

MATLABソフトウェアによる吊床版歩道橋の 歩行者励起振動の解析と制御設計

VIBRATION ANALYSIS AND CONTROL DESIGN OF THE STRESS RIBBON BRIDGE DUE TO A PEDESTRIAN BY MATLAB SOFTWARE

岡林隆敏*, 馬渡あかね**, 加賀敏明***

Takatoshi OKABAYASHI, Akane MAWATARI and Tosiaki KAGA

*工博 長崎大学助教授 工学部社会開発工学科 (〒852 長崎県長崎市文教町1-14)
** 長崎大学大学院 工学研究科 (〒852 長崎県長崎市文教町1-14)
***工修 長崎大学大学院 海洋生産科学研究科 (〒852 長崎県長崎市文教町1-14)

This study is concern with vibration analysis and control design for the multi-degree of freedom system by MATLAB software. As MATLAB software has not prepare the functions for structural analysis, we write programs for vibration analysis of the three dimensional frame structures. Furthermore, we present the design methods of vibration control using by the state observer for the multi-degree of freedom system. Programing environment of MATLAB for control design of the multi-degree of freedom system from vibration analysis to vibration control is formulated. The proposed design process is applied to control design of the stress ribbon bridge vibration due to a pedestrian. As numerical results, we confirm effectiveness of control using by the state observer for the bridge vibration.

Key Words: vibration control, finit element method, MATLAB, obserber, stress vibration bridge

1. はじめに

土木構造物の振動対策として、パッシブあるいはアクティブな振動制御技術を適用することが現実的な課題となっている。これまで、土木構造物の振動対策は、構造物の剛性や質量を変更させることによることであった。このような設計は、構造物を有限要素法⁽¹⁾⁽²⁾などによりモデル化し、振動解析⁽³⁾⁽⁴⁾および応答解析を実施することによりなされた。そこで、研究者や技術者が独自のプログラムを作成し、また、様々な汎用ソフトウェアが開発されてきた。土木構造物の振動制御、とりわけアクティブ振動制御においては、制御器となるパーソナルコンピュータの演算能力に対応して、制御すべき構造物のモデルを低次元化する必要がある。さらに、制御を実施した構造物の動的挙動を把握し、動的応答解析を繰り返す、制御器のパラメータを設計する必要がある。そのために、制御工学の分野では、制御モデルの構成と制御器の設計を支援する制御用CADソフトウェアが開発されてきた。このようなソフトウェアの1つにMATLAB⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾がある。

土木構造物、中でも橋梁の振動制御は、制御工学における制御対象としては、特殊化した事例である。すなわち、第1には制御対象モデルの次元が大きい点、第2には制御すべき挙動が振動に限定される点、第3には構造物の規模が大きいためにアクチュエータのパワーに限界がある点である。

MATLAB言語は、マトリクス演算が通常の算術演算と同様に記述でき、さらに様々な関数群が準備されているために、FORTRANやC言語によるプログラムの記述に比べて、プログラムが極めて圧縮されるばかりでなく、式の記述が視覚化される特徴がある。そこで、本研究では構造解析によるモデリングから制御設計に至る作業を一環した行程とするために、MATLABによる2次元および3次元の骨組構造解析のプログラムを作成した。特に、吊橋の橋梁では、多自由度系の制御が必要であり、構造物のモデリングと制御設計が、同じプログラム環境で実行できることが望ましいと考えられる。さらに、土木構造物は、多自由度系でモデル化されるために、振動制御においては、複数のモードを同時に制御する必要がある。このために、少ない観測点の情報から、全状態量を推定する必要がある。そこで、多自由度系の振動に適したオブザーバの設計方法を示した。本論文では、線形モデルを対象としている。

本論文はこれらの作業手順に基づいて、歩行者による吊床版橋振動⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾を事例にして、3次元有限要素法による構造解析を行い、さらにオブザーバによる状態推定とこれを適用した振動制御の有効性を検討したものである。

