

Spline Layer 法を用いた 扇形厚板の自由振動解析

VIBRATION OF ANNULAR SECTOR THICK PLATES BY USING THE SPLINE LAYER METHOD

水澤富作*, 田中宏明**

Tomisaku MIZUSAWA and Hiroaki TANAKA

*工博 大同工業大学教授 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)

** 大同工業大学 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)

This paper presents application of the spline layer method which is a semi-analytical model based on the three-dimensional elasticity theory to analyse vibration of thick, annular sector plates.

To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and the results are compared with those obtained by other numerical methods. Stable convergence and good accuracy are obtained using the higher-order spline layer models. The effects of thickness ratio, sector angle, radii ratio on the frequencies of annular sector plates are investigated.

Key Words : spline layer method, annular sector thick plate, vibration, 3D-elasticity theory

1. まえがき

構造物の大型化や重量化に伴いかなり極厚な平板が用いられ、また曲線スラブ橋やタンクの底板などに扇形厚板が採用されるので、このような構造要素の構造解析が設計上重要になっている。極厚板では、薄板理論では無視される横せん断変形、回転慣性や板厚方向のひずみ（応力）成分の影響が顕著に生じてくる。また、境界面で導入される境界条件を厳密に考慮する必要がある。これまでも、3次元弾性理論に基づく解析的手法¹⁾、選点法²⁾、Rayleigh-Ritz法³⁾、有限要素法や節点プリズム法⁴⁾などの数値解析法を用いて、長方形厚板の振動解析や応力解析が行われている。しかしながら、これらの解析法では、境界条件の制約、計算コストや解析精度などに問題点が見受けられる。

一方、扇形厚板は長方形板と比較して、その構造特性により非対称な力学的性状を示す。これまでに薄板理論やMindlin板理論を用いた扇形板の振動解析や応力解析が報告されているが⁵⁾、3次元弾性理論に基づく研究は非常に少ないように思われる。また、有限要素法の欠点である未知数の増大を低減する手法として、ZienkiewiczとTooら⁶⁾は、アイソパラメトリック要素の離散化概念と一次元方向に変位をフーリエ級数展開し、関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値

解析法である有限プリズム法 (Finite Prism Method) を提案し、曲線ばりや厚肉曲線箱桁橋の応力解析に適用している。また、Cheungら⁷⁾や水澤ら⁸⁾は、この有限プリズム法を用いて扇形厚板の振動解析を行っている。高木ら⁹⁾は有限プリズム法と同様な離散化概念に基づくSpline Prism法を用いて扇形厚板の3次元解析を行い、数値安定性の高い解析結果を得ている。また、2方向の変位関数を固有関数でフーリエ級数展開して求められる層状要素で離散化する有限レイヤー法¹⁰⁾も提案されているが、扇形板では固有関数の直交性が得られなくなり、また境界条件の導入に大きな制限が生じてくる。

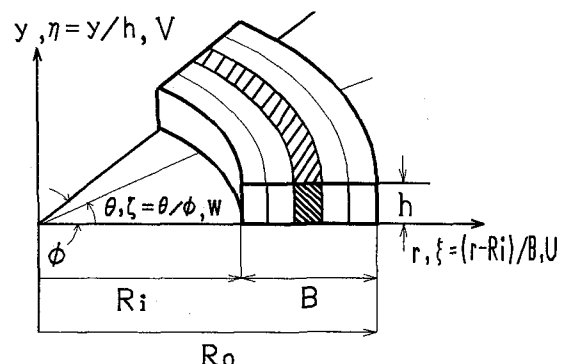


Fig. 1 Spline layer element and coordinate systems

本研究では、3次元弾性理論に基づくSpline Layer法を用いて、扇形厚板の振動解析を行っている。この方法は、一方向に固有関数を仮定し、他の2方向にB-spline関数を用いた3次元の層状要素であり、スプライン関数の高次の連続性と補間特性を利用したモデルである。本手法の解析精度や収束性に与えるスプライン次数やレイヤー要素の分割数の影響について検討した。また、円周方向の境界面で任意の境界条件を持つ扇形厚板の振動特性に与える幅厚比、中心角、半径比などの影響についても明らかにしている。

2. 解析手法

3次元弾性理論とポテンシャルエネルギー最小化原理を用いて、Fig. 1に示すような半径方向に層状に分割するレイヤー離散化要素モデルを導く。このSpline Layer法は、2方向の変位にB-spline関数を仮定し、他の一方向に変位をフーリエ級数展開し、固有関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である。本手法では、厚さ方向には要素分割を行わないが、円周方向の境界面に任意の境界条件が導入でき、またプリズム離散化要素モデル¹⁾と比較しても系の未知数を大幅に低減できる特徴を有している。

式の定式化にあたり、次式で表される無次元極座標系を用いる。

$$\xi = (r - R_i) / B, \quad \eta = y / h, \quad \zeta = \theta / \phi \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $B = R_o - R_i$, $\delta = R_o / R_i$, B は扇形板の幅, h は厚さ, ϕ は中心角, r は半径であり、また R_i と R_o はそれぞれ扇形板の内径と外径を示す。

