

側壁と底版が剛結された円筒タンクの断面力算定法

STRESS ANALYSIS OF CYLINDRICAL TANKS WHOSE WALL AND FLOOR SLAB ARE RIGIDLY FIXED

大谷悟司*, 吉岡民夫**, 高西照彦***

Satoshi OTANI, Tamio YOSHIOKA and Teruhiko TAKANISHI

*オリエンタル建設(株) 技術研究所 (〒321-43 栃木県真岡市鬼怒ヶ丘5)

**工博 オリエンタル建設(株) 技術研究所 (〒321-43 栃木県真岡市鬼怒ヶ丘5)

***工博 九州工業大学教授 工学部設計生産工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

An analytical method to compute stresses in cylindrical tanks whose wall and floor slab are rigidly fixed is proposed. Authors have suggested numerically practical methods to analyze the cylindrical thin shell wall and the circular ground floor of prestressed concrete tanks individually, using plane-frame models. They have equivalent external vertical and/or rotational springs perpendicular to the axis, which correspond to circumferential rigidities that are lost, when the plane frame model is cut out from the whole structure. This paper shows a method in which the monolithic cylindrical wall and circular plate can be analyzed with the plane frame model adding horizontal equivalent springs of the circular plate.

Key Words: stress analysis, cylindrical tank, plane frame model

1. はじめに

一般のプレストレストコンクリート(PC)タンクは、ドーム屋根、円筒側壁および円形底版から構成されており、これらの構造要素はそれぞれ軸対称シェル構造の分野に属している。この分野では、古くから理論的な構造解析が行われており、これらの構造に軸対称荷重が作用する場合の解析については、タンクの各構成要素毎に、理想的な境界条件の下での解析解が得られている。

我が国では、側壁を底版に固定とする構造が古くから多用されてきた。側壁と底版が固定構造の場合、それらは一体として挙動すると考えられるが、側壁や底版の断面力を求めるに際して、これらを切り離し、側壁下端と底版端部の剛性にあまり差がない場合でも、側壁下端は剛な底版に拘束されているとして、側壁下端完全固定として解析するのが一般的である。我が国のPCタンクの基準の一つである「水道用PCタンク標準仕様書」(日本水道協会, 昭和55年3月)では、側壁下端固定として求めたモーメントに、基礎の特性と底版の剛性を考慮

して得られた一定の係数を乗じて、10~25%下端モーメントを低減する方法が示されている。

上水用配水池などの一般的なPCタンクでは、その主たる荷重は水圧である。側壁の円周方向に適切に配置されたPC鋼材を緊張することにより、側壁には水圧とは逆向きの半径方向の外圧を作用させることができる。このように、作用する荷重を打消すようにプレストレスを設計する方法を荷重バランス法といい、側壁下端の拘束条件を考慮に入れることなく、すなわちそれが固定構造であろうと自由構造であろうと、まったく同じように円周方向のプレストレスを設計するのが一般的である。よって解析で仮定した側壁下端の境界条件が実際と異なっている場合でも、主たる荷重である水圧(内圧)とそれを打消すように設計されたプレストレス力(外圧)とで、その相違の影響が相殺されるために、解析で用いる側壁下端の境界条件が実際の構造と異なっている場合でも、PCタンクの設計上最も重要な側壁円周方向のプレストレスの設計では、大きな問題となることはない。

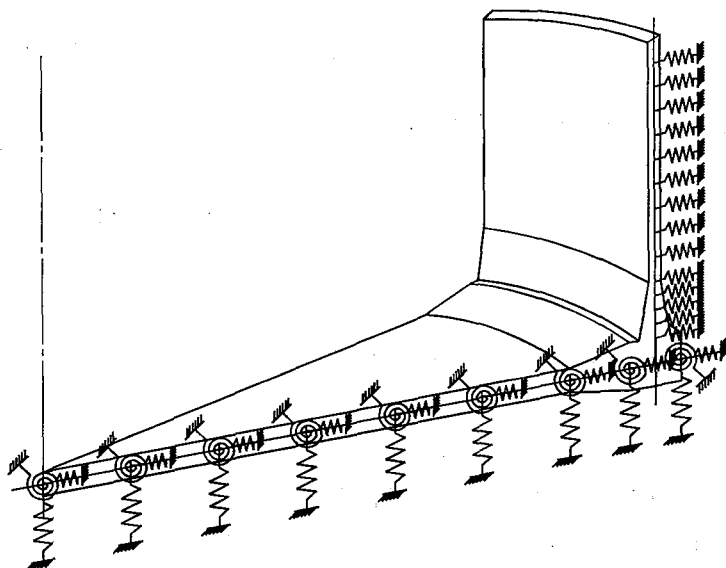


図-1 構造のモデル化

PCタンクに温度荷重が作用する場合には、それによる引張応力を打消すようにプレストレスを設計することは、一般に不経済であると考えられている。水圧の場合のように、荷重バランス法によりプレストレスを設計することができない場合には、応力バランス法と呼ばれる方法により、一般にはコンクリートに生ずる応力度についての検討を行って、それが許容値（限界値）の範囲内であることを確認しなくてはならない。このような場合には、側壁と底版の相互作用による影響を考慮しなくては、正しい応力状態を知ることはできない。最近のPC LNGタンクの設計では、側壁と底版を一体として解析するのが一般的である¹⁾。