2. 数値解析ソフトウェアMATLABについて

(1) MATLABによる振動解析と制御器の設計

MATLAB⁽¹²⁾⁽¹³⁾は、数値計算、及びグラフィック機能が優れている数値計算ソフトウェアである。しかも、C言語やFORTRANなど複雑なプログラミングが必要な言語と比べて、簡易言語を用いたプログラミングが可能であり、複雑な行列演算も容易に行うことができる。このようなMATLABの特徴を生かして、土木構造物の振動制御の設計が可能なプログラム開発環境を整備した。図 - 1 に構造解析から振動制御の設計にいたる計算の流れを示した。

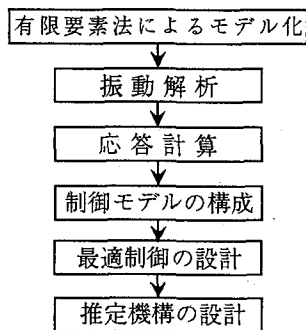


図 - 1 制御システム設計

本論文では、構造解析やオブザーバーの設計などMATLABに備わっていない関数を補いながら、一連の計算の手順を完成させている。

(2) MATLAB言語について

MATLABは、matrix laboratoryの略であり現在では、C言語が使われており、最近ではMATLAB Ver.4.2まで開発されている。最近の利用状況として、大学では応用線形代数や、その他の分野の教育用ツールとして用いられ、また産業界では、工学技術の問題解決に利用されており、さらには行列で公式化された特殊用途の問題解決にも利用されている。

MATLABは会話型のシステムで、基本データ要素は行列である。現在MATLABシステムはMacintosh, Ms - WindowsあるいはUNIXなどの環境において使用可能である。MATLABのディスクファイルは、ファイル名の最後に.mが付けられるため、M - ファイルと呼ばれ、テキストエディターまたはワードプロセッサでプログラミングできる。

表 - 1 基本モジュールの主なコマンド

	コマンド	機能
基本行列	eye	単位行列の作成
	rand	一様分布の乱数の作成
	randn	正規分布の乱数の作成
	zeros	ゼロ行列の作成
行列関数	det	行列式
	trace	対角要素の和
	chol	コレスキー分解
	eig	固有値及び固有値ベクトル
	expm	行列の指数計算
フーリエ変換	fft	離散フーリエ変換
	ifft	逆離散フーリエ変換
微分方程式	ode23	常微分方程式の数値解の計算
グラフィック	plot	2次元の線形プロット

表 - 2 Control Toolboxの主なコマンド

	コマンド	機能
モデルの作成	feedback	システムをフィードバック結合
	series	システムを直列結合
	cloop	システムの閉ループ結合
	ord2	2次システムのA,B,C,D行列作成
方程式の解	c2d	連続系から離散系への変換
	step	ステップ応答
	impulse	インパルス応答
時間応答	lsim	任意の入力に対する応答
	ltifr	周波数応答関数
	bode	ボード線図
周波数応答		
制御設計	are	代数リカッチ方程式の解
	lyap	連続系でのリアプノフ方程式の解
	lqr	線形2次形式レギュレータの設計
	place	極配置

表 - 3 作成した関数

不規則波形の合成	パワースペクトル密度を与えて不規則波形を合成する
ベクトル形式のルンゲクッタ法	時変系の微分方程式の解析
マトリクス形式のルンゲクッタ法	時変系の共分散方程式の解析
共分散方程式のPade近似	共分散方程式の高速計算

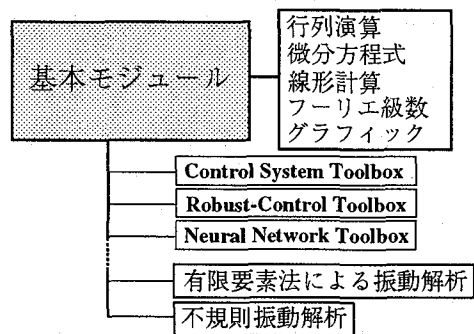


図 - 2 MATLABの基本モジュールと各種のToolbox

(3) MATLABの構成

MATLABは数値解析、行列計算、信号処理及びグラフ表示の機能を統合した基本モジュール⁽⁵⁾と、特定分野の解法を集めたToolboxより構成されている。この中には、制御設計で主に利用するToolboxとして、ControlToolbox⁽⁶⁾がある。これらの主なMATLABコマンドを表 - 1、表 - 2に示す。また著者らがこれまでに、独自に開発したコマンド⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾がいくつかあるが、これを表 - 3に示す。MATLABの構成は図 - 2のようになっている。

