾

4.2 曲率の影響

つづいて、シェルの曲率が自由振動特性に与える影響を調べるため、前述の3層 [0/90/0] の積層偏平シェルに関して、曲率を $ak_x = 0.0 \sim 1.0$ まで変化させた場合の固有値曲線をそれぞれ図-5 ~ 7に示す。なお、これらの図においての縦軸は固有値 λ^2 の平方根をとっている。

図-5は、積層偏平 E.P. シェルの固有値曲線であり、曲率の増加とともに固有値も増加している。また、(1,2), (1,3) など y 方向の半波数が多く出る振動モードは、板 ($ak_x = 0.0$) の場合は固有値が小さいのに対し、曲率を大きくすると固有値も大きくなる。

図-6および図-7は、積層偏平 C. シェルおよび積層偏平 H.P. シェルの固有値曲線であり、ほとんどの振動モードにおいて、曲率の増加とともに固有値も増加している。(1,2), (1,3) など y 方向の半波数が多く出る振動モードは、E.P. シェルの場合と同様に、曲率の変化に対して大きく変化していくことが顕著に現われている。しかしながら、C. シェルの場合、(2,1), (3,1), (3,2) など x 方向の半波数が多く出る振動モードは、曲率を大きくしても固有値に変化はあまり見られない。また、H.P. シェルの場合、(1,1), (2,2) など x 方向と y 方向の半波数が同じ振動モードは、曲率を大きくすると固有値は逆に小さくなる。

面形), C. は Cylindrical(円筒), H.P. は Hyperbolic Paraboloidal(双曲放物面形)の略であり, (M,N) は, 振動モードの x, y 方向の半波数を示す。同表には, 分割数 $m = n = 8, 10, 12$ の場合の固有値および *Richardson* の補外公式¹³⁾ によって求めた推定収束値 (10 分割と 12 分割) を示してある。

本解析法による数値解析結果は, いずれの場合も分割数の増加とともに一様に収束し, 8~12 分割程度の比較的粗い分割による解析においても, 実用上, 十分の精度をもつ解が得られている。さらに, *Richardson* の補外公式¹³⁾ による推定収束値は, 厳密解¹²⁾ に極めて近づくことが示されている。

