

剛性マトリックス法による連続合成桁の時間依存性応力解析 TIME-DEPENDENT STRESS ANALYSIS OF CONTINUOUS COMPOSITE GIRDER BY STIFFNESS MATRIX METHOD

川上 洵*, 松塚 忠政**, 樫福 浄***, 徳重英信****

Makoto KAWAKAMI, Tadamasa MATSUZUKA, Kiyoshi KASHIFUKU and Hidenobu TOKUSHIGE

*工博 秋田大学教授 鉱山学部土木環境工学科 (〒010 秋田市手形学園町1-1)

**秋田大学大学院 鉱山学研究科土木環境工学専攻 (〒010 秋田市手形学園町1-1)

***工修 日本高圧コンクリート(株) (〒060 札幌市中央区南二条西三丁目)

****工修 北海道大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒060 札幌市北十三条西八丁目)

An accurate evaluation of stresses and strains due to time-dependent effects is important in the structural analysis and design of continuous girders with or without prestressing. These effects caused by creep and shrinkage of concrete and relaxation of prestressing steel, have to be considered in the calculation of prestress losses. This paper presents a rigorous method for determining time-dependent stresses in composite sections with arbitrary sections. The instantaneous and long-term deflection are also obtained by stiffness matrix method. Especially, the movement of centroid of the composite section with time-dependent modulus of elasticity is precisely considered in the stiffness matrix. Numerical example shows how the proposed analysis can be carried out.

Key Words: time-dependent effects, creep, shrinkage, relaxation, composite section, stiffness matrix method

1. まえがき

コンクリートは鉄筋あるいはP C鋼材等で補強されR CやP C構造として、また、鋼桁等との複合化により合成構造として使用されている。さらに最近では、R C橋脚を鋼板で巻き補強したり、鋼橋脚にコンクリートを充填するなどの事例も急増している。

これらの合成構造物においては、死荷重をはじめプレストレス力等の持続荷重が作用する。このため材齢の経過に伴いクリープが進行するとともに、コンクリートには乾燥収縮、P C鋼材にはリラクセーションが生じる。この経時変化を伴う応力、すなわち時間依存性応力により連続桁の不静定反力も構造物の変形に関係するため経時的に変化する。また、多径間P C桁などでは分割施工が行われることが多く、各施工段階における構造系変化及びクリープにより、コンクリートに生じる応力は逐次変化する。また、ひび割れをはじめ、変形や変位の使用限界状態及び終局限界状態において、このような応力の変化と変形を正確に推定することが重要となる。

現在の合成部材は多種多様化しており、より複雑な合成部材の時間依存性応力解析を行うために、剛性マトリックス法による解析が求められている¹⁾。また、経時変化に伴いコンクリートの弾性係数が変化するため部材の

図心軸は変化する。従来、図心軸の変化を考慮した剛性マトリックス法による解析法²⁾が報告されていた。しかし、合成断面内の応力解析においてコンクリート部、鋼桁部の図心を求める必要があり、複雑な合成断面を有する場合には適していなかった。

本論文は連続合成桁の時間依存性応力解析を行うにあたり、任意の構造系変化にも容易に対応できる剛性マトリックス法を採用し、応力、ひずみ及び変形を解析的に求めるものである。

また前述のように従来の剛性マトリックス法による解析では、材齢の経過に伴う部材断面の図心位置の変化への対応が困難であったが、時間依存性応力による断面内の応力再分配を任意基準点で求めることができる解析法を用いた。

得られた解析結果に基づき数値計算例を示し、その有用性を示した。

2. 剛性マトリックス法

構造物がどのような支持条件であっても解析可能なように構造解析には剛性マトリックス法を用いる。一般的な合成部材を図-1に示す。部材断面は一定とするが基準軸は断面、部材に関して任意に設定できるものとする³⁾。

時間依存性応力を考慮するとき材齢の経過に従って部材の図心軸が移動することを考慮して、基準軸を任意に設定できる剛性マトリックスを使用した。剛性マトリックス法における全体座標系をはじめ部材座標系の節点力及び変位の正方向を図-2に示す。また一般に $i-j$ 部材の剛性方程式は式(1)により表される。

$$\{X\} = [K] \{D\} + \{X_0\} \quad \dots \dots (1)$$

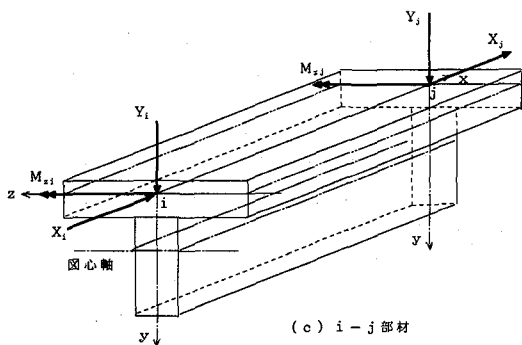
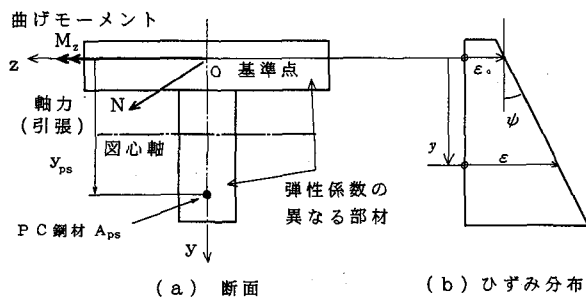