3. 3次元骨組構造モデルによる振動解析とMATLABプログラム

(1) 3次元骨組構造モデルと振動解析

全節点数が m 節点から構成される3次元骨組構造モデルを考える。部材座標系 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ における、部材要素の変位と部材力を図 - 3のように定義する。

i 節点の節点変位ベクトル、部材力ベクトルを、

$$\bar{\delta}_i = [\bar{u}_i \ \bar{v}_i \ \bar{w}_i \ \bar{\theta}_{xi} \ \bar{\theta}_{yi} \ \bar{\theta}_{zi}]^T \quad (1)$$

$$\bar{f}_i = [\bar{f}_{xi} \ \bar{f}_{yi} \ \bar{f}_{zi} \ \bar{f}_{Mxi} \ \bar{f}_{Myi} \ \bar{f}_{Mzi}]^T \quad (2)$$

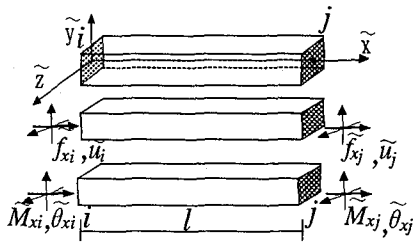


図 - 3 部材座標系における変位と部材力の定義

で定義する。

ここに、 $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{w}_i$ はそれぞれ i 節点における $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 軸方向における変位、 $\tilde{\theta}_{xi}$ は $\bar{x}$ 軸方向における回転角であり、 $\tilde{f}_{xi}, \tilde{f}_{yi}, \tilde{f}_{zi}$ はそれぞれ i 節点における $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 軸方向の部材力、 $\tilde{f}_{Mxi}$ は $\bar{x}$ 軸方向における回転モーメントである。 $i-j$ 節点から構成されるはり要素の節点変位ベクトルと部材力ベクトルを、

$$\tilde{\delta}_e = [\tilde{\delta}_i^T \quad \tilde{\delta}_j^T]^T \quad (3)$$

$$\tilde{f}_e = [\tilde{f}_i^T \quad \tilde{f}_j^T]^T \quad (4)$$

と定義する。部材座標系における節点変位と部材力は、要素剛性マトリクスにより、

$$\tilde{f}_e = \tilde{k}_e \tilde{\delta}_e \quad (5)$$

の関係になる。この要素剛性マトリクスは、(6)式で与えられる。

$$\tilde{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 E : ヤング係数、 A : 要素断面積、 l : 要素の長さ、 G : セン断弾性係数、 J : 要素断面に対するねじり定数である。 I_y, I_z : $\bar{y}$ と $\bar{z}$ 軸まわりの断面 2 次モーメントである。 $\bar{y}, \bar{z}$ 軸は $\bar{x}$ 軸と右手系をなし、かつ節点 i を通るように定める。なお、 $\bar{x}$ 軸方向を材軸方向とし、 $\bar{y}, \bar{z}$ 軸方向を主軸方向とする。ここで、 $i-j$ 部材の部材座標系から全体座標系への変換行列⁽¹⁾⁽²⁾を $T(12 \times 12)$ とすると、全体座標系における節点変位 δ_e と部材力 f_e の関係は、

$$f_e = k_e \delta_e \quad (7)$$

で与えられる。ここに、全体座標系における要素剛性マトリクスは、

$$k_e = T^{-1} \tilde{k}_e T \quad (8)$$

となる。

全体座標系の要素剛性マトリクスが得られると、有限要素法における標準的な方法⁽¹⁾⁽²⁾により、全節点 m に対する、全体剛性マトリクス k を構成することができる。