レイヤー要素で仮定される ξ , η , ζ 方向の変位関数, U, V, W は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^k A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} Z_i(\zeta) \\ &= \sum_{i=1}^R [N]_{mn} Z_i(\zeta) \{\delta_A\}_i \\ V &= \sum_{i=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^k B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} Z_i(\zeta) \\ &= \sum_{i=1}^R [N]_{mn} Z_i(\zeta) \{\delta_B\}_i \\ W &= \sum_{i=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^k C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} \overline{Z}_i(\zeta) \\ &= \sum_{i=1}^R [N]_{mn} \overline{Z}_i(\zeta) \{\delta_C\}_i \quad \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

ここで、 $i_r = k - 1 + M_r$, $Z_i(\zeta)$ と $\overline{Z}_i(\zeta)$ は、それぞれ

半径方向の支持辺で与えられた境界条件を満たした固有関数である。また、 $k-1$ はB-spline関数のスプライン次数, M_r は r 方向のレイヤー要素の分割数であり, R は固有関数の級数の項数である。

式(2)で仮定した $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、正規化されたB-spline関数である。局所的な基底関数で表されるB-spline関数は¹³⁾, 切断べき関数の差分商で定義される区分的多項式であり、 $k-2$ 次までの導関数の連続性が保証されている。また、局所的な基底関数の性質により、数値的に安定性が高い関数である。なお、B-spline関数の代数学的特徴は、Boor¹³⁾や水澤ら¹⁴⁾の論文に詳しく述べられているので、ここでは省略する。

したがって、式(2)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = \sum_{i=1}^R [S]_{mn} \{\Delta\}_i \quad \dots \dots \dots (3)$$

ただし、 $\{d\} = \{U, V, W\}^T$, $\{\Delta\}_i = \{\{\delta_A\}_i, \{\delta_B\}_i, \{\delta_C\}_i\}^T$ であり、 $[S]_{mn}$ は、次式で表される。

$$[S]_{mn} = \begin{bmatrix} [N]_{mn} Z_i(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{mn} Z_i(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & \overline{[N]_{mn} Z_i(\zeta)} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (4)$$

次に、3次元弾性理論で定義される垂直ひずみ及びせん断ひずみを円筒座標系で表せば、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\phi \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta\phi} \\ \gamma_{\phi r} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &\partial U / \partial \xi \\ &(B/h) (\partial V / \partial \eta) \\ &\{U / (\xi + R_i/B) + (1/\xi + R_i/B) (1/\phi) \partial W / \partial \zeta\} \\ &\{\partial V / \partial \xi + (B/h) \partial u / \partial \eta\} \\ &\{\partial W / \partial \xi - w / (\xi + R_i/B) \\ &\quad + (1/\xi + R_i/B) (1/\phi) \partial U / \partial \zeta\} \\ &\{1 / (\xi + R_i/B) (1/\phi) (\partial V / \partial \zeta) \\ &\quad + (B/h) (\partial W / \partial \eta)\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

また、式(2)を式(5)に代入すれば、次式の関係式で表される。

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^R [B]_{mn} \{\Delta\}_i \quad \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 $[B]_{mn}$ はひずみマトリックスである。等方性、等質な扇形板の構成式は次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad \dots\dots (7)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}, \tau_{\phi\theta}, \tau_{\theta\phi}\}$ ，
また弾性マトリックスは、次式で示される。

$$[D] = D_0 \begin{bmatrix} 1 & D_1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & 1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & D_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (8)$$

ただし、 $D_1 = \nu/(1-\nu)$ ， $D_2 = (1-2\nu)/(2(1-\nu))$ ，
 $D_0 = E(1-\nu)/(1+\nu)/(1-2\nu)$ であり、 E はヤング係数、
 ν はポアソン比である。

したがって、等厚、等方性な扇形厚板のひずみエネルギー、 U_p と運動エネルギー、 T は、それぞれ次式で与えられる。

$$U_p = (B^2 h \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\tau} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} d\xi d\eta d\zeta \quad \dots\dots (9)$$

$$= (1/2) \sum_{\ell=1}^R \sum_{s=1}^Q \{\Delta\}_\ell [K]_{\ell s} \{\Delta\}_s \quad \dots\dots (9)$$

$$T = (\rho \omega^2 B^2 h \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\tau} \{U^2 + V^2 + W^2\} \{\xi + 1/(\delta-1)\} d\xi d\eta d\zeta \quad \dots\dots (10)$$

$$= (\omega^2 / 2) \sum_{\ell=1}^R \sum_{s=1}^Q \{\Delta\}_\ell [M]_{\ell s} \{\Delta\}_s \quad \dots\dots (10)$$