図-1 合成部材の断面と部材座標系

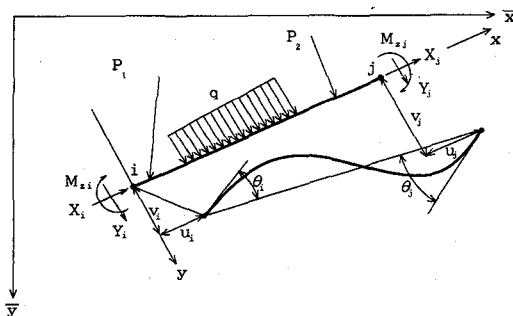


図-2 剛性マトリックス法における座標系

式(1)において $\{X\}$ は外力ベクトル、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{D\}$ は節点変位ベクトルである。 $\{X_0\}$ は部材に内力として直接載荷される荷重や中間荷重が作用する場合に部材両端を拘束したときの固定端力で表される荷重項である。また材齢の経過により部材の図心軸が移動することを考慮して、基準軸を任意に設定できる剛性マトリックスを使用した。その詳細を **Appendix (A.2)** に示す。

3. 合成断面内における時間依存性応力解析⁴⁾

3.1 仮定及び符号

軸力、曲げを受ける合成断面の時間依存性応力解析を行うにあたり、次の(1)～(6)の仮定を行う。

- (1) 軸力 N 、ひずみ ϵ 及び応力 σ は引張を正とする。曲げモーメント M は部材下縁に引張、上縁に圧縮を生じさせるものを正とし、曲率 ψ も正の曲げモーメントに対応するものを正とする。
- (2) コンクリートと鋼材間の付着は完全であるとする。
- (3) 平面保持の仮定が成り立つものとし、どの繊維においてもコンクリートと鋼材のひずみは等しいものとする。
- (4) コンクリートはひび割れのない断面とし全断面有効とする。
- (5) プレテンション方式の場合、部材の弾性変形により P C 鋼材の引張力は減少し、 P C 鋼材のひずみ変化は同一繊維におけるコンクリートのひずみと一致すると仮定する。
- (6) ポストテンション方式の場合には、コンクリートに弾性変形が生じてもプレストレス力の減少は生じないものとする。またプレストレス導入直後のグラウトにより P C 鋼材、グラウト、及びダクト外側のコンクリート相互間の付着は完全であると仮定する。

3.2 基礎式

図-1(a)のような合成断面を考える。この断面が、対称軸上の任意点に軸力 N を受けることと仮定する。その軸力は、図-1(a)に示す対称軸上に任意に設けた基準点 O における軸力 N と曲げモーメント M とに変換できる。ひずみ分布は、図-1(b)に示すように直線と仮定する。ひずみ ϵ は基準点における軸ひずみを ϵ_0 、曲率を ψ とすると次式から求められる。

$$\epsilon = \epsilon_0 + \psi y \quad \dots \dots (2)$$

対象とする繊維が、合成断面の分割部分 k にあるとき、その繊維での応力は、

$$\sigma = E_k (\epsilon_0 + \psi y) \quad \dots \dots (3)$$

この応力により、断面の基準点 O に関する m 種類の断面からなる合成断面の軸力 N 及び曲げモーメント M は、

$$N = \sum_{n=1}^m \int_{A_n} \sigma dA_n \quad \dots \dots (4)$$

$$M = \sum_{n=1}^m \int_{A_n} \sigma y dA_n \quad \dots \dots (5)$$

で与えられ、積分は断面全体に対して行い、式(3)を式(4)及び式(5)に代入しマトリックス表示すると、

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = E_{ref} \begin{bmatrix} A & G \\ G & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \psi \end{Bmatrix}$$

ここで A は換算断面積、 G は換算断面1次モーメント、 I は換算断面2次モーメントであり次式で求められる。

$$\begin{cases} A = \sum_{n=1}^m \frac{E_n}{E_{ref}} \int_{A_n} dA_n, & G = \sum_{n=1}^m \frac{E_n}{E_{ref}} \int_{A_n} y dA_n \\ I = \sum_{n=1}^m \frac{E_n}{E_{ref}} \int_{A_n} y^2 dA_n \end{cases}$$

NとMが既知のとき、ひずみと曲率について解くと

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_{ref}(A I - G^2)} \begin{bmatrix} I & -G \\ -G & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (6)$$

3.3 材齢 t_0 における瞬間ひずみと応力

プレストレス力とNとMを基準点Oにおける等価軸力 N_{eq} と等価曲げモーメント M_{eq} として表す。ここではプレストレスを一度に導入する。

$$\begin{Bmatrix} N_{eq} \\ M_{eq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N - \sum_{n=1}^{nps} P_n \\ M - \sum_{n=1}^{nps} P_n y_{psn} \end{Bmatrix}$$

ここで、npsはPC鋼材総本数である。プレストレス導入直後の瞬間軸ひずみと曲率は式(7)で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0(t_0) \\ \psi(t_0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_{ref}(A I - G^2)} \begin{bmatrix} I & -G \\ -G & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{eq} \\ M_{eq} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (7)$$