なお, 以下の計算においては, 分割数 $m = n = 12$ としている。

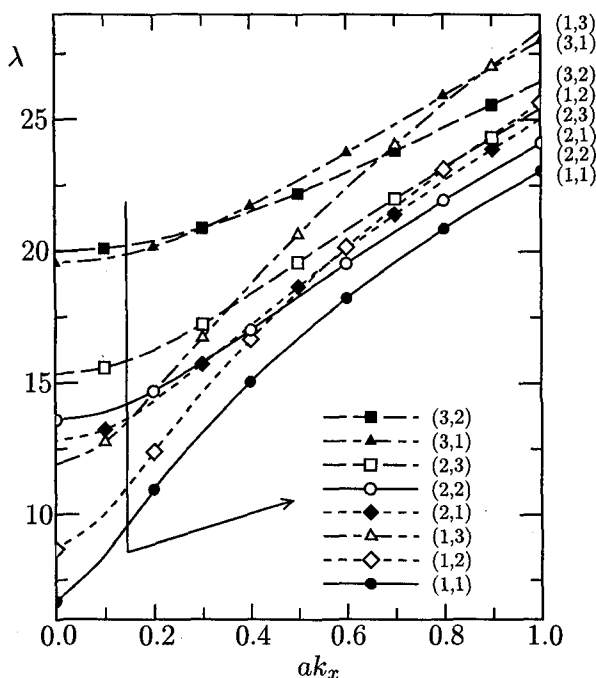


図-5 積層偏平 E.P. シェルの固有値曲線

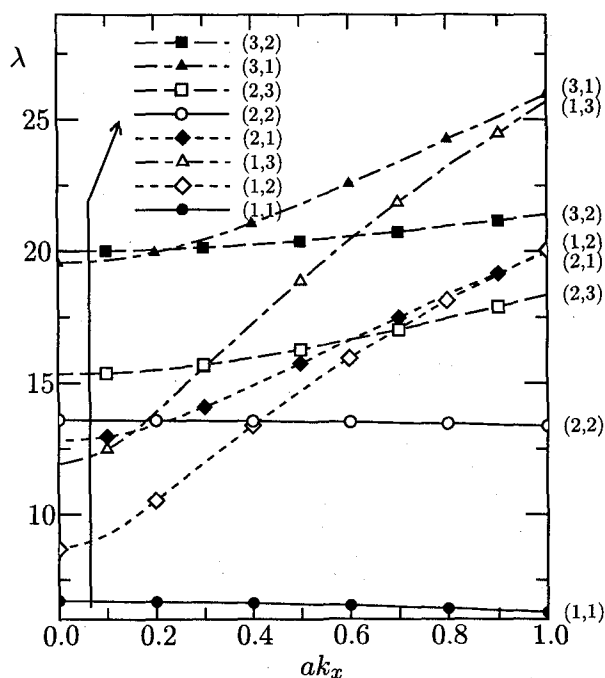


図-7 積層偏平 H.P. シェルの固有値曲線

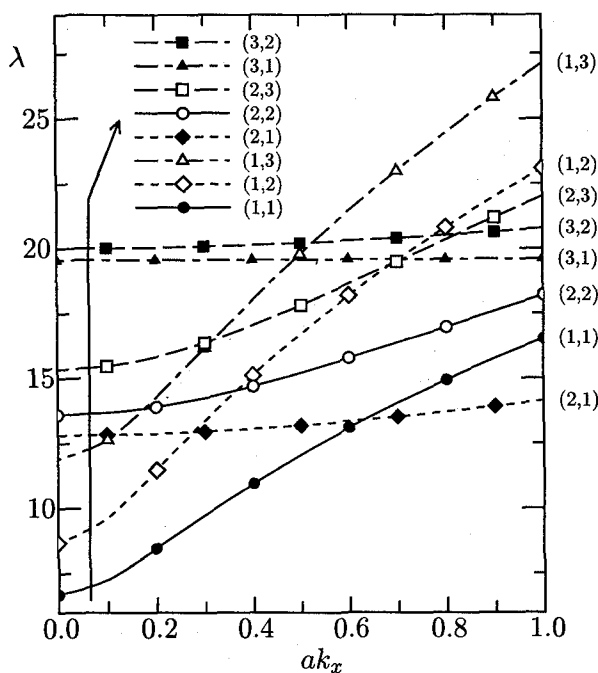


図-6 積層偏平 C. シェルの固有値曲線

4.3 積層数および積層順序の影響

次に、積層数および積層順序が自由振動特性に与える影響を調べるため、四辺単純（ローラー）支持された積層偏平 E.P. シェルに関して、 $[0/90]$ 、 $[0/90/0]$ 、 $[0/90/90/0]$ 、 $[0/90/0/90]$ の 2~4 層の場合の固有値曲線をそれぞれ図-8、9 に示す。

図-8 は、振動モード (1,1)、(2,2) の固有値曲線である。(1,1) の振動モードでは、積層数および積層順序に影響を受けないが、(2,2) の振動モードでは逆対称積層

($[0/90]$ 、 $[0/90/0/90]$) の固有値が小さくなり、積層数を多くすると固有値も大きくなる。しかしながら、対称積層 ($[0/90/0]$ 、 $[0/90/90/0]$) では、積層数の影響はあまり受けないようである。

図-9 は、曲率の変化にともなって著しく固有値が変化した振動モード (1,2)、(1,3) の固有値曲線である。対称積層より逆対称積層の固有値の方がほとんどの場合大きく、また積層数を多くすると固有値も一般的に大きくなる。しかしながら、3 層 ($[0/90/0]$) の場合は、曲率が小さい範囲 ($ak_x \leq 0.4$) では固有値は最も小さいが、曲率を大きくすると、他の積層構造より固有値も大きくなる傾向がある。

これらの図より、対称積層においては、カップリング剛性 (B_{ij}) が 0 となるためカップリング効果が無く、(1,1)、(2,2) などの対称なモードが発現しやすく、逆に逆対称積層においては、カップリング効果により、(1,2)、(1,3) などのモードが発現しやすい傾向にあると考えられる。

4.4 境界条件の影響

最後に、境界条件が自由振動特性に与える影響を調べるため、3 層 $[0/90/0]$ の積層偏平シェルに関して、境界条件を四辺単純（ローラー）支持 (SSr)、四辺単純（ピン）支持 (SSp)、対辺単純支持他対辺固定支持 (SC) および四辺固定支持 (CC) とし、3 つの形状 (E.P., C., H.P.) の場合の 1 次の固有値曲線をそれぞれ図-10 ~ 12 に示す。