ここで、 $[K]_{\ell s}$ と $[M]_{\ell s}$ はそれぞれ剛性マトリックスと質量マトリックスであり、次式で与えられる。

$$[K]_{\ell s} = (B^2 h \phi) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\tau} [B]_{mn}^T [D] [B]_{ij} x \{\xi + 1/(\delta-1)\} d\xi d\eta d\zeta \quad \dots\dots (11)$$

$$[M]_{\ell s} = (\rho B^2 h \phi) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\tau} [S]_{mn} [S]_{ij} x \{\xi + 1/(\delta-1)\} d\xi d\eta d\zeta \quad \dots\dots (12)$$

ただし、 ρ は扇形板の密度であり、 ω は円振動数 (rad/sec)である。

いま、2つの相対する円弧辺の境界面 ($\xi = \xi_{ic}$) で任意の幾何学的境界条件を考慮するため、仮想バネ法を用いる。すなわち、 $\xi = \xi_{ic}$ の境界面で、それぞれ変位 U, V, W に対応する仮想バネ係数、 α, β, γ を導入すれば、これらのバネによるひずみエネルギー、 U_b は、次式で与えられる。

$$U_b = (h \phi / 2) \sum_{ic=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 \{\alpha U^2 + \beta V^2 + \gamma W^2\} d\eta d\zeta \quad \dots\dots (13)$$

$$+ \gamma W^2\} d\eta d\zeta \mid \xi = \xi_{ic} \quad \dots\dots (13)$$

ただし、 N_c は境界辺の数である。
したがって、扇形厚板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は、

$$\Pi = U_p + U_b - T \quad \dots\dots (14)$$

で与えられる。ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いると、次式の基礎方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_\ell = \sum_{s=1}^Q \sum_{\ell=1}^R ([K]_{\ell s} \{\Delta\}_s - \omega^2 [M]_{\ell s} \{\Delta\}_s) = 0 \quad \dots\dots (15)$$

剛性マトリックス $[K]_{\ell s}$ と質量マトリックス $[M]_{\ell s}$ は、次式のようなサブマトリックスから構成されている。

$$[K]_{\ell s} = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] \end{bmatrix}_{\ell s}$$

$$[M]_{\ell s} = \begin{bmatrix} [M_{uu}] & 0 & 0 \\ 0 & [M_{vv}] & 0 \\ 0 & 0 & [M_{ww}] \end{bmatrix}_{\ell s} \quad \dots\dots (16)$$

これらのサブマトリックス $[K_{ij}]$ と $[M_{ij}]$ は、Appendixに示してある。

ここで、半径方向の支持辺がダイヤフラムタイプの単純支持条件 ($\zeta=0, 1$; $U=V=\partial W/\partial \zeta=0$)を仮定すれば、この場合の固有関数は、それぞれ次式で与えられる。

$$Z_\ell(\zeta) = \sin(\ell \pi \zeta),$$

$$\bar{Z}_\ell(\zeta) = \cos(\ell \pi \zeta); \ell=1, 2, \dots, R \quad \dots\dots (17)$$

したがって、これらの固有関数の直交性により、級数の連成項が消えるので、式(15)は、次式のようにになる。

$$\sum_{\ell=1}^R ([K]_{\ell \ell} - \omega^2 [M]_{\ell \ell}) \{\Delta\}_\ell = 0 \quad \dots\dots (18)$$

ここで、 $[K]_{\ell \ell}$ と $[M]_{\ell \ell}$ の大きさは、 $3 \times k \times (k-1+Mr)$ である。 $k-1$ はスプライン次数であり、 Mr はレイヤー要素の分割数である。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、扇形厚板の振動解析への本手法の適用性を示すために、半径方向の支持辺で単純支持され、他の円弧辺が任意の境界条件をもつ扇形板の振動解析を行い、解の収束性や精度に与えるスプライン次数とレイヤー要素の分割数の影響について検討する。また、扇形厚板の振動特性に与える幅厚比 B/h 、中心角 ϕ や半径比 R_o/R_i などの影響について示す。ただし、計算結果は振動数パラメータ、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ を用いて表している。ここで、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ は板の曲げ剛性である。さらに、扇形板の境界条件はSS-CFのように表し、それぞれ半径方向の2つの直線辺が単純支持(S)され、また内径の境界面が固定(C)され、外径の境界面が自由(F)に

相当している。

Table 1には、 相対する2つの円弧辺が自由である扇形板($R_o/R_i=2.0$, $B/h=10$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.3$)の振動数パラメータ, $n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与えるスプライン次数, $k-1$ とレイヤー要素の分割数, M_r の影響が示してある。ここで、スプライン次数は2次と3次を用い、レイヤー要素の分割数は2から12まで変化させている。また比較のために、Spline Prism法 (SPM) を用いて求めた高木らの数値解¹⁾、Mindlin板理論 (MPT) に基づくスプライン帯板法による解¹¹⁾と薄板理論 (TPT) で求められ

た値¹²⁾が示してある。

これより、レイヤー要素の分割数を増大させると、高次の振動数まで一定値への一様な収束状態が得られ、スプライン次数を高めると少ない分割数でも安定した収束値が得られている。また、本手法で得られた値は他の数値解と非常によく一致した結果を示しているが、高次の振動数では、横せん断変形の影響を無視した薄板理論の値とかなり異なっている。