ポストテンション方式では、PC鋼材用ダクトの断面積は、コンクリート断面から控除され、式(7)を用いて換算断面諸量を計算するときにもPC鋼材の断面積は除かれる。

コンクリート、鉄筋及びPC鋼材の瞬間ひずみと応力は式(2)、式(3)より

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{コンクリート} \\ \quad \varepsilon_c(t_0) = \varepsilon_0(t_0) + \psi(t_0)y \\ \quad \sigma_c(t_0) = E_c(t_0) \{ \varepsilon_0(t_0) + \psi(t_0)y \} \\ \cdot \text{鉄筋} \\ \quad \sigma_{ns}(t_0) = E_{ns} \{ \varepsilon_0(t_0) + \psi(t_0)y_{ns} \} \\ \cdot \text{鋼桁} \\ \quad \sigma_s(t_0) = E_{ns} \{ \varepsilon_0(t_0) + \psi(t_0)y \} \\ \cdot \text{PC鋼材} \\ \quad \text{プレテンション方式} \\ \quad \sigma_{ps}(t_0) = (\sigma_{ps})_{ini} + E_{ps} \{ \varepsilon_0(t_0) + \psi(t_0)y_{ps} \} \\ \quad \text{ポストテンション方式} \\ \quad \sigma_{ps}(t_0) = (\sigma_{ps})_{ini} \end{array} \right. \quad \dots \dots \dots (8)$$

3.4 ひずみ及び応力の経時変化

材齢 t_0 から t の期間においてクリープ、乾燥収縮及びPC鋼材のリラクセーションにより生じるひずみと応力の経時変化は以下の手順により得られる。

(1) 材齢 t_0 におけるひずみと応力

材齢 t_0 における瞬間ひずみ及び応力を3.3により求める。

(2) コンクリートの自由ひずみ

コンクリートと鋼材との付着がなく、クリープ、乾燥収縮が自由に生じるならば、 t_0 から t の期間における軸ひずみと曲率はそれぞれ

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{free} &= \phi(t, t_0) \varepsilon_0(t_0) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \\ \Delta \psi_{free} &= \phi(t, t_0) \psi(t_0) \end{aligned}$$

であり、その自由ひずみ $\Delta \varepsilon_{free}$ は

$$\Delta \varepsilon_{free} = \Delta \varepsilon_{ofree} + \Delta \psi_{free} y$$

である。

(3) コンクリートの拘束応力

コンクリートの自由ひずみ $\Delta \varepsilon_{free}$ を拘束する応力は

$$\sigma_{res} = -\overline{E}_c \Delta \varepsilon_{free} \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここで $\overline{E}_c$ は材齢修正弾性係数であり次式から求められる。

$$\overline{E}_c(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \phi(t, t_0) \chi(t, t_0)} \quad \dots \dots \dots (10)$$

ここで $\chi(t, t_0)$ は材齢係数⁵⁾と呼ばれる係数で通常0.6~0.9の値である。

(4) コンクリートのクリープ、乾燥収縮及びPC鋼材のリラクセーションを拘束する断面力

クリープを拘束する断面力は

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{cc} = - \sum_{n=1}^m \left[\overline{E}_c \phi \begin{bmatrix} A_c & G_c \\ G_c & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(t_0) \\ \psi(t_0) \end{Bmatrix} \right]_n$$

乾燥収縮を拘束する断面力は

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{cs} = - \sum_{n=1}^m \left[\overline{E}_c \varepsilon_{cs} \begin{bmatrix} A_c \\ G_c \end{bmatrix} \right]_n$$

PC鋼材のリラクセーションを拘束する断面力は

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{pr} = \sum_{n=1}^{nps} \begin{Bmatrix} A_{ps} \Delta \overline{\sigma}_{pr} \\ A_{ps} y_{ps} \Delta \overline{\sigma}_{pr} \end{Bmatrix}_n$$

よって全拘束断面力は

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{res} = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{cc} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{cs} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{pr} \quad \dots \dots \dots (11)$$

(5) 拘束力の解除

全拘束断面力を逆向きに材齢修正換算断面に作用させることにより、ひずみの経時変化を得る。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_0 \\ \Delta \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{\overline{E}_c(A I - G^2)} \begin{bmatrix} \overline{I} & -\overline{G} \\ -\overline{G} & \overline{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta N \\ -\Delta M \end{Bmatrix}_{res} \quad \dots \dots \dots (12)$$

これらのひずみの経時変化と式(9)から応力の経時変化が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{コンクリート} \\ \quad \Delta \sigma_c = \sigma_{res} + \overline{E}_c(t, t_0) (\Delta \varepsilon_0 + \Delta \psi y) \\ \cdot \text{鉄筋、鋼桁} \\ \quad \Delta \sigma_{ns} = E_{ns} (\Delta \varepsilon_0 + \Delta \psi y_{ns}) \\ \cdot \text{鋼桁} \\ \quad \Delta \sigma_s = E_{ns} (\Delta \varepsilon_0 + \Delta \psi y_s) \\ \cdot \text{PC鋼材} \\ \quad \Delta \sigma_{ps} = \Delta \overline{\sigma}_{pr} + E_{ps} (\Delta \varepsilon_0 + \Delta \psi y_{ps}) \end{array} \right. \quad \dots \dots \dots (13)$$

4. 剛性マトリックス法による時間依存性応力解析

合成断面を構成するコンクリート部材にクリープ、乾燥収縮及びP C鋼材のリラクセーションが生じると断面内の鋼桁、鉄筋、P C鋼材等により、コンクリートの自由な変形が拘束されることから断面内で応力の再分配が生じる。また連続合成桁の場合この応力の変化により生じる桁の変形が外的、内的な拘束を受けることから不静定力が生じる。この不静定力を剛性マトリックス法を用いて求めるためには時間依存性応力による各節点変位を拘束し、そのとき固定端に生じる固定端力を求め荷重項として作用させることになる。まず各部材に生じる軸ひずみ $\Delta \varepsilon$ 及び曲率 $\Delta \psi$ の部材軸方向の変化を考慮する必要がある。材齢 t_0 での死荷重による曲げモーメントの分布は、一般に二次放物線形で表されることが多く、またその他の分布曲線でも分割数を多くとり、図-4、図-5のように二次放物線変化するものと仮定しても、実用上問題はない。従って、部材両端と部材中央の軸ひずみ及び曲率の変化により固定端力を求める。このとき固定端力の向きは従来の構造力学の符号に従うものとする(図-3)。