側壁と底版を一体として解析するには、軸対称シェル要素を用いた有限要素法（FEM）解析が有用である。しかし、その適用範囲が線形である場合でも、FEM解析を用いて断面力を求め、数多くの詳細設計を行うことは、未だ実用的とはいえないところがある。また、1995年の兵庫県南部地震を契機に、非線形性を考慮した静的および動的解析の必要性が着目されるようになってきた。非線形性を考慮するFEM解析の場合、現在一般的に用いられている構成則によっては、期待する破壊モードが得られないことや、演算に極めて長い時間を要することが危惧され、必ずしも直ちに実務設計に適用するには実用的でない面も考えられる。一方、それを骨組構造モデルに置換することが出来ると、非線形性を考慮した汎用プログラムの入手が容易で、演算時間も大幅に

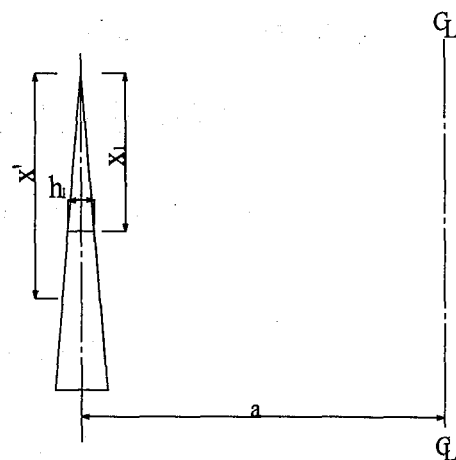


図-2 記号

短縮されることから、極めて実務上有用であると考えられる。

著者らは、PCタンクの構造構成要素である円筒側壁と弾性地盤上の円形底版に、静水圧のように軸に対して対称な、あるいは地震時動液圧のように軸に対して逆対称な荷重が作用する場合の断面力を求めるのに、パーソナルコンピュータで、誰でもが手軽に利用できる平面骨組解析プログラムを用いて構造をモデル化する方法を提案した^{2), 3), 4)}。ここでは、軸対称荷重が作用する円筒側壁と弾性地盤上の円形底版を一体とした円筒形タンクを対象として、平面骨組解析プログラムを用いて、先ずその第一歩として、弾性解析をする方法について述べ、数値計算を行って得られた結果を、FEM解析によって求められた結果と比較して、著者らの提案する方法の妥当性と有用性を示す。

2. 平面骨組解析

軸対称荷重が作用する等厚直立円筒シェルの変形を支配する方程式は、弾性床上の等断面はりのそれと同形であり、PriestleyらおよびBerceaらは軸対称荷重が作用する円筒シェルを、はり問題として解析する方法を示した^{5), 6)}。しかるに、これらのモデル化に対する理論的な根拠については、必ずしもそれは明確に示されているとはいえない。著者らは、円筒シェルをある幅で鉛直に切り出し、それによって失われた円周方向の剛性に等価なばねを、切り出したはりに鉛直方向に付与することによって、等価なはりモデルに置換することができることを示した（図-1参照）³⁾。

片側にハンチを有する側壁下端部では、ハンチ部と側壁等厚部の境界点において部材の軸線が折れ曲がるが、これを軸線は鉛直（直線）で、断面が直線的に変化する円筒シェルと考える。ハンチ部で剛性が変化することに注意すれば、力の釣合いと応力-変位の関係は等厚円筒シェルの場合と同じであるから、断面が直線的に変化する円筒シェルの変形を支配する弾性方程式は、円筒シェルの半径方向変位を w とすれば、次式のように表される。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D_w \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + K_w (1 - \nu^2) \frac{w}{a^2} = g(x) \dots \dots \dots (1)$$