Table 2は、 相対する円弧面で異なった境界条件を持

Table 1. Convergence study of frequency parameters, $n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ of annular sector plate: SS-FF, $R_o/R_i=2.0$, $B/h=10$ and $\phi=45^\circ$

k-1	Mr	Order of matrix	Modes							
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
2	2	36	5.215	16.54	19.76	37.43	38.24	41.31	42.77	67.96
	4	54	5.205	16.21	19.70	34.99	37.12	41.12	41.47	63.42
	6	72	5.199	16.12	19.66	34.28	37.09	41.02	41.27	62.08
	8	90	5.195	16.10	19.64	34.11	37.08	40.96	41.22	61.80
	10	108	5.193	16.08	19.63	34.05	37.08	40.93	41.19	61.71
	12	126	5.192	16.08	19.62	34.02	37.08	40.92	41.18	61.67
3	2	60	5.202	16.17	19.64	34.87	37.13	40.86	41.16	63.86
	4	84	5.190	16.05	19.57	33.99	37.08	40.71	40.97	61.36
	6	108	5.186	16.02	19.55	33.83	37.08	40.64	40.92	61.10
	8	132	5.185	16.02	19.54	33.79	37.08	40.62	40.91	61.05
	10	156	5.184	16.01	19.54	33.78	37.08	40.61	40.90	61.04
	12	180	5.184	16.01	19.54	33.77	37.08	40.61	40.90	61.03
SPM[9]			5.184	16.01	19.54	33.77	37.08	-	-	-
MPT[11]			5.182	15.99	19.51	33.70	-	-	-	-
TPT[12]			5.267	16.68	20.40	36.60	-	44.03	44.23	68.64

SPM=Spline Prism Method, MPT=Mindlin Plate Theory and TPT=Thin Plate Thoery.

Table 2. Comparison study of frequency parameters, $n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ of annular sector thick plates: $R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$, $k-1=3$ and $M_r=12$

Boundary conditions		B/h	1st	2nd	Modes 3rd	4th	5th	6th
SS-FF	10	SPM[9]	5.184	16.01	19.54	33.77	37.08	40.61
			5.184	16.01	19.54	33.77	37.08	-
	5	SPM[9]	5.021	14.71	17.80	18.54	29.12	34.55
			5.021	14.71	17.80	18.54	29.11	-
	2.5	SPM[9]	4.552	9.269	11.76	14.07	18.58	21.09
			4.551	9.269	11.75	14.05	18.58	-
	1.0	SPM[9]	3.133	3.716	5.970	7.315	7.683	8.648
			3.133	3.716	5.966	7.315	7.679	-
	10	SPM[9]	24.98	40.77	58.17	67.07	73.45	99.16
			24.98	40.76	58.16	67.07	73.44	-
SS-CC	5	SPM[9]	21.12	33.76	44.27	50.91	52.65	55.46
			21.11	33.76	44.25	50.91	52.65	-
	2.5	SPM[9]	14.83	23.29	25.46	27.76	29.11	34.33
			14.81	23.27	25.45	27.71	29.11	-
	1.0	SPM[9]	7.369	9.898	11.31	11.29	11.82	12.84
			7.339	9.885	11.25	11.30	11.81	-
SS-SS	10		16.60	35.50	43.93	49.81	62.57	63.62
	5		15.38	24.91	30.83	37.21	46.87	48.15
	2.5		12.46	12.47	22.41	23.44	24.08	26.14
	1.0		4.985	7.012	8.160	9.376	9.617	10.32

つ極厚扇形板 ($R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.3$) の振動数パラメータ, $n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ の精度比較を示している。ここで、幅厚比, B/h を10から1.0まで変化させている。また、比較のために、144のプリズム要素を用いて離散化したSpline Prism法 (SPM) による数値解も示してある。ただし、Spline Layer法では、12のレイヤー要素で分割し、スプライン次数を $k-1=3$ に仮定している。

これより、両者の結果が低次の振動数から高次の振動数まで良く一致している。Spline Prism法の未知数は675になるが、本手法の未知数は180になるので、本手法を用いればかなり少ない未知数で精度の高い解析

結果が得られる。

次に、本手法の適用範囲を確認するために、薄い扇形板 ($\phi=45^\circ$, $\nu=0.3$) の振動解析の結果がTable 3に示してある。ここで、 R_o/R_i は2.0と4.0に仮定し、 B/h は100を用いている。また、比較のために、Kimら¹²⁾ のRayleigh-Ritz法により求められた結果と水澤らのスプライン帯板法による値¹¹⁾ が示してある。

これより、境界条件や半径比の変化にかかわらず、薄板理論による値とよく一致した結果が得られており、薄い扇形板から極厚扇形板を統一的に精度の高い解析が可能である。

Table 3. Comparison of accuracy of the frequency parameters, $n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ of annular sector thin plates: $\phi=45^\circ$, $B/h=100.0$, $k-1=3$ and $Mr=12$