図-10 は、積層偏平 E.P. シェルの固有値曲線である。SSp については、板 ($ak_x = 0.0$) の場合の固有値

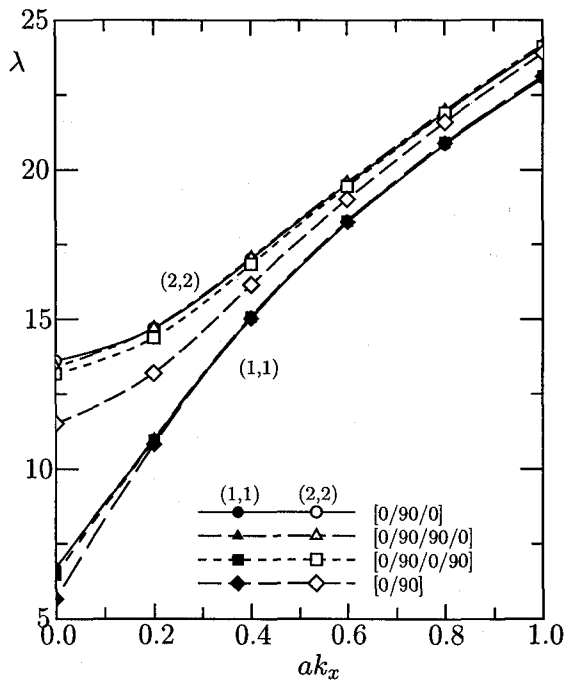


図-8 積層偏平 E.P. シェルの (1,1), (2,2) の固有値曲線

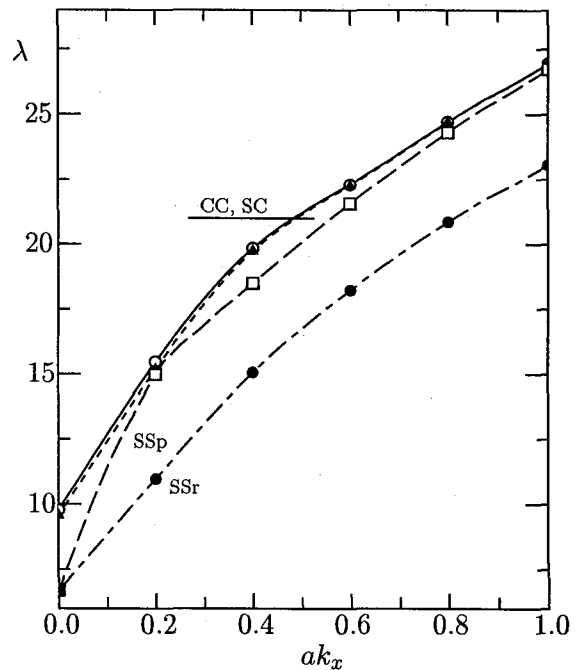


図-10 積層偏平 E.P. シェルの境界条件の影響

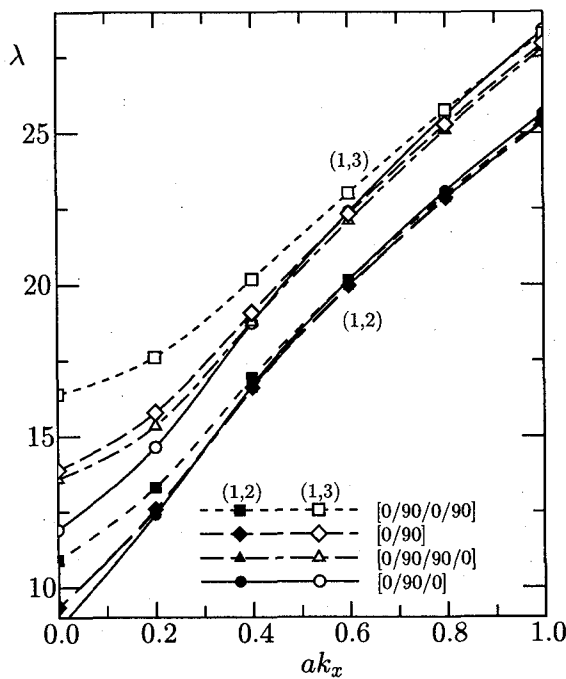


図-9 積層偏平 E.P. シェルの (1,2), (1,3) の固有値曲線

は SSr と一致するが、曲率を大きくすると固有値は急激に大きくなり、SC および CC の固有値曲線に近づいていく。これは、1 次の振動モードが (1,1) から (1,2), (2,2) へ変化するためと考えられる。また、SC と CC の固有値曲線にあまり変化は見られない。

図-11 は、積層偏平 C. シェルの固有値曲線である。SSp については、曲率を大きくすると E.P. シェルの場合と同様に固有値は急激に大きくなる。これは、1 次の振動モードが (1,1) から (2,1) へ変化するためである。