ここに D_w : 側壁の曲げ剛性

$$= \frac{E_w}{12(1 - \nu^2)} \left(x' \frac{h_1}{x_1} \right)^3$$

K_w : 側壁の軸剛性

$$= \frac{E_w}{1 - \nu^2} \left(x' \frac{h_1}{x_1} \right)$$

E_w : 側壁のヤング係数

ν : ポアソン比

a : タンク半径

$g(x)$: 荷重関数

x', h_1, x_1 : 図-2 参照

断面が直線的に変化する円筒シェルを、それに等価な、ある幅で鉛直に切り出した弾性地盤上のはりに置換するための、はりに鉛直に付与すべきばねの単位面積当たりのばね定数 k_v^w は、式(1)左辺第2項より、次式で得られる。

$$k_v^w = K_w \frac{1 - \nu^2}{a^2} = \frac{E_w}{a^2} \left(x' \frac{h_1}{x_1} \right) \dots \dots \dots (2)$$

側壁厚が一定の場合は、 $x' = x_1$ となり、 h_1 が等しい壁厚を示すこととなる。

軸対称荷重が作用する弾性地盤上の円形底版のモデル化は²⁾、まず、円版からその中心を先端に持つくさび形の部分を切り取る。次に、切り取られたくさび形はりを解析したときに、得られた断面力が元の円版のそれと等しくなるように、等価ばね定数を定め、それを切り取ったくさび形はりの軸方向に付与する（図-1 参照）。

筆者らは、前報において²⁾、弾性地盤上の等厚円版もしくはリング状版に軸対称な鉛直荷重が作用する場合に、それを円版の中心を先端に持つくさび形はりに置換する

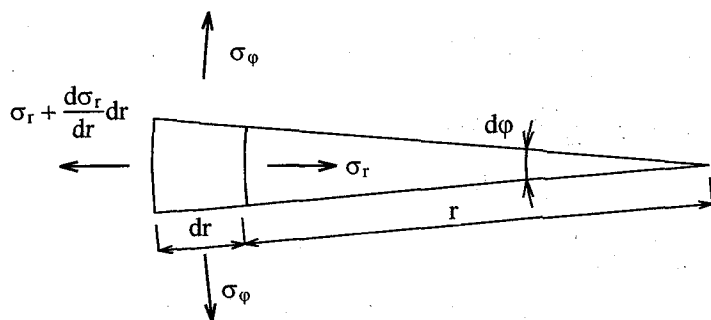


図-3 力の釣り合い

ための、等価な回転ばねの単位面積当たりのばね定数 k_θ^b は、次式で表されることを示した。

$$k_\theta^b = \frac{D_b}{r^2} \dots \dots \dots (3)$$

ここに D_b : 底版の曲げ剛性

$$= \frac{E_b \cdot t_b^3}{12(1 - \nu^2)}$$

E_b : 底版のヤング係数

t_b : 底版の厚さ

r : 円版中心からの距離

等厚円版もしくは等厚リング状版に軸対称な水平方向荷重が作用した場合に、それを円版の中心を先端に持つくさび形はりに置換するための、等価な水平ばねのばね定数は、以下のようにして求めることができる。

図-3を参照して、力の釣り合い方程式は次式で表される。

$$\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\phi - \sigma_r \cdot r \cdot d\phi - \sigma_\phi \cdot dr \cdot d\phi = 0 \dots \dots \dots (4)$$

上式を $dr \cdot d\phi$ で除して、整理すると

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\phi = 0 \dots \dots \dots (5)$$

ひずみ-変位の関係は次式で得られる。

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \dots \dots \dots (6-1)$$

$$\epsilon_\phi = \frac{u}{r} \dots \dots \dots (6-2)$$

ここに $\epsilon_r, \epsilon_\phi$: 半径および円周方向のひずみ

u : 水平方向変位

応力-ひずみの関係は次式で得られる。

$$\sigma_r = \frac{E_b}{1 - \nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\phi) \dots \dots \dots (7-1)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E_b}{1 - \nu^2} (\epsilon_\phi + \nu \epsilon_r) \dots \dots \dots (7-2)$$

式(5)を式(7)に代入して

$$\sigma_r = \frac{E_b}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \dots\dots\dots (8-1)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E_b}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \dots\dots\dots (8-2)$$

式(8)を式(5)に代入して

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

式(9)が等厚の円版もしくはリング状版に水平力が作用する場合の、水平方向変位の支配方程式である。

一方、くさび形はりの場合は、上述の式の誘導において $\sigma_\phi = 0$ として得られ、くさび形はりに水平力が作用する場合の水平変位の支配方程式は次式で得られる。

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

式(9)と(10)を比較することによって、式(9)左辺第3項は、円版の円周方向の剛性の影響を表す項であると考えて良いことが判る。式(9)の左辺第3項に $K_b \cdot r \cdot \theta$ を乗ずると

$$-K_b \cdot r \cdot \theta \frac{u}{r^2} = -\left(\frac{K_b}{r^2} \right) r \cdot \theta \cdot u = -k_h^b \cdot r \cdot \theta \cdot u \dots\dots\dots (11)$$

$$k_h^b = \frac{K_b}{r^2} \dots\dots\dots (12)$$

ここに K_b : 底版の軸剛性

$$= \frac{E_b t_b}{1-\nu^2}$$

式(12)は単位面積当たりの水平ばねのばね定数を表すと考えることができる。

以上述べたように、軸対称構造であるPCタンク側壁と底版を、ある幅で切り出したL字型はりとして解析するためには、側壁には式(2)で示す水平ばねを、底版には式(3)および(12)で示す回転および水平ばねを、はりの軸方向に付与してやれば良いこととなる。