m 節点の変位ベクトルから構成される全節点変位を

$$y(t) = [\delta_1(t)^T \quad \dots \quad \delta_m(t)^T]^T \quad (9)$$

とする。変数の数は $(6m)$ となる。節点の質量マトリクスを $m(6m \times 6m)$ とすると、 m 節点から構成される構造物の運動方程式は、

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0 \quad (10)$$

となる。この運動方程式は、次元が大きくなるので、慣性が小さい節点については、静的な拘束のみと考え、慣性力を無視する。慣性を考慮した変数を $y_1(t)$ 、慣性を無視した変数を $y_2(t)$ として、運動方程式を次のように分割する。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

なお、 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ はそれぞれ m_1 および m_2 次元ベクトルである。この方程式により、縮約された次の運動方程式が得られる。

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + k_1 y_1(t) = 0 \quad (12)$$

ここに、縮約された系の剛性マトリクスは、

$$k_1 = (k_{11} - k_{12} k_{22}^{-1} k_{21}) \quad (13)$$

% 振動解析メインファイル

```
[at]=stfm(I,J,X,Y,Z,np,ne);
cm=chol(mt); % コレスキー分解
aa=inv(cm)*at*inv(cm);
[x,wf]=eig(aa); % 固有値解析
md=inv(cm)*x; % 振動モード
frr=wf^(.5)/(2*pi); % 振動数
```

% 剛性行列ファンクションファイル

```
function [at]=stfm(I,J,X,Y,Z,np,ne);
at=zeros(np*6);
for L=1:ne % 部材番号
    i=I(L);j=J(L); % 節点番号
    Te=Tr(i,j); % 変換行列
    Ek=Er(i,j); % 要素剛性行列
    Ekk=Te*Ek*Te;

    il=ones(1,6)*(i*6);
    jl=ones(1,6)*(j*6);
    n=[5 4 3 2 1];
    II=[il-n jl-n]; % 全体剛性行列の位置
    JJ=[1:12]; % 要素剛性行列の位置
    at=(II,II)=at+(II,II)+Ekk(JJ,JJ);
end % 全体剛性行列の計算
```

図 - 4 振動解析におけるプログラム

となる。(12)式の固有値解析を行うことにより、 m_i 個の

$$\omega = [\omega_1 \cdots \omega_{m_i}]^T \quad (14)$$

固有円振動数と、 $(m_i \times m_i)$ 次元の振動モードマトリクス

$$\Phi = [\phi_1 \cdots \phi_{m_i}] \quad (15)$$

が得られる。なお、 ϕ_k は k 次元振動モード m_i 次元ベクトルである。各振動モードは、

$$\Phi^T m_i \Phi = I \quad (16)$$

となるように、規準化されているものとする。

(2) MATLABのプログラミング

図 - 4に、全体剛性行列の作成と固有値解析のプログラムを示した。全体剛性行列作成のfunctionにおいて、 I, J は部材と各節点の対称ベクトル、 X, Y, Z は、要素の座標ベクトル、また np と ne は全節点数と全要素数である。

4. 応答解析の定式化とプログラミング

(1) 応答解析の定式化

縮約化した運動方程式の変数を改めて m 個と考え、 p 個の外力が作用した場合を考える。

$$y(t) = [y_1(t) \cdots y_m(t)]^T \quad (17)$$

$$f(t) = [f_1(t) \cdots f_p(t)]^T \quad (18)$$

減衰を考慮した構造物の方程式は、

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = b_1 f(t) \quad (19)$$

となる。ここで、 c は $(m \times m)$ の減衰定数行列である。 b_1 は $(m \times p)$ 行列である。モーダル解析を適用して、規準座標を $q(t)$ とすると変位応答は、

$$y(t) = \Phi q(t) \quad (20)$$

で表される。 c と k が、 Φ により対角化される性質により、

$$\Phi^T c \Phi = [2h_i \omega_i] = H, \Phi^T k \Phi = [\omega_i^2] = \Omega \quad (21)$$