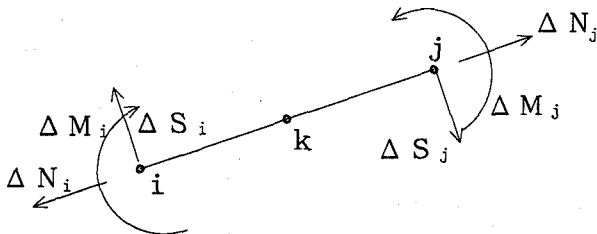


図-3 求める固定端力の符号

4.1 二次放物線分布する軸ひずみによる固定端力⁶⁾

図-4に示した軸ひずみ分布を直線分布部分と二次放物線分布部分とに分け、その軸ひずみ分布により生じる変位を拘束することにより軸力を求めると、

$$\Delta N_i = \Delta N_j = -\bar{E}_c \bar{A} \left[\frac{1}{6} \Delta \varepsilon_i + \frac{2}{3} \Delta \varepsilon_k + \frac{1}{6} \Delta \varepsilon_j \right]$$

となる。

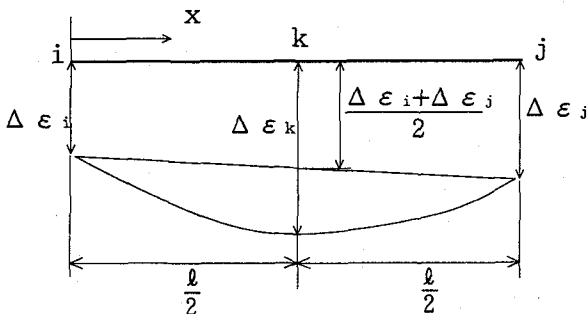


図-4 二次放物線変化する軸ひずみ

4.2 二次放物線分布する曲率による固定端力

図-5に示した曲率分布を直線分布部分と二次放物線分布部分とに分け、曲率分布から生じる変位を拘束することにより曲げモーメント、せん断力を求める。

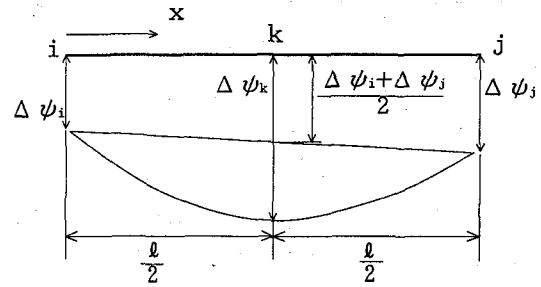


図-5 二次放物線変化する曲率

図-5に示した曲率分布のときの曲げモーメントは

$$\begin{aligned} \Delta M_i &= -\bar{E}_c \left[\bar{I} - \frac{\bar{G}^2}{A} \right] \left(\frac{2}{3} \Delta \psi_i + \frac{2}{3} \Delta \psi_k - \frac{1}{3} \Delta \psi_j \right) \\ &\quad - \Delta N_i \left(\frac{\bar{G}}{A} \right) \\ \Delta M_j &= \bar{E}_c \left[\bar{I} - \frac{\bar{G}^2}{A} \right] \left(\frac{1}{3} \Delta \psi_i + \frac{2}{3} \Delta \psi_k + \frac{2}{3} \Delta \psi_j \right) \\ &\quad - \Delta N_j \left(\frac{\bar{G}}{A} \right) \end{aligned}$$

図-5に示した曲率分布のときのせん断力は

$$\Delta S_i = -\Delta S_j = \frac{\bar{E}_c}{l} \left[\bar{I} - \frac{\bar{G}^2}{A} \right] (\Delta \psi_i - \Delta \psi_j)$$

となる。

4.3 符号変換

4.1及び4.2によって得られた固定端力の符号を図-6に示す剛性マトリックス法における符号に従って変換し、クリープ、乾燥収縮及びP C鋼材のリラクセーションによる荷重項を求めると各部材における荷重項は次式で表される。

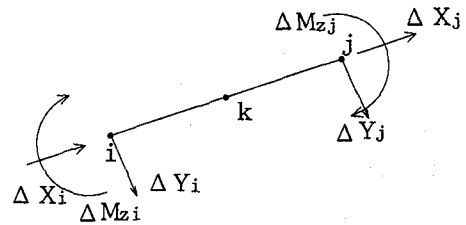


図-6 剛性マトリックス法における節点力の符号

$$\{X_0\} = \{ \Delta X_i \ \Delta Y_i \ \Delta M_{zi} \ \Delta X_j \ \Delta Y_j \ \Delta M_{zj} \}^T$$

ここで、

節点i

$$\Delta X_i = -\Delta N_i, \quad \Delta Y_i = -\Delta S_i, \quad \Delta M_{zi} = \Delta M_i$$

節点j

$$\Delta X_j = \Delta N_j, \quad \Delta Y_j = \Delta S_j, \quad \Delta M_{zj} = -\Delta M_j$$