図-1に示すような、鉛直および回転ばねに支承された変断面L型はりに、荷重が作用した場合の断面力を解析的に求めることは非常に面倒であり、それは一般に困難である。そこで図-1に示すような構造をさらに以下のようにモデル化して解析を行った。

側壁は軸(鉛直)方向を、底版は半径方向を適当な数に分割する。底版において断面の厚さが変化する部分の部材の厚さは、その両端での断面の厚さの平均値を用いた。底版部のくさび形はりで、部材幅が変化する所では、部材両端の円弧長の平均値を部材幅とした。このような区分的等幅等断面はりを用いた場合の、円周方向の剛性

に相当する節点に付与すべきばねのばね定数は、以下のよう求められる。

側壁の要素 $\bar{i}$ の両節点 i および $i+1$ に付与する、部材幅当たりの集中鉛直ばねのばね定数 K_i^w および K_{i+1}^w は、切り出し角度 $\theta = 1 \text{ rad.}$ とすると、部材幅は $a \cdot \theta = a$ となり、次式で求められる。

$${}_i K_i^w = \int_{x_i}^{\frac{x_{i+1}+x_i}{2}} k_v^w \cdot a \cdot dx = \frac{E_w}{a} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \frac{t_{w,i+1} + 3t_{w,i}}{4} \dots\dots\dots (13)$$

$${}_i K_{i+1}^w = \int_{\frac{x_{i+1}+x_i}{2}}^{x_{i+1}} k_v^w \cdot a \cdot dx = \frac{E_w}{a} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \frac{3t_{w,i+1} + t_i}{4} \dots\dots\dots (14)$$

ここに x_i, x_{i+1} : 節点 i および $i+1$ の側壁下端からの距離

$t_{w,i}, t_{w,i+1}$: 節点 i および $i+1$ の壁厚

よって、置換はりモデル全体系における節点 i に付与すべき鉛直ばねのばね定数 $\bar{K}_i^w$ は、要素 $\bar{i}$ および要素 $\overline{i+1}$ の節点 i におけるばね定数を加算することによって、次式で得られる。

$$\bar{K}_i^w = {}_i K_i^w + {}_{i+1} K_i^w \dots\dots\dots (15)$$

底版の要素 $\bar{j}$ の両節点 j および $j+1$ に付与する水平および回転ばねのばね定数 ${}_j K_{hj}^b, {}_j K_{hj+1}^b, {}_j K_{\theta j}^b$ および ${}_j K_{\theta j+1}^b$ は、くさび形はりの切り出し角度 $\theta = 1 \text{ rad.}$ 当たり次式で得られる。

$$\begin{aligned} {}_j K_{hj}^b &= \int_{r_j}^{\frac{r_{j+1}+r_j}{2}} k_h^b \cdot r \cdot \theta \cdot dr \\ &= \frac{E_b}{1-\nu^2} \frac{t_{j+1} + t_j}{2} \log \frac{r_{j+1} + r_j}{2r_j} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_j K_{hj+1}^b &= \int_{\frac{r_{j+1}+r_j}{2}}^{r_{j+1}} k_h^b \cdot r \cdot \theta \cdot dr \\ &= \frac{E_b}{1-\nu^2} \frac{t_{j+1} + t_j}{2} \log \frac{2r_{j+1}}{r_{j+1} + r_j} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_j K_{\theta j}^b &= \int_{r_j}^{\frac{r_{j+1}+r_j}{2}} k_\theta^b \cdot r \cdot \theta \cdot dr \\ &= \frac{E_b}{96(1-\nu^2)} (t_{bj} + t_{bj+1})^3 \log \frac{r_j + r_{j+1}}{2r_j} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_j K_{\theta j+1}^b &= \int_{\frac{r_{j+1}+r_j}{2}}^{r_{j+1}} k_\theta^b \cdot r \cdot \theta \cdot dr \\ &= \frac{E_b}{96(1-\nu^2)} (t_{bj} + t_{bj+1})^3 \log \frac{2r_{j+1}}{r_j + r_{j+1}} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

節点 i に付与すべき集中水平および回転ばねのばね定数 $\bar{K}_{hj}^b, \bar{K}_{\theta j}^b$ は、側壁の場合と同様に求められる。