Boundary conditions		Ro/Ri	Modes					
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
SS-CC	Kim et al. [12]	2.0	26.97	44.74	67.53	76.44	86.69	121.8
		4.0	40.26	84.86	94.61	146.6	158.6	170.7
	Mizusawa et al. [11]	2.0	26.89	44.71	67.37	76.46	86.62	119.1
		4.0	40.21	84.79	94.64	146.6	158.8	171.0
SS-SS	Kim et al. [12]	2.0	17.09	37.72	47.36	69.51	70.81	96.74
		4.0	32.09	69.96	83.54	122.6	143.9	156.0
	Mizusawa et al. [11]	2.0	17.10	37.75	47.40	69.60	70.90	96.91
		4.0	32.11	70.04	83.66	122.9	144.3	156.4
SS-FF	Kim et al. [12]	2.0	5.264	16.67	20.38	36.53	43.97	44.17
		4.0	12.26	41.05	45.89	78.23	98.81	102.0
	Mizusawa et al. [11]	2.0	5.267	16.68	20.40	36.60	44.03	44.23
		4.0	12.27	41.10	45.96	78.36	99.07	102.3

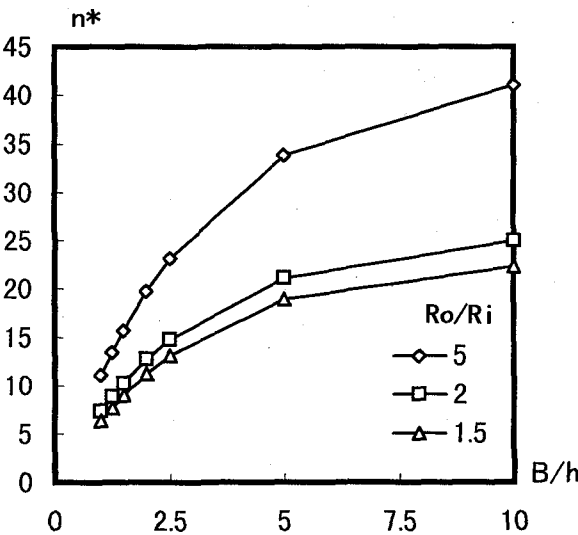


Fig. 2 The effect of radii ratio and thickness ratio on the lowest frequency parameters of annular sector thick plates: SS-CC, $\phi=45^\circ$ and $\nu=0.3$

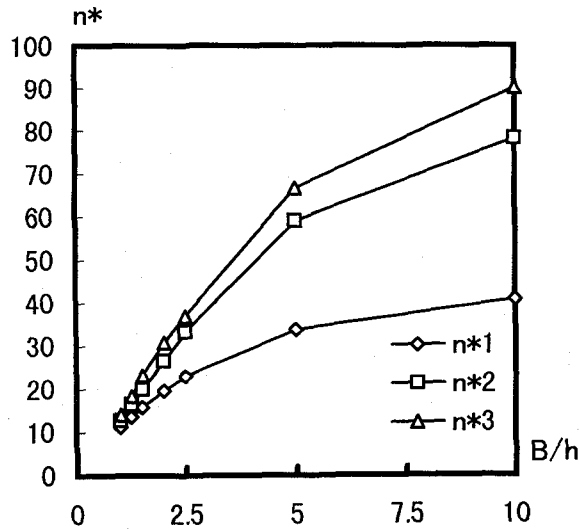


Fig. 3 The effect of thickness ratio on the first three frequency parameters of annular sector thick plates: SS-CC, $\phi=45^\circ$, $R_o/R_i=2.0$ and $\nu=0.3$

Table 4とTable 5には、それぞれ相対する2つの円弧辺が固定された場合 (SS-CC) と自由の場合 (SS-FF) について、扇形厚板の7次までの振動数パラメータ, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ に与える中心角 ϕ , 半径比, R_o/R_i と幅厚比, B/h の影響が示されている。ただし、 ϕ は 30° , 45° , 60° にとり、 R_o/R_i は 5.0, 2.0, 1.5 に変化させている。また、 B/h は 10, 5, 2.5 に仮定している。また、Fig. 2には、扇形厚板 (SS-CC, $\phi=45^\circ$) の固有振動数パラメータ, n^* に与える幅厚比と半径比の影響が示されている。Fig. 3には、振動次数によって扇形厚板 (SS-CC, $\phi=45^\circ$, $R_o/R_i=2.0$) の振動数パラメータが幅厚比によりどのような影

響を受けるかを示したものである。

これらの図と表より、扇形厚板の振動数パラメータは幅厚比や半径比の変化に大きく影響を受ける。半径比の大きい扇形板の振動数パラメータでは、幅厚比の影響が顕著に現れ、幅厚比が小さいほどその影響が顕著に見られる。また、低次の振動数よりも、高次の振動数が幅厚比の影響を大きく受ける。扇形板の幅厚比が5を越えると、横せん断変形、回転慣性や厚さ方向の影響が大きく現れ、また低次の振動数に曲げモードと同時にせん断変形を伴うモードが生じるので、薄板理論や一次せん断変形板理論を適用する場合に注意が必要である。