.....(14)

これらの荷重項と、材齢修正換算断面諸量を用いた剛性方程式(式(1))を適用することにより、コンクリートのクリープ、乾燥収縮及びP C鋼材のリラクセーションによる変位ならびに不静定力の変化が得られる。

5. 応力分布

3及び4での解析結果から連続合成桁の任意断面におけるクリープ、乾燥収縮、P C鋼材のリラクセーションによる応力分布は図-7に示すフローチャートに従って求めることができる。

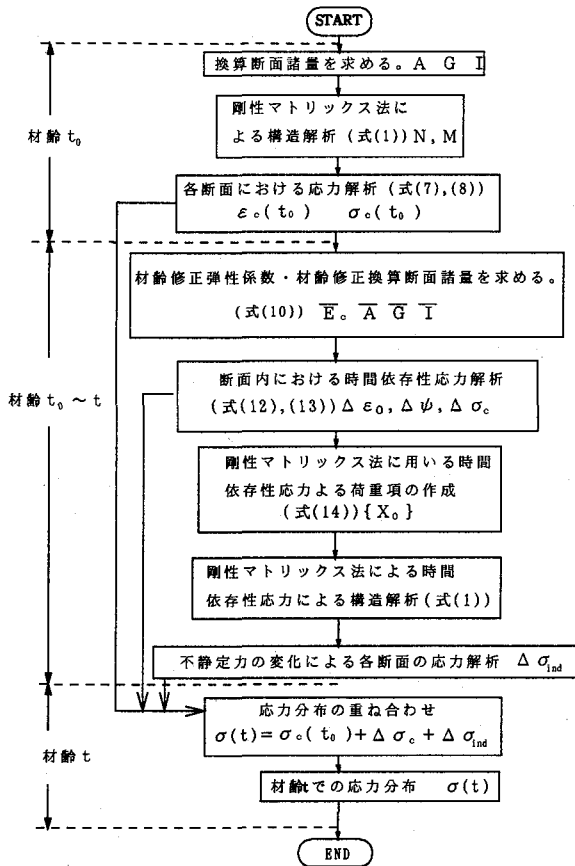


図-7 応力分布を求めるフローチャート

6. 数値計算例

桁高の変化する支間45mの2径間連続合成桁の断面を図-8に示す。U字形鋼桁上にはプレキャスト床版が敷設され、橋軸方向にはポストテンション方式によりプレストレスが導入される。

プレストレス導入直後、断面は鋼桁とコンクリート床版から構成される合成断面となる。プレストレス導入直後の材齢 t_0 及びクリープ、乾燥収縮、リラクセーションが生じた後の材齢 t における支間中央断面と中間支点上断面でのコンクリートと鋼桁のひずみと応力ならびに、連続桁の変位、反力の変化を求める。

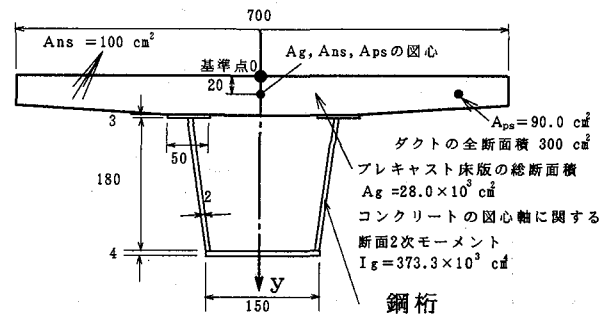
ただし、床版のプレストレス導入及び鋼桁と床版の合成は、材齢 t_0 で同時に行われるとする。また、床版のプレストレス導入のとき、床版は鋼桁上を自由に滑ると仮定し、計算にあたっては次の諸数値を用いる。

初期プレストレス力 $P = 9800 \text{ kN}$,

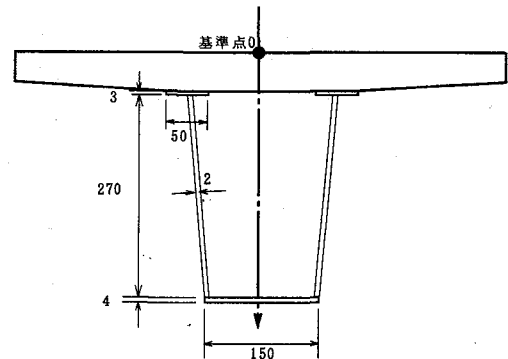
クリープ係数 $\phi(t, t_0) = 2$, 材齢係数 $\chi(t, t_0) = 0.8$,

乾燥収縮ひずみ $\varepsilon_{cs}(t, t_0) = -200 \times 10^{-6}$,

低減リラクセーション値 $\Delta \sigma_{pr} = -48 \text{ MPa}$,
コンクリートの弾性係数 $E_c(t_0) = 27.44 \text{ GPa}$,
鉄筋及び鋼桁の弾性係数 $E_{ns} = 206 \text{ GPa}$,
P C鋼材の弾性係数 $E_{ps} = 196 \text{ GPa}$



(a) 連続桁両端の部材断面 (cm)



(b) 連続桁中間支点上の部材断面 (cm)