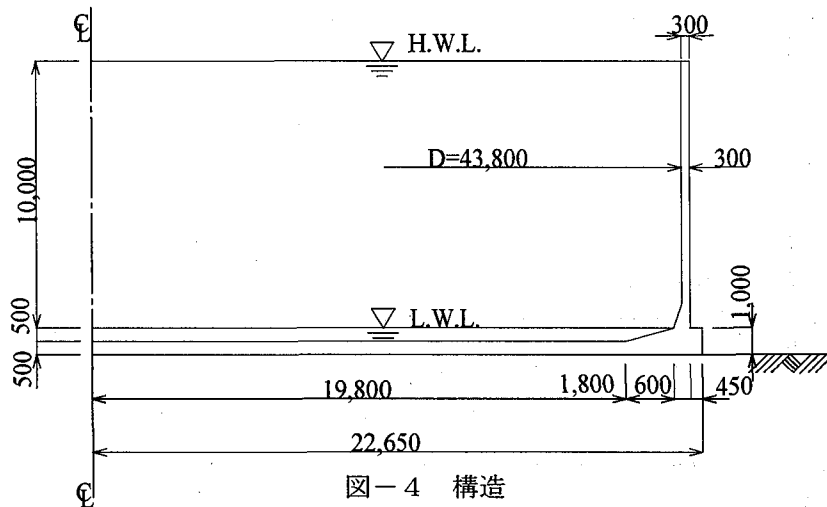


図-4 構造

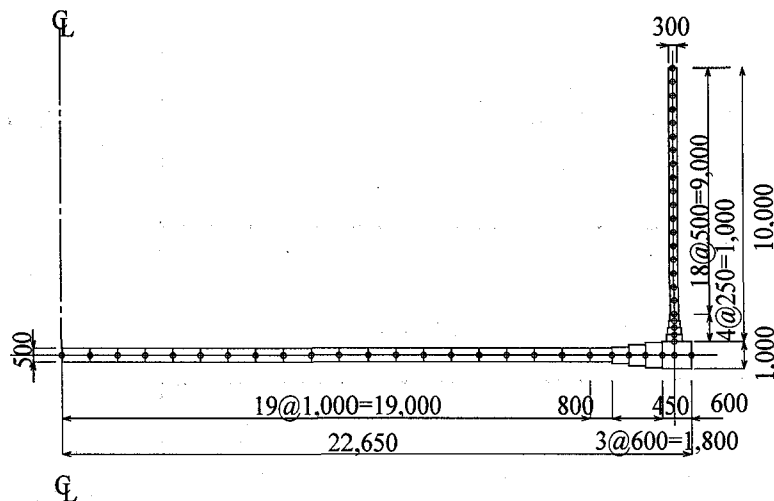


図-5 解析モデル

$$\bar{K}_{h,j}^b = K_{h,j-1}^b + K_{h,j}^b \dots (20)$$

$$\bar{K}_{\theta,j}^b = K_{\theta,j-1}^b + K_{\theta,j}^b \dots (21)$$

上記のことから、図-1に示すL型はりは、区分的に等断面および等幅のはりから成る構造系に置換され、その節点に付与すべき鉛直および回転ばね定数が、式(15)、(20)および(21)のように与えられたことになる。このL型はりモデルに、水圧などの荷重が作用した場合の断面力を求めるに当たっては、現在手軽に利用されている平面骨組解析プログラムを用いることによって、それは容易に解析することができる。

置換はりモデルの解析によって得られた節点変位、たわみ角および曲げモーメントより、各シェル応力は以下のように求められる。

$$\text{側壁: } N_{\phi,i} = \frac{E_w w_i}{a} \left(x' \frac{h_1}{x_1} \right) \dots (22)$$

$$M_{x,i} = \frac{\bar{M}_{x,i}}{a} \dots (23)$$

ここに $N_{\phi,i}$: 節点iにおける側壁の円周方向軸力

$M_{x,i}$: 節点iにおける側壁の鉛直方向曲げモーメント

w_i : 置換はりモデルの解析により得られた節点iの半径方向変位

$\bar{M}_{x,i}$: 置換はりモデルの解析により得られた節点iの曲げモーメント

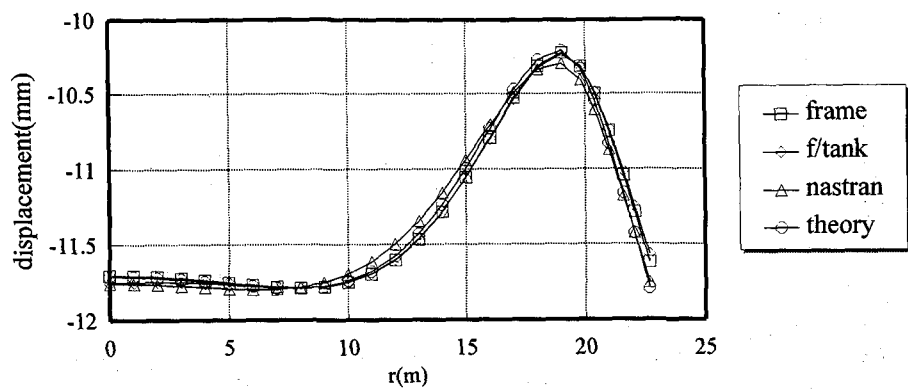
$$\text{底版: } M_{r,j} = \frac{\bar{M}_{r,j}}{r_j} \dots (24)$$