となる。この関係より非連成の規準座標の方程式

$$\ddot{q}(t) + H\dot{q}(t) + \Omega q(t) = \Phi^T b_1 f(t) \quad (22)$$

が得られる。制御問題の定式化においては、状態空間表示を用いる。そこで、規準座標の状態変数を、

$$X(t) = [q(t)^T \quad \dot{q}(t)^T]^T \quad (23)$$

で定義し、観測値を m 節点の変位とすると、(19)式の運動方程式は、次のように表示される。

$$X(t) = AX(t) + B_1 f(t) \quad (24)$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (25)$$

なお、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega & -H \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \Phi^T \end{bmatrix}$$

$$C = [\Phi \quad 0]$$

である。

連続系の応答解析には、Runge - Kutta法やNewmark - β 法があるが、MATLABにはRunge - Kutta法による関数としてode45, impulse, lsim, stepなどが準備されている。

次に、周波数応答を求める。 $X(t), f(t)$ および $Y(t)$ のフーリエ変換を、 $X(i\omega), Y(i\omega)$ で定義する。なお、 $X(t)$ のフーリエ変換は、

$$X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt \quad (26)$$

で与えられる。(24),(25)式の両辺をフーリエ変換すると応答 $Y(i\omega)$ の周波数応答関数を求めることができる。

$$Y(i\omega) = CH(i\omega)BF(i\omega) \quad (27)$$

$$H(i\omega) = (i\omega I - A)^{-1}$$

```
%離散化法による応答計算
j=[1 2 3 4 7 8 9 10]; %曲げ振動モード番号
N=15;
h=0.005;
P=0.060*1.6;v=2.9;ww=2.8;
dt=0.02;t=0:dt:40; %dt:時間刻みt:計算時間
x1=3*L/8; %観測点
[mode1]=modex(np,X,L,N,x1); %観測点モード成分

A=[zeros(jn) eye(jn)
   -diag([w.^2]) -diag([2*h.*w])];%システム行列
B=eye(jn*2); %外力の係数行列
C=[mode1(j)' zeros(1,jn)
   zeros(1,jn) mode1(j)'];%観測行列
[Ad,Bd]=c2d(A,B,dt); %離散系への計算
x1=zeros(jn*2,1); %初期条件
y1=[0;0]; %初期条件
for i=2:n
    x2=v*i*t; %歩行者の移動距離
    [mode2]=modex(np,X,L,N,x2);%加振点モード
    B1=[zeros(jn,1);mode2(j)'];%移動換算外力
    x1=Ad*xx+B1*Bd*P*(sin(ww*i*dt));
    xx=x1;y1=C*x1;
    x=[x x1];y=[y y1];
end

%振動モードの計算
function [mode]=modex(np,X,L,N,x);
load md.mat; %離散モードの読み込み
kk=[1:N];
for i=1:np
    xxx(i)=X(i)-X(1); %基準点からの距離
    dxx(i)=X(i)-X(i-1); %各部材の長さ
    xx=[xx xxx];
    dx=[dx dxx];
end
for k=1:N
    a=md*(sin(pi*k*xx/L).*dx)/L;%係数aik
    b=md*(cos(pi*k*xx/L).*dx)/L;%係数bik
    aa=[aa a];
    bb=[bb b];
end
b0=md*dx/L; %直流成分
mode=b0+aa*[sin(pi*kk*x/L)]
    +bb*[cos(pi*kk*x/L)];
```