図-8 連続桁の断面

図-9に示した高さの変化する2径間連続合成桁を一定断面部材から構成される連続桁に近似する (図-10)。

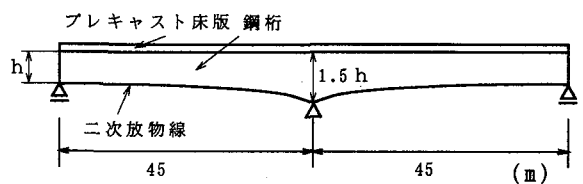


図-9 2径間連続桁

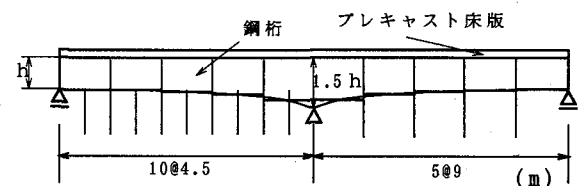


図-10 近似された高さの変化する2径間連続桁

(1) 材齢 t_0 における解析

プレキャスト床版の敷設完了時では床版と鋼桁とは別々の断面とみなされる。従って、床版図心にはプレストレス力、鋼桁には、床版と鋼桁の自重である分布荷重 80 kN/m が作用する。このときの曲げモーメントと変位及び反力を剛性マトリックス法により求め、その結果を図-11～図-13に示す。

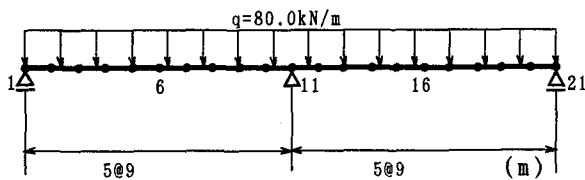


図-11 剛性マトリックス法における節点番号

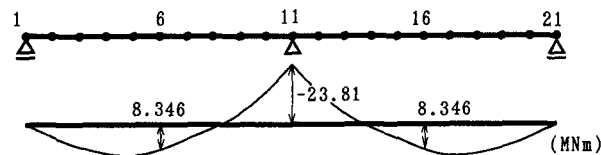


図-12 材齢 t_0 における曲げモーメント図

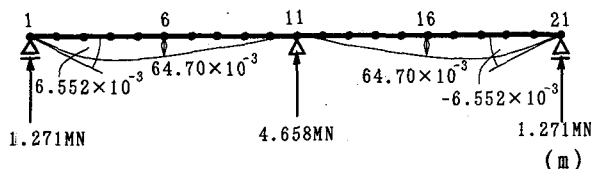


図-13 材齢 t_0 における変位及び反力

これらの剛性マトリックス法による計算結果から、材齢 t_0 における中間支点上の部材断面の応力分布は

i) プレキャスト床版

換算断面積 $A = 2.835 \text{ m}^2$ であるから式(7)より

$$\varepsilon_o(t_0) = -126.0 \times 10^{-6}$$

・コンクリートの応力

$$\sigma_o(t_0) = -3.457 \text{ MPa}$$

・鉄筋の応力

$$\sigma_{rs}(t_0) = -25.95 \text{ MPa}$$

・P C鋼材の応力 (ポストテンション方式)

$$\sigma_{ps}(t_0) = (\sigma_{ps})_{ini} = 1089 \text{ MPa}$$

ii) 鋼桁

作用軸力 $N = 0 \text{ N}$

作用曲げモーメント $M = -23.81 \text{ MNm}$

鋼桁の断面諸量

$$A_s = 0.195 \text{ m}^2 \quad G_s = 0.3799 \text{ m}^3 \quad I_s = 0.9516 \text{ m}^4$$

式(7)より

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o(t_0) \\ \psi(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1065 \times 10^{-6} \\ -546.6 \times 10^{-6} / \text{m} \end{Bmatrix}$$

材齢 t_0 で中間支点上断面に生じるひずみ及び応力分布を図-14に示す

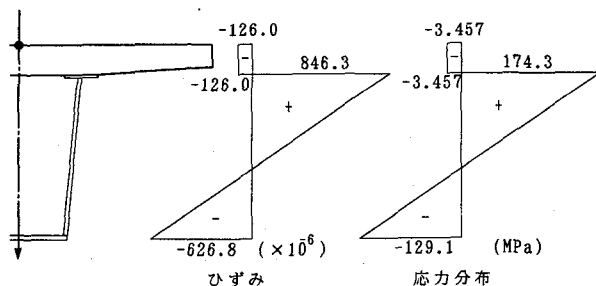


図-14 材齢 t_0 におけるひずみ及び応力分布

(2) 時間依存性応力解析

式(10)よりコンクリートの材齢修正弾性係数は

$$\overline{E}_c = 10.55 \text{ GPa}$$

コンクリートのみの断面諸量は

$$A_c = 2.781 \text{ m}^2 \quad G_c = 0.5564 \text{ m}^3 \quad I_c = 0.03657 \text{ m}^4$$

コンクリートのクリープ、乾燥収縮による自由ひずみは

$$\Delta \varepsilon_{free} = -451.94 \times 10^{-6}$$

よって拘束応力は式(9)より

$$\sigma_{res} = 4.7697 \text{ MPa}$$

となる。

また、クリープを拘束する断面力は

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{cc} = \begin{Bmatrix} 7.3945 \text{ MN} \\ 1.4794 \text{ MNm} \end{Bmatrix}$$

乾燥収縮を拘束する断面力は

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{cs} = \begin{Bmatrix} 5.8700 \text{ MN} \\ 1.1744 \text{ MNm} \end{Bmatrix}$$

P C鋼材のリラクセーションを拘束する断面力は

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{pr} = \begin{Bmatrix} -0.4320 \text{ MN} \\ -0.0864 \text{ MNm} \end{Bmatrix}$$