$$M_{\theta,j} = v \cdot M_{r,i} + \frac{D_b}{r_j} (1 - v^2) \phi_j \dots (25)$$

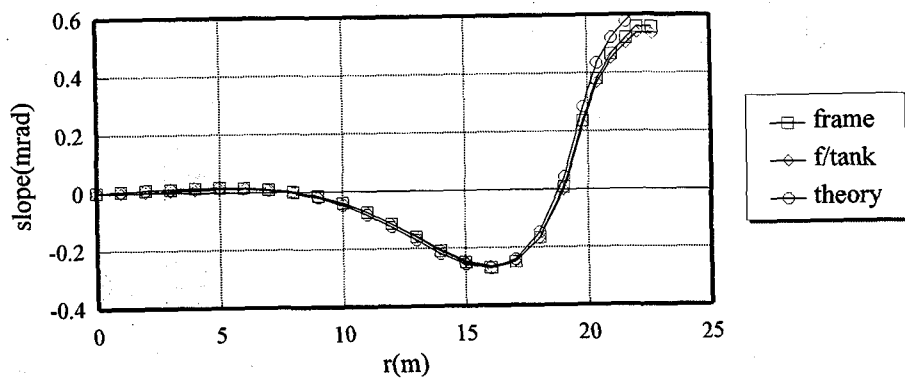
ここに $M_{r,j}$: 節点jにおける底版の半径方向曲げモーメント

$M_{\theta,j}$: 節点jにおける底版の円周方向曲げモーメント

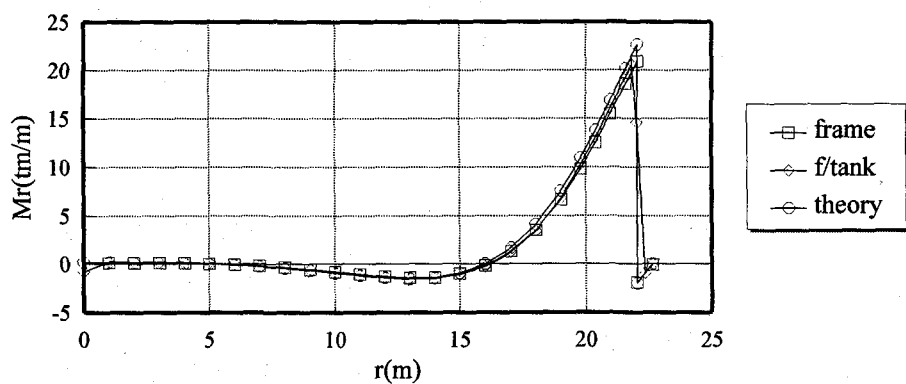
$\bar{M}_{r,j}$: 置換はりモデルの解析により得られた節点jの曲げモーメント