図 - 5 応答解析におけるプログラム

MATLABでは、周波数応答を求める関数として、litr、bodeなどがある。

(2) 運動方程式の離散表示

状態方程式(24)式を離散表示する。 $t=t_k$ 時刻の $X(t)$ を $X(t_k)=X_k$ で表示する。時間刻みを $t_{k+1}-t_k=\Delta t$ とする。状態遷移行列を $e^{A\Delta t}$ とした場合、状態方程式(24)式は、次のように離散化される。

$$X_{k+1}=D_1X_k+D_2B_1f_k \quad (28)$$

$$Y_{k+1}=CX_{k+1}$$

$$D_1=e^{A\Delta t}$$

$$D_2=(e^{A\Delta t}-I)A^{-1}$$

状態遷移行列 $e^{A\Delta t}$ を近似的に表示するために、Pade近似を用いる。

$$e^{A\Delta t}=(I-A\frac{\Delta t}{2})^{-1}(I+A\frac{\Delta t}{2}) \quad (29)$$

MATLABには状態方程式の離散近似を行う関数として c2d,dimpulse,d-lsimなどが準備されており、運動方程式(24)式から(28)式への変換が行われる。

(3) MATLABによるプログラミング

図-5に応答解析のプログラムを示した。応答解析は、離散化法で実施している。前半が応答解析のプログラムで、後半は後の(50)、(51)式で表されるフーリエ級数のプログラムである。MATLABコマンドで、連続系のシステム行列 A と B を離散系の係数 A_d と B_d に変換している。

5. 振動制御の定式化とプログラミング

(1) 最適レギュレータ理論による振動制御

m 個の変数を持つ構造物に、 p 個の外力と q 個の制御力が作用するものとする。このとき運動方程式は、

$$m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=b_1f(t)+b_2u(t) \quad (30)$$

となる。制御力 $u(t)$ は、

$$u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) & \cdots & u_q(t) \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

で与えられる。ここに、 b_2 は $(m \times q)$ 行列である。

振動制御を行う場合はモード解析を適用して、 r 次振動まで考慮し低次元化した制御モデルを構成する。

$$q_r(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) & \cdots & q_r(t) \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

低次元化した状態変数を、

$$X_r(t)=\begin{bmatrix} q_r(t)^T & \dot{q}_r(t)^T \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

とする。低次元化した状態方程式は、

$$\dot{X}_r(t)=A_rX_r(t)+B_{1r}f(t)+B_{2r}u(t) \quad (34)$$

$$Y_r(t)=C_rX_r(t) \quad (35)$$

となる。ここに、制御モデルは、構造解析モデルに対し低次元化したものとして構成されるので、以後本論文において、制御モデルとして、添字 r を省略する。

最適レギュレータ理論では、全状態変数に比例した制御力を作用させる。

$$u(t)=-KX(t) \quad (36)$$

2次形式で表された評価関数

$$J=\int_0^\infty [X(t)^T QX(t)+u(t)^T Ru(t)]dt \quad (37)$$

を最小にするような最適ゲイン行列 K を求める。ここに、 Q と R は重み行列で、 Q は非負定、 R は正定な対称行列である。

最適ゲインマトリクス $K^{(16)(17)}$ は、次の手順で求められる。

$$PA+A^TP-PB_2R^{-1}B_2^TP+Q=0 \quad (38)$$

リカッチ方程式の正定な唯一の解 P を用いて、最適ゲイン行列 K は、

$$K=R^{-1}B_2^TP \quad (39)$$

として得られる。

(2) MATLABによるプログラミング

図-6に最適レギュレータのプログラムを示した。 Q, R は、評価関数(37)式の重み行列である。areは、定常リカッチ方程式のMATLABのコマンドである。

```
%最適ゲインマトリクス
n=10; %全モード個数
Q=eye(n*2); %評価関数の重み
R=0.7; %評価関数の重み
x3=3*L/16; %制御点
[mode3]=modex(np,X,L,N,x); %制御点モード成分
B2=[zeros(n,1);mode3(j)];
BB=B2*inv(R)*B2';
P=are(A,BB,Q); %リカッチ方程式の解
K=inv(R)*B2'*P; %ゲインマトリクス
```

図-6 最適レギュレータのプログラム

6. オブザーバーによる振動制御

(1) オブザーバーの定式化

多自由度系の構造物の振動制御を考える場合、 r 次振動までの振動の制御に状態フィードバックを適用すると、 $2r$ 個の観測値が必要になる。すなわち、構造物に、 r 個の検出器を設置して、その点の変位と速度を観測しなければならない。そこで、少ない観測点のデータにより、全状態変数を推定するオブザーバー理論⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾やカルマンフィルターの理論が必要になる。オブザーバーには、全次元オブザーバーと、最小次元オブザーバーがあるが本論文では、全次元オブザーバーを設計する。