Table 4. The effects of sector angle, radii ratio and thickness ratio on the frequency parameters, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ of annular sector thick plates with the boundray condition of SS-CC: $k=1=4$ and $M_r=12$

ϕ ($^\circ$)	R_o/R_i	B/h	Modes						
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
30	5.0	10	64.09	107.6	148.4	153.7	173.6	202.6	217.2
		5	50.09	77.84	86.82	102.4	105.0	108.4	126.9
		2.5	32.39	43.38	47.10	52.97	58.99	59.89	60.88
	2.0	10	31.25	64.34	67.07	106.9	119.1	139.4	142.9
		5	26.28	48.86	52.65	59.59	71.37	73.58	75.11
		2.5	18.48	29.82	30.84	35.43	44.66	44.89	45.12
	1.5	10	24.16	36.53	57.22	58.84	88.16	89.12	99.71
		5	20.44	30.47	43.53	49.87	55.69	65.34	66.19
		2.5	14.30	21.26	24.91	27.20	27.87	31.25	32.76
45	5.0	10	41.03	78.31	90.18	121.9	133.2	139.7	166.4
		5	33.89	59.14	66.66	67.17	83.14	85.70	102.4
		2.5	23.13	33.33	37.05	41.24	41.65	50.52	52.62
	2.0	10	24.98	40.77	58.17	100.2	101.1	101.7	115.2
		5	21.12	33.76	44.27	50.91	52.65	58.28	68.63
		2.5	14.83	23.29	25.46	27.76	29.11	34.19	34.93
	1.5	10	22.30	27.09	36.53	50.22	55.22	60.10	67.98
		5	18.94	22.85	30.47	41.47	42.05	45.67	51.98
		2.5	13.19	16.07	20.73	21.26	26.13	27.15	27.76
60	5.0	10	31.53	64.09	66.71	104.1	110.1	112.9	141.5
		5	26.62	50.09	51.01	56.51	70.70	75.88	77.84
		2.5	18.70	28.27	32.35	32.39	35.22	46.25	46.31
	2.0	10	23.06	31.25	46.57	56.12	79.13	89.77	99.17
		5	19.53	26.28	38.13	42.72	44.91	52.65	55.36
		2.5	13.64	18.48	22.45	25.93	26.66	27.71	30.84
	1.5	10	21.70	24.16	29.00	36.53	46.60	54.53	58.84
		5	18.47	20.44	24.41	30.47	37.82	38.20	41.54
		2.5	12.86	14.30	17.18	18.91	21.26	25.75	26.06

Table 5. The effects of sector angle, radii ratio and thickness ratio on the frequency parameters, $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ of annular sector thick plates with the boundary condition of SS-FF: $k=1$ and $M_r=12$

ϕ (°)	Ro/Ri	B/h	Modes						
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
30	5.0	10	28.52	69.05	94.74	109.8	111.9	158.0	160.8
		5	25.17	54.78	54.87	71.56	82.27	86.29	101.4
		2.5	18.84	27.40	35.22	42.68	44.61	46.74	50.42
	2.0	10	11.44	27.31	40.61	45.79	63.94	72.05	76.25
		5	10.77	24.20	31.96	34.53	38.14	50.50	56.86
		2.5	9.089	15.98	18.13	24.48	25.23	26.20	30.27
	1.5	10	4.901	12.21	18.69	29.99	32.11	32.93	39.19
		5	4.761	11.33	16.47	17.10	26.24	27.99	33.48
		2.5	4.342	8.232	9.292	13.58	18.05	19.44	20.20
45	5.0	10	13.52	43.23	47.55	76.66	78.81	94.74	97.72
		5	12.61	36.53	38.33	39.66	60.72	61.43	70.61
		2.5	10.45	19.16	25.44	27.47	30.22	35.23	38.08
	2.0	10	5.184	16.01	19.54	33.77	37.08	40.61	40.90
		5	5.021	14.71	17.80	18.54	29.11	34.53	34.79
		2.5	4.551	9.269	11.75	14.05	18.58	21.06	21.74
	1.5	10	2.116	7.620	8.653	17.07	17.77	18.69	25.65
		5	2.085	7.164	8.257	8.533	16.21	17.10	22.90
		2.5	1.985	4.266	6.066	7.180	12.33	12.69	12.80
60	5.0	10	7.768	28.52	31.56	57.39	58.33	62.65	69.05
		5	7.433	25.17	27.62	28.69	47.08	47.37	50.52
		2.5	6.532	14.35	18.84	20.26	23.48	27.40	31.79
	2.0	10	2.824	11.42	11.44	23.02	24.44	27.31	29.07
		5	2.766	10.62	10.77	11.51	21.70	24.20	25.52
		2.5	2.591	5.754	8.748	9.089	14.71	15.98	16.62
	1.5	10	1.121	4.901	5.628	9.872	10.86	12.21	18.69
		5	1.109	4.761	4.936	5.317	10.26	11.33	17.10
		2.5	1.073	2.468	4.342	4.565	8.232	8.713	9.292