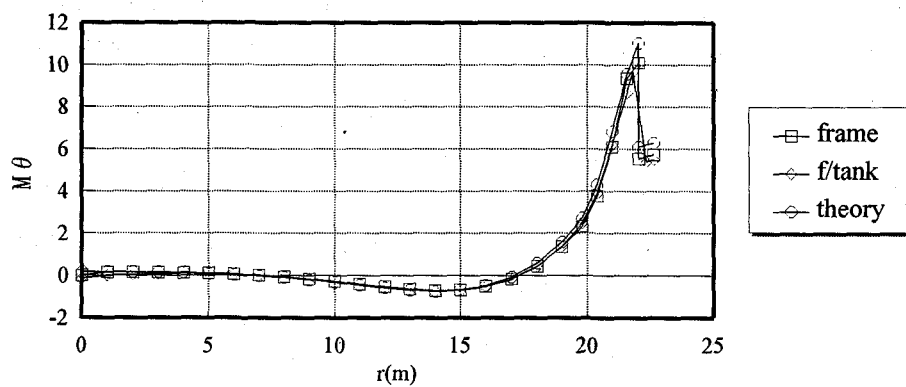
(a)鉛直方向変位



(b)たわみ角

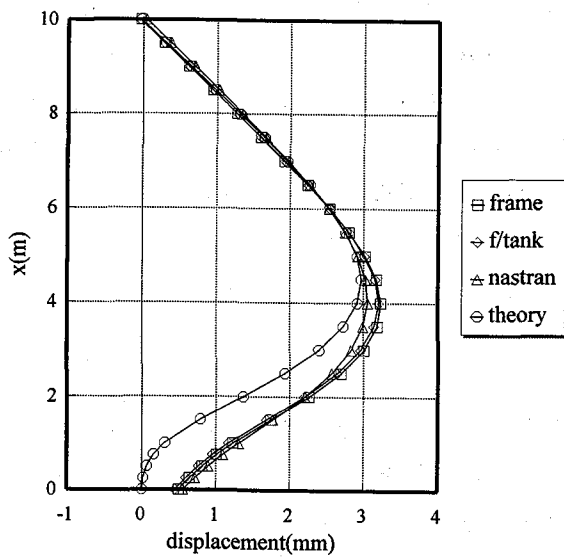


(c)半径方向モーメント

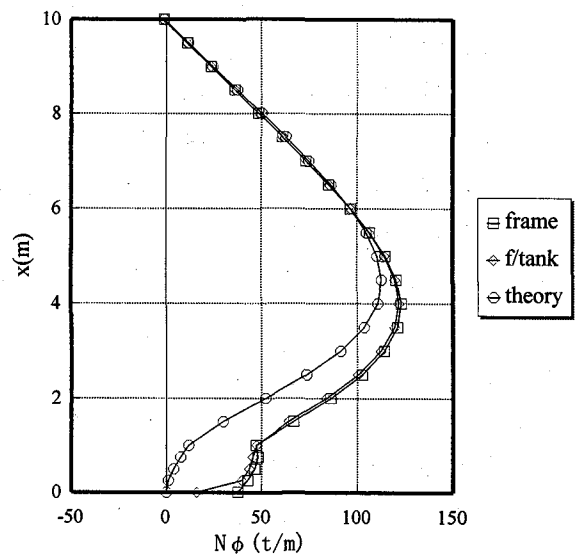


(d)円周方向モーメント

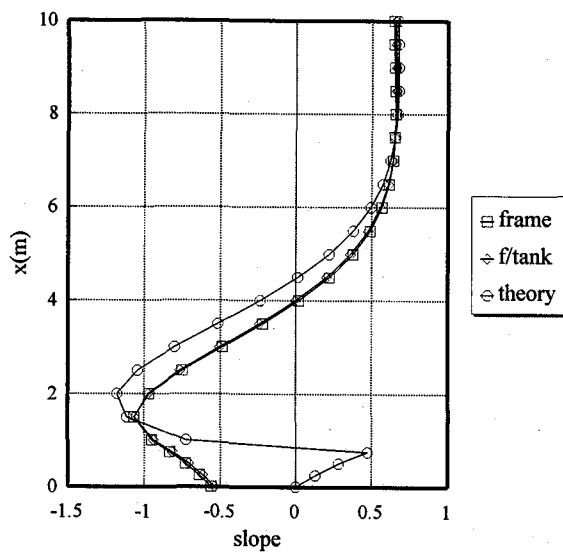
図-6 底版の解析結果



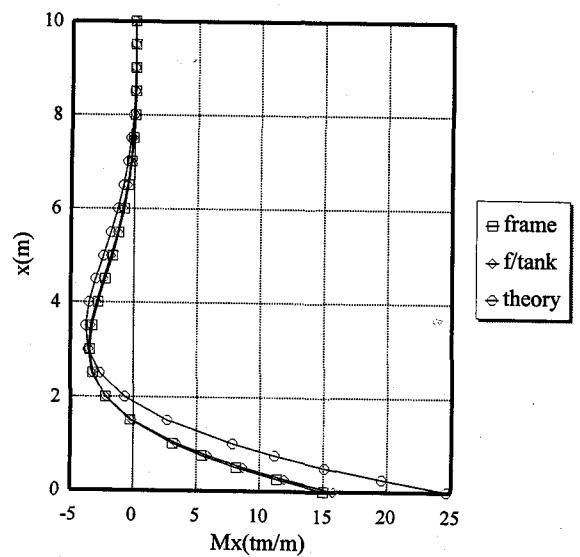
(a)半径方向変位



(b)円周方向軸力



(c)たわみ角



(d)鉛直方向曲げモーメント

図-7 側壁の計算結果

ϕ_j : 置換はりモデルの解析により得られた節点jのたわみ角

側壁下端は底版上面に位置し、底版の図心とは一致しないので、側壁下端と底版図心とを接続するはりを考える。このはりは軸（鉛直）方向には力を伝達するものの、円周方向には剛性を有しないものでなくてはならない。置換はりモデルでは、円周方向の剛性は外部ばねによっ