しかしながらその後の振動モードに変化はなく、SSr と SC および CC の中間的な固有値曲線となる。

図-12 は、積層偏平 H.P. シェルの固有値曲線である。曲率を大きくすると、SSr は (1,1) の振動モードのままで固有値が低下するのに対し、その他の場合は、(2,2) の振動モードとなり、固有値は急激に大きくなる。

これらの図より、面内変位拘束および回転拘束の影響により、曲率を大きくすると、(1,1) の振動モードよりも (1,2), (2,1) あるいは (2,2) などの振動モードが発現しやすくなる傾向がある。この振動モードの発現の変化により 1 次の固有値が大きくなるものと考えられる。

5. まとめ

本研究では、積層偏平シェルの自由振動問題の一解析手法として、グリーン関数を用いた固有値解析法を提示した。本解析法は、煩雑な試行錯誤法によらず、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により、積層偏平シェルの基礎微分方程式の離散解を求め、これに基づき離散化されたグリーン関数が得られ、このグリーン関数を用いて運動方程式を積分方程式に変換し、これに数値積分を適用した固有値解析法である。

本解析法を用いて、任意の境界条件および曲面形状を持つクロスプライ積層偏平シェルの自由振動特性を明らかにするために、曲率、積層数、積層順序および境界条件などをパラメータとした自由振動解析を行った。数値解析結果から積層偏平シェルの自由振動特性は以下のよ

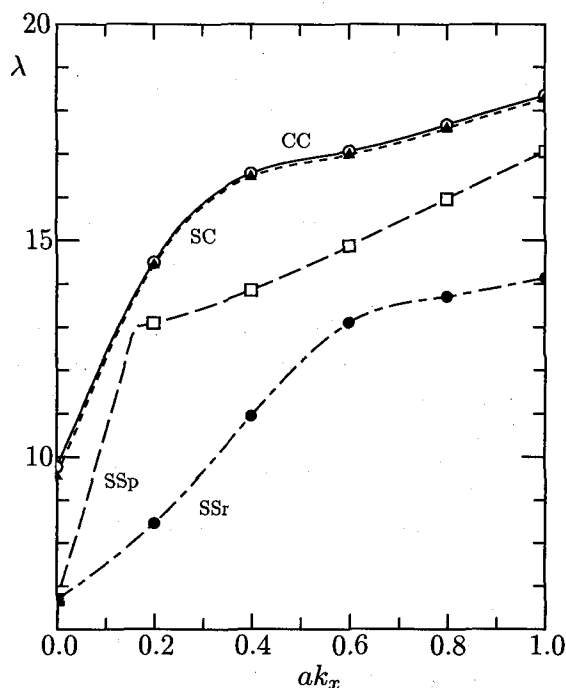


図-11 積層偏平 C. シェルの境界条件の影響

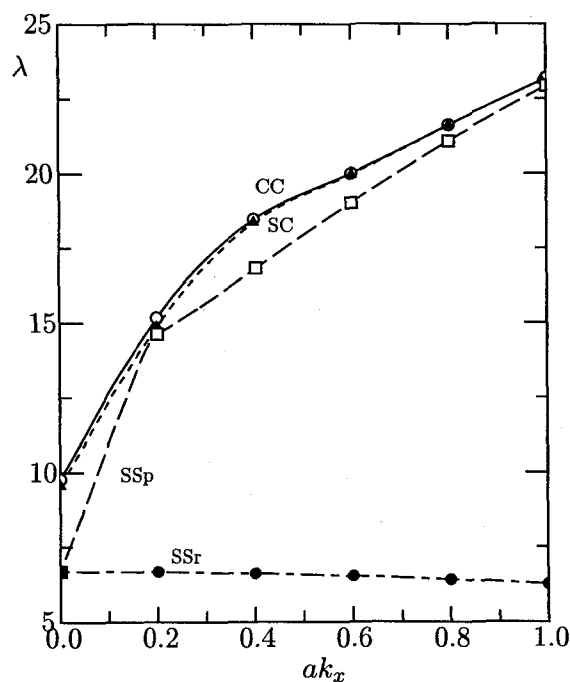


図-12 積層偏平 H.P. シェルの境界条件の影響

うにまとめられる。

1) 本解析法による解析結果と、限られた境界条件の場合にのみ得られる厳密解との比較により、本解析法による数値解は、一様に収束性を持つこと、また、8~12分割程度の比較的粗い分割による解析においても、実用上、十分の精度をもつ解が得られていることなどが確認された。