4. あとがき

本研究では、扇形厚板の振動解析へのSpline Layer法の適用性について検討し、振動数パラメータに与える幅厚比、半径比や中心角などの影響を明らかにした。本文で得られた主な結果をまとめると、以下ようになる。

- 1) 高次のSpline Layerモデルを用いれば、少ない要素数でも高次の振動数まで安定した収束性と精度の高い解析結果が得られる。
- 2) 従来の2方向に固有関数をフーリエ級数展開する有限レイヤー法と比較して、境界条件の制限を拡大できる
- 3) 幅厚比が減少するに従い振動数パラメータは減少す

るが、その振動数は半径比や境界条件によって大きな影響を受ける。

- 4) 中心角が増大するとともに振動数パラメータが減少し、その影響は2つの相対する円弧辺が自由の場合に大きく表れる。

- 5) 半径比が大きくなるに従い振動数パラメータも増加し、高次の振動モード形状に大きな影響が表れる。

最後に、本文で示した表の値は、有限要素解析のベンチマークテストに使用して頂ければ幸いである。なお、数値計算には大同工業大学情報処理センターを利用させて頂きました。

APPENDIX

式(16)で与えられるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 [K_{uu}] &= (h\phi D_0/B) \left\{ \overset{111}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_1 \right. \\
 &\quad + D_1 \overset{010}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_1 + D_1 \overset{100}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_1 \\
 &\quad + \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_1 + D_2 (B/h)^2 \overset{001}{I_{m1}} \overset{110}{J_{n1}} A_1 \\
 &\quad \left. + D_2 (1/\phi)^2 \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_2 \right\} \\
 [K_{uv}] &= (h\phi D_0/B) \left\{ D_1 (B/h) \overset{101}{I_{m1}} \overset{010}{J_{n1}} A_1 \right. \\
 &\quad + D_1 (B/h) \overset{000}{I_{m1}} \overset{010}{J_{n1}} A_1 \\
 &\quad \left. + D_2 (B/h) \overset{011}{I_{m1}} \overset{100}{J_{n1}} A_1 \right\} \\
 [K_{uw}] &= (h\phi D_0/B) \left\{ D_1 (1/\phi) \overset{100}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_3 \right. \\
 &\quad + (1/\phi) \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_3 \\
 &\quad + D_2 (1/\phi) \overset{010}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_4 + D_2 (1/\phi) \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_4 \\
 &\quad \left. + D_2 (B/h) \overset{011}{I_{m1}} \overset{100}{J_{n1}} A_1 \right\} \\
 [K_{vu}] &= (h\phi D_0/B) \left\{ D_2 (B/h) \overset{011}{I_{m1}} \overset{100}{J_{n1}} A_1 \right. \\
 &\quad + D_1 (B/h) \overset{000}{I_{m1}} \overset{100}{J_{n1}} A_1 + D_2 (B/h) \overset{101}{I_{m1}} \overset{010}{J_{n1}} A_1 \\
 &\quad \left. + D_2 (B/h)^2 \overset{001}{I_{m1}} \overset{110}{J_{n1}} A_1 \right\} \\
 [K_{vv}] &= (h\phi D_0/B) \left\{ (B/h)^2 \overset{001}{I_{m1}} \overset{110}{J_{n1}} A_1 \right. \\
 &\quad + D_2 \overset{111}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_1 + D_2 (1/\phi)^2 \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_2 \\
 &\quad \left. + D_2 (1/\phi) \overset{000}{I_{m1}} \overset{100}{J_{n1}} A_3 \right\} \\
 [K_{vw}] &= (h\phi D_0/B) \left\{ D_1 (B/h) (1/\phi) \overset{000}{I_{m1}} \overset{010}{J_{n1}} A_5 \right. \\
 &\quad + D_2 (1/\phi) (B/h) \overset{000}{I_{m1}} \overset{010}{J_{n1}} A_5 \\
 &\quad \left. + D_2 (1/\phi) \overset{010}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_6 \right\} \\
 [K_{wu}] &= (h\phi D_0/B) \left\{ D_1 (1/\phi) \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_6 \right. \\
 &\quad + (1/\phi) \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_6 + D_2 (1/\phi) \overset{100}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_5 \\
 &\quad \left. + D_2 (1/\phi) \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_5 \right\} \\
 [K_{wv}] &= (h\phi D_0/B) \left\{ D_1 (B/h) (1/\phi) \overset{000}{I_{m1}} \overset{010}{J_{n1}} A_6 \right. \\
 &\quad + D_2 (B/h) (1/\phi) \overset{000}{I_{m1}} \overset{100}{J_{n1}} A_5 \\
 &\quad \left. + D_2 (B/h) (1/\phi) \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_7 \right\} \\
 [K_{ww}] &= (h\phi D_0/B) \left\{ (1/\phi)^2 \overset{111}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_8 \right. \\
 &\quad + D_2 (I_{m1} J_{n1} A_8 \\
 &\quad + \overset{100}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_8 + \overset{010}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_8 \\
 &\quad + \overset{00-1}{I_{m1}} \overset{000}{J_{n1}} A_8 + (B/h)^2 \overset{001}{I_{m1}} \overset{110}{J_{n1}} A_8) \} \\
 \end{aligned}$$