て付与されるので、接続部材では円周方向の剛性に相当する外部ばねは必要としない。この接続部材の目的は、自身は変形することなく、底版図心位置でのたわみ角を底版上面（側壁下端）に伝達することであるから、他の部材と比較して大きな剛性を与えるものとする。

3. 有限要素法 (FEM)

著者らの提案する解析法の妥当性と有用性を検討するために、FEMによる解析を行った。FEM解析では、I) 三角形断面軸対称リング要素 (ソリッド要素) および II) 構造を線材置換する軸対称シェル要素を用いた。II) の場合の構造のモデル化は、平面骨組解析の場合と同様に、側壁および底版の軸線は直線とし、断面の厚さが変化する部分では、要素両端の厚さの平均値を用いて部材の剛性を評価した。側壁下端と底版図心を接続する部材は、異方性要素として軸方向にのみ大きな剛性を与えた。

4. 数値計算結果と考察

解析に用いた構造の断面図を図-4に示す。平面骨組解析およびFEM解析II) の場合の構造モデル図を図-5に示す。上述のどちらの場合についても、側壁下半分および底版外側半分においてその分割を図-5の倍にした時の結果と比較したところ、それぞれ結果に大きな差がなかったため、分割数は図-5の場合で十分であると判断した。また、側壁下端と底版図心軸とを結ぶための仮定の接続部材の剛性を1桁変更した場合にも、結果には殆ど差が見られなかった。FEM解析I) では、側壁および底版の等厚部分を4層に分割した、節点数839、要素数1,359の場合の解析例を、比較のために用いた。

計算に用いたヤング係数は $2.8 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ 、ポアソン比は0.2である。

計算結果の一部を図-6および7に示す。図中frameとあるのは平面骨組解析、ftankとあるのはFEM解析II)、nastranとあるのはFEM解析I)、theoryとあるのは側壁と底版を切り離し、側壁下端完全固定とした場合の解析解^{7),8)}の結果であることを示す。

図-6の底版に関しては、FEM解析I) の結果が、他の結果と僅かに異なっている部分があるが、それを除けばどの結果も良く一致している。図-7では、側壁下端完全固定とした解析解の結果が、特に側壁下端部付近で他の結果と異なっている。平面骨組解析とFEM解析の結果は、底版の場合と同様に、FEM解析I) の結果が平面骨組解析やFEM解析II) の結果と僅かに異なっている部分があるのを除き、両者は良く一致している。

側壁と底版とを一体として解析した結果、底版では両者を切り離して解析した結果と大差無く、側壁では側壁下端付近に両者に差が見られたことから、底版は側壁と分離して解析しても実務設計上は問題ないものと考えられる。一方、側壁は側壁下端完全固定として解析することには多少の無理があると考えられるので、底版や地盤の力学的特性を考慮した等価ばねを定め、このばねを側壁下端に設置してやることにより、近似的には側壁と底版を分離して解析しても良いのではないかと考えられる。

5. 結論

側壁が底版に固定された構造であるPCタンクに、静水圧のような軸に対して対称に荷重が作用した場合の断面力を、平面骨組解析プログラムを用いて、側壁と底版を一体として取り扱って求めることができる、容易で精度の良い方法を提案した。この方法は、高い精度で行ったFEM解析によって得られた結果と良く一致し、著者らの提案する方法の妥当性と有用性が示された。

[参考文献]

- 1) 中島他: プレストレストコンクリート製LNGタンクの設計および施工, プレストレストコンクリート, Vol. 34, No. 5, SEPT-OCT. 1992
- 2) 吉岡, 大谷, 高西: 直接基礎PCタンク底版の断面力計算法, 構造工学論文集, Vol. 38A, 1992. 3
- 3) 吉岡, 大谷, 高西: 逆対称荷重が作用するPCタンク側壁の断面力計算法, 土木学会論文集, Vol. 502/V-25
- 4) 吉岡, 大谷, 高西: 逆対称荷重を受ける直接基礎PCタンク底版の断面力計算法, 構造工学論文集, Vol. 39A, 1993. 3
- 5) Priestley M.J.N.: Analysis and Design of Circular Prestressed Concrete Storage Tanks, PCI JOURNAL, July- August, 1985
- 6) Bercea et al: Berechnung rotationssymmetrischer Konstruktionen unter rotationssymmetrischer Belastung, STRASSE BRUECKE TUNNEL, 11/1974
- 7) 吉岡, 久松, 出光: ハンチを有する壁下端固定PCタンクの断面力簡易計算法, 土木学会論文集, No. 433/V-5, 1991. 8
- 8) Markus, G: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke, Werner-Verlag.

(1996年9月6日受付)