よって全拘束断面力は式(11)より

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{res} = \begin{Bmatrix} 12.8325 \text{ MN} \\ 2.5674 \text{ MNm} \end{Bmatrix}$$

また、中間支点上断面における材齢修正換算断面諸量は

$$\overline{A} = 6.9495 \text{ m}^2 \quad \overline{G} = 8.0442 \text{ m}^3 \quad \overline{I} = 18.738 \text{ m}^4$$

よって式(12)によりこの拘束力を解除すると

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_o \\ \Delta \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -317.91 \times 10^{-6} \\ 123.50 \times 10^{-6} / \text{m} \end{Bmatrix}$$

次に剛性マトリックス法を用いて連続合成桁の不静定力の変化を求め、その曲げモーメント図と変位及び反力の変化をそれぞれ図-15、図-16に示す。

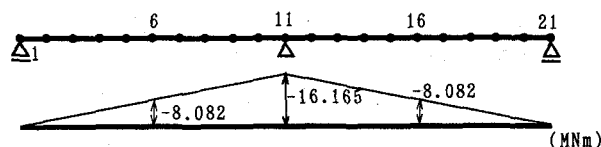


図-15 材齢 $t_0 \sim t$ における時間依存性応力による曲げモーメント図

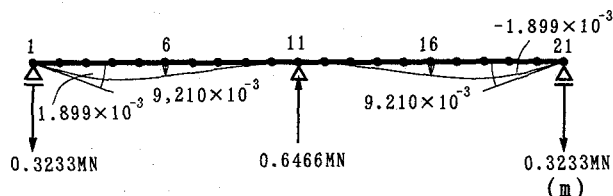


図-16 材齢 $t_0 \sim t$ における時間依存性応力による変位及び反力

剛性マトリックス法により中間支点上断面に作用している時間依存性応力により変化した断面力は

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{ind} = \begin{Bmatrix} 0.0 \text{ MN} \\ 16.165 \text{ MNm} \end{Bmatrix}$$

式(12)よりこの断面力によるひずみと曲率の変化を求めると、

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_o \\ \Delta \psi \end{Bmatrix}_{ind} = \begin{Bmatrix} 188.15 \times 10^{-6} \\ -162.54 \times 10^{-6} / \text{m} \end{Bmatrix}$$

となる。時間依存性応力による応力変化を図-7に示したフローチャートに従って求め、材齢 t におけるひずみ及び応力分布を図示すると図-17のようになる。

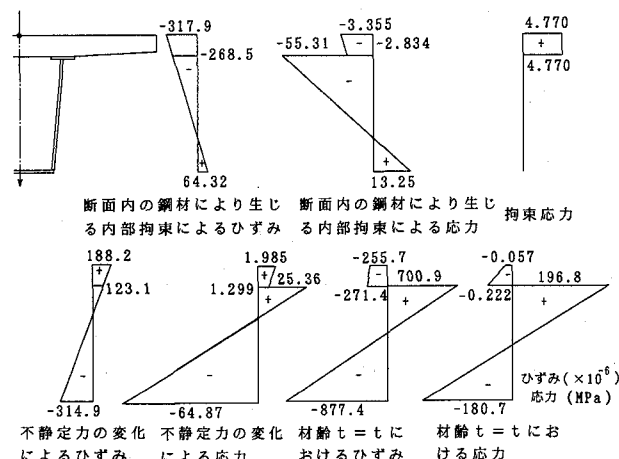


図-17 時間依存性応力により生じるひずみと応力の変化と材齢 t におけるひずみと応力

7. むすび

本論文では、剛性マトリックス法を用いた連続合成桁の時間依存性応力解析を行った。得られた成果をまとめると以下のとおりである。

- (1) 合成部材断面の図心位置はコンクリートの弾性係数の変化とともに移動するが、任意に設定された基準軸に対応できる剛性マトリックス法を用いることにより一貫した解析が可能である。
- (2) 応力法により数値計算例の解を検証したが、剛性マトリックス法と比較すると不静定力の計算過程は極めて煩雑である。特に、高次不静定構造物の場合には応力法による対応は難しく、ここに示した剛性マトリックス法の利用が必要不可欠である。
- (3) 計算例として合成桁を取り扱ったが、施工段階毎に構造系が変化するような分割施工されるPC連続桁の時間依存性応力解析にも適用できる。
- (4) クリープ、乾燥収縮及びリラクセーション等による時間依存性応力の解析を行ったが、同様の手法により温度応力解析にも適用できる。

Appendix

A.1 記号

ε : ひずみ
 ψ : 曲率

N : 軸力
 M : z 軸に関する曲げモーメント
 A : 合成断面の換算断面積
 G : 合成断面の z 軸に関する換算断面1次モーメント
 I : 合成断面の z 軸に関する換算断面2次モーメント
 A_c : コンクリートの断面積
 G_c : コンクリートの z 軸に関する断面1次モーメント
 I_c : コンクリートの z 軸に関する断面2次モーメント
 l : 部材長
 m : 合成断面の総分割数
 n : 変数
 n_{ps} : 断面内のPC鋼材総本数
 E : 合成断面の分割部分 n における弾性係数
 E_{ref} : 合成断面の基準となる弾性係数
 P : プレストレス力の絶対値
 y : 基準点Oから下向きへの距離
 $(\sigma_{ps})_{ini}$: PC鋼材の初期引張応力