また、サブ質量マトリックスは、次式で表される。

$$\begin{aligned}
 [M_{uu}] &= (\rho B^2 h \phi) \{ I_{m1} J_{n1} A_1 \} \\
 [M_{vv}] &= (\rho B^2 h \phi) \{ I_{m1} J_{n1} A_1 \} \\
 [M_{ww}] &= (\rho B^2 h \phi) \{ I_{m1} J_{n1} A_8 \} .
 \end{aligned}$$

ただし、 I_{m1} と J_{n1} は、次式で示される。

$$\begin{aligned}
 I_{m1} &= \int_0^{tuc} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\xi) \{ \xi + 1/(\delta - 1) \} d\xi d\zeta \\
 J_{n1} &= \int_0^{tu} N_{n,k}(\eta) N_{n,k}(\eta) \{ \xi + 1/(\delta - 1) \} d\xi d\zeta
 \end{aligned}$$

ここで、 t, u は、それぞれ導関数の次数である。また、 C は乗数である。また、 A_i は、次式で定義される。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_0^1 Z_t(\zeta) Z_p(\zeta) d\zeta, \\
 A_2 &= \int_0^1 \dot{Z}_t(\zeta) \dot{Z}_p(\zeta) d\zeta \\
 A_3 &= \int_0^1 Z_t(\zeta) \ddot{Z}_p(\zeta) d\zeta \\
 A_4 &= \int_0^1 \dot{Z}_t(\zeta) \ddot{Z}_p(\zeta) d\zeta \\
 A_5 &= \int_0^1 \ddot{Z}_t(\zeta) \dot{Z}_p(\zeta) d\zeta \\
 A_6 &= \int_0^1 \ddot{Z}_t(\zeta) Z_p(\zeta) d\zeta \\
 A_7 &= \int_0^1 \dot{\ddot{Z}}_t(\zeta) \dot{\ddot{Z}}_p(\zeta) d\zeta \\
 A_8 &= \int_0^1 \ddot{\ddot{Z}}_t(\zeta) \ddot{\ddot{Z}}_p(\zeta) d\zeta
 \end{aligned}$$

ただし、 $\dot{}$ は導関数である。

参考文献

- 1) Srinivas, S.: Flexure of simple supported thick homogeneous and laminated rectangular plates. ZAMM, Vol. 49, pp. 449-458, 1969.
- 2) 島田 功、岡村宏一: 厚い長方形スラブの応力と変形. 土木学会論文報告集, No. 233, pp. 13-23, 1975.
- 3) Liew, K.M., Hung, K.C. and Lim, M.K.: A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates. Int. J. Solids and Structures, Vol. 30(24), pp. 3357-3379, 1993.
- 4) 林 正、小林享市: 節点プリズム法による3次元応力解析. 土木学会論文集, No. 450/I-20, pp. 95-101, 1992.
- 5) Kobayashi, H., Ishikawa, K. and Furuichi, K.: A Survey of literature on bending, buckling and dynamics of sectorial plates. Mem. Fac. Eng., Osaka City Univ. Vol 33, 115-136, 1992.
- 6) Zienkiewicz, O.C. and Too, J.J.M.: The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes. Proc. Inst. Civil Engrs, Vol. 53, pp. 147-172, 1972.
- 7) Cheung, M.S. and Cheung, Y.K.: Static and dynamic analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method. Comput. Struct., Vol. 14, pp. 79-88, 1981.
- 8) Mizusawa, T.: Vibration of thick annular sector plates using semi-analytical methods. J. Sound Vib., Vol. 150, pp. 245-259, 1991.
- 9) 高木信治、水澤富作: Spline prism法を用いた扇形厚板の3次元解析について. 構造工学論文集, Vol. 40A, 1-12, 1994.
- 10) Cheung, Y.K. and Chakrabarti, S.: Analysis of simply supported thick, layered plates. J. Eng. Mech. Div., Proc. of ASCE, Vol. 97, pp. 1039-1044, 1971.
- 11) Mizusawa, T., Kito, H. and Kajita, T.: Vibration of annular sector Mindlin plates by the spline strip method. Comput. and Struct.,

Vol. 53(5), PP. 1205-1215, 1994.

- 12) Kim, C.S. and Dickinson, S.M.: On the free transverse vibration of annular and circular, thin, sectorial plates subjected to certain complicating effects. J. Sound Vib., Vol. 134, 407-421, 1989.

- 13) Boor, C.D.: On calculating with B-splines. J. Approx. Theory, Vol. 6, pp. 50-62, 1972.

- 14) 水澤富作、梶田建夫、成岡昌夫: B-spline関数を用いた斜板の自由振動解析について、土木学会論文報告集、第272号、pp. 131-134, 1978.

(1997年9月26日受付)