2) 曲率の影響に関しては、積層偏平 E.P. シェルの場合、曲率の増加とともにすべての固有値は増加するが、

C. シェルおよび H.P. シェルの場合は振動モードによって増加しないものもある。また、(1,2), (1,3) などの振動モードは、板の場合は発現しやすいが、曲率を付けることにより発現しにくくなる。

3) 積層数および積層順序の影響は、振動モードによって異なってくる。(2,2) の振動モードでは逆対称積層の固有値が小さくなり、積層数を多くすると固有値も大きくなるが、対称積層では、積層数の影響はあまり受けない。(1,2), (1,3) の振動モードでは、対称積層より逆対称積層の固有値の方がほとんどの場合大きく、また積層数を多くすると固有値も一般的に大きくなる。

4) 1 次の固有値に関する境界条件の影響は、形状によって異なってくる。どの形状においても、四辺固定支持の場合が最も固有値は大きく、対辺単純支持他対辺固定支持の固有値もあまり変わらない。四辺単純(ピン)支持の場合は、振動モードの発現順序により変り、2 曲面を持つ形状(E.P., H.P.) の場合は、曲率を大きくすると(2,2) の振動モードとなるため固有値は大きくなり対辺単純支持他対辺固定支持の固有値に近づいていく。1 曲面のみを持つ形状(C.) の場合は、(2,1) の振動モードとなるため固有値はあまり大きくならない。

以上のように、積層構造あるいはシェル構造にすることにより、等質・等方性のものでは得られない自由振動特性を明らかにした。積層の効果と曲率の効果が相乗されることにより、振動モードの発現順序を変えることができるため、特定の振動モードを抑えることが可能である。このことを利用して、構造物に不利な振動を受ける箇所を積層構造あるいはわずかに曲率を付けることなどにより、構造物の耐風安定性などを高めることができるものと思われる。

最後に、本研究を進めるに際して、数値計算を行って戴いた当大学 4 年生、松田総司君、村山利宏君に謝意を表わします。なお、本研究は平成 9 年度文部省科学研究費(奨励研究 A)の補助の一部で行われたことを付記し、ここに謝意を表わします。

付録 I

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}s^4, \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2, \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}c^4, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 + s^4), \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2, \quad \bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})cs, \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44}s^2 + Q_{55}c^2, \quad c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta, \\ Q_{11} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \quad Q_{22} = E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ Q_{12} &= \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \quad Q_{66} = G_{12}, \\ Q_{44} &= G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}\end{aligned}$$

参考文献

- 1) 福田 博・邊 吾一：複合材料の力学序説，古今書院，1989.
- 2) Reddy,J.N. : Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method, Journal of Sound and Vibration, Vol.66, pp.565-576, 1979.
- 3) Khdeir,A.A. : Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including various boundary conditions, Journal of Sound and Vibration, Vol.122, pp.377-388, 1988.
- 4) 芳村 仁・三上 隆・朴 勝振：逆対称アングル・プライ積層板の自由振動解析，構造工学論文集，Vol.37A, pp.911-919, 1991.
- 5) 水澤富作・鬼頭博史：高次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法を用いた積層複合板の振動解析について，構造工学論文集，Vol.40A, pp.71-83, 1994.
- 6) Soldatos,K.P. : A comparison of some shell theories used for the dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylindrical panels, Journal of Sound and Vibration, Vol.97, pp.305-319, 1984.
- 7) Carrera,E. : The effects of shear deformation and curvature on buckling and vibrations of cross-ply laminated composite shells, Journal of Sound and Vibration, Vol.150, pp.405-433, 1991.
- 8) 水澤富作・鬼頭博史：繊維強化型クロス・プライ積層円筒パネルの振動解析へのスプライン帯板法の適用について，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第18巻，pp.337-342, 1994.
- 9) Sakiyama,T. and Matsuda,H. : Free vibration of rectangular mindlin plate with mixed boundary conditions, Journal of Sound and Vibration, Vol.113, pp.208-214, 1987.
- 10) Sakiyama,T. and Matsuda,H. : Elastic buckling of rectangular mindlin plate with mixed boundary conditions, Computers & Structures, Vol.25, pp.801-808, 1987.
- 11) 崎山 毅・松田 浩：変厚矩形板の曲げの一解析法，土木学会論文報告集，第338号，pp.21-28, 1983.
- 12) 鈴木勝義・山田 元・成田吉弘・齋藤 俊：シェルの振動入門，コロナ社，1996.
- 13) Salvadri,M. : Numerical computation of buckling loads by finite differences, Transactions ASCE, Vol.116, pp.590-636, 1951.

(1997年9月26日受付)