$\bar{A}$: 材齢修正換算断面積
 $\bar{G}$: z 軸に関する材齢修正換算断面1次モーメント
 $\bar{I}$: z 軸に関する材齢修正換算断面2次モーメント
 $\bar{E}_c = \bar{E}_c(t, t_0)$: コンクリートの材齢修正弾性係数
 ε_{cs} : 乾燥収縮ひずみ
 A_{ps} : PC鋼材の断面積
 y_{ps} : 基準点OからPC鋼材図心までの距離
 $\Delta \bar{\sigma}_{pr}$: 低減リラクセーション値
 ϕ : クリープ係数
 α : 材齢係数

添字

o : 基準点に関する諸量
 i : 節点 i に関する諸量
 j : 節点 j に関する諸量
 k : 節点 k に関する諸量
 x : x 軸に関する諸量
 y : y 軸に関する諸量
 c : コンクリート
 s : 鋼桁
 ns : 鉄筋
 ps : PC鋼材
 res : 拘束
 cc : クリープ

cs : 乾燥収縮
pr : リラクセーション
ref : 合成断面の基準
- : 材齢修正に関する諸量
ind : 不静定力による諸量

A.2 剛性方程式

一般の剛性マトリックス法では、部材断面の図心軸をとる基準軸に基づいて部材を表現していたが、本論文では、鋼材の曲線配置やコンクリートのクリープ、乾燥収縮等による弾性係数の違いにより、変化する部材の断面図心に対応できるように任意の基準軸に基づいて部材を表現することのできる剛性マトリックスを用いた。

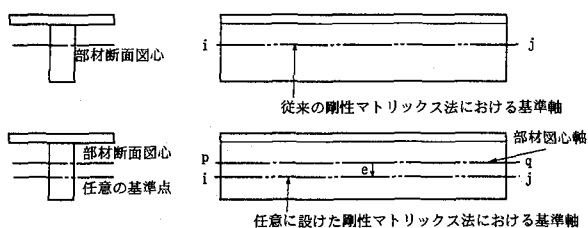


図-A.1 剛性マトリックス法における部材

図心軸から e だけ離れた位置に基準軸を設け、その基準軸上の点 i, j と図心軸上の点 p, q の各変位の関係は微小変位理論により、式(A-1)のようになる(図-A.2)。

式(A-1)を用いてひずみエネルギーを求め、従来の剛性マトリックス法におけるひずみエネルギーと比較することにより、任意に基準軸を設けた剛性マトリックスを

導くことができる。

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ \theta_p \\ u_q \\ v_q \\ \theta_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \dots (A-1)$$

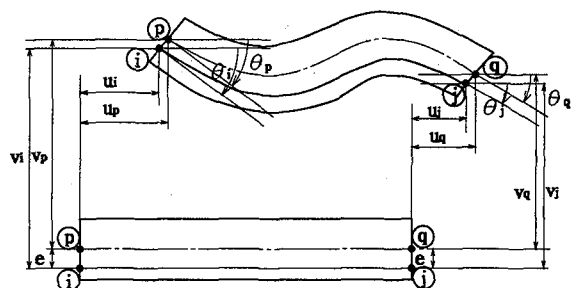


図-A.2 棒部材の変位

また、本文中式(1)右辺第二項 $\{X_0\}$ は荷重項と呼ばれる項であり、中間荷重や集中荷重が作用している部材もしくは、時間依存性応力が生じている部材を単独で取り出し、両端を固定した部材とみなしたときに生じる固定端力に関する項である。すなわち、部材に作用する力をそれと等価な部材両端の節点力に置き換えたものである。

文中式(1)の詳細は式(A-2)のとおりである。

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_{zi} \\ X_j \\ Y_j \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & -EG/l & -EA/l & 0 & EG/l \\ 0 & 12E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^3 & 6E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^2 & 0 & -12E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^3 & 6E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^2 \\ -EG/l & 6E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^2 & 4EI/l - 3EG^2/(Al) & EG/l & -6E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^2 & 2EI/l - 3EG^2/(Al) \\ -EA/l & 0 & EG/l & EA/l & 0 & -EG/l \\ 0 & -12E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^3 & -6E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^2 & 0 & 12E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^3 & -6E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^2 \\ -EG/l & 6E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^2 & 2EI/l - 3EG^2/(Al) & -EG/l & -6E \left(I - \frac{G^2}{A} \right) / l^2 & 4EI/l - 3EG^2/(Al) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_{0i} \\ Y_{0i} \\ M_{0zi} \\ X_{0j} \\ Y_{0j} \\ M_{0zj} \end{Bmatrix} \dots (A-2)$$

参考文献

- 1) 中井 博, 栗田章光: 鋼・コンクリート合成構造のクリープ・乾燥収縮解析における種々の基礎式に関する一考察, 構造工学論文集, Vol. 36A, pp.1275-1284, 1990.
- 2) 小宮正久, 酒井 一, 前田晴人: 任意形コンクリート構造物のクリープ解析法に関する一提案, プレストレストコンクリート, Vol. 29, NO.2, pp.8-17, 1987.
- 3) 川井忠彦: 座屈問題解析, コンピュータによる構造工学講座II-6B, 培風館, 1974.

- 4) Ghali, A and Favre, R (川上 洵, 樫福 浄他訳): コンクリート構造物の応力と変形, 技報堂出版, 1995.
- 5) Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxations- Probleme bei Beton und Spannbeton, Beton- and Stahlbetonbau, Vol. 62, pp.230-238, 1967
- 6) 北島彰夫: 鋼・コンクリート合成構造の汎用クリープ・乾燥収縮, 川田技報, Vol. 3, pp.10-25, 1983.

(1996年9月6日受付)