構造物から得られる観測値を $Y(t)$ とする。ここでは、

$$\bar{Y}(t)=\begin{bmatrix} \bar{y}_1(t) & \cdots & \bar{y}_s(t) \end{bmatrix}^T \quad (40)$$

の観測値が得られているものとする。制御モデルの方程式に対して、オブザーバーの方程式は次式で与えられる。

$$\dot{\hat{X}}(t)=A\hat{X}(t)+B_1f(t)+B_2u(t)+G\{\bar{Y}(t)-\hat{Y}(t)\} \quad (41)$$

$$\hat{Y}(t)=C\hat{X}(t) \quad (42)$$

$\hat{X}(t)$ はオブザーバーによる推定値であり短い時間で

$$\hat{X}(t) \rightarrow X(t)$$

となるように、オブザーバーのゲインマトリクス G を決定する。推定値 $\hat{X}(t)$ と、真値 $X(t)$ の誤差を

$$\varepsilon(t) = \hat{X}(t) - X(t) \quad (43)$$

とする。(41)式から(34)式を引くと、

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - G\bar{C})\varepsilon(t) \quad (44)$$

の式が得られる。 G の値を選ぶことにより $(A - G\bar{C})$ の固有値を操作して、速やかに $\hat{X}(t)$ が $X(t)$ になるようにオブザーバーを設計する。図 - 7 にオブザーバーを用いた制御システムのモデルを示す。

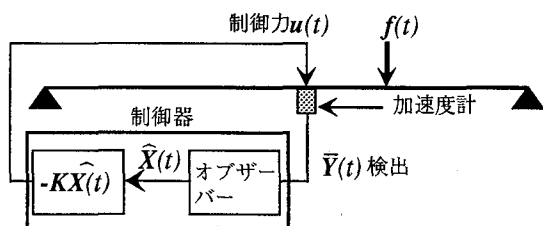


図 - 7 オブザーバーを用いた制御システム

(2) オブザーバーの設計

オブザーバーの設計には、様々な手法があるが、本論文では極配置法を用いる。極配置法には、次のような正田らの方法⁽¹⁰⁾を採用する。極配置における希望固有値としては、(45)式において、実部に ξ_k 虚部に η_k を入れる。

$A^T - \bar{C}^T G^T$ の希望固有値 λ を

$$\lambda_k = \xi_k + i\eta_k \quad \lambda_{k+1} = \xi_k - i\eta_k \quad (k=1, m) \quad (45)$$

と仮定する。任意の $(q \times m)$ 行列

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m] \quad (46)$$

を仮定する。対応する固有ベクトルを

$$v_k = f_{1k} p_k - g_{2k} p_{k+1} \quad (47)$$

$$v_{k+1} = f_{1k} p_{k+1} + g_{2k} p_k$$

と置く。ここに、

$$f_{1k} = [(A^T - \xi_k I)^2 + \eta_k^2 I]^{-1} (A^T - \xi_k I) C^T \quad (48)$$

$$g_{1k} = [(A^T - \xi_k I)^2 + \eta_k^2 I]^{-1} [\eta_k C^T]$$

である。このとき、フィードバック数行列 G^T は、 $(q \times m)$ 行列となり、次式で与えられる。

$$G^T = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m] [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]^{-1} \quad (49)$$

ここで、 $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]$ は正則であるものとする。

(3) MATLABによるプログラミング

図 - 8 は、オブザーバの最適ゲインを極配置から求めるプログラムである。 p は任意の行列である。 αp と βp は、推定する希望固有値のベクトルである。(46)式から(49)式をプログラム化した。このようにMATLABでは、行列演算のイメージでプログラムの記述ができるので、プログラムが複雑にならないだけでなくそのイメージが保存される。このために、プログラム開発環境が著しく向上する。

```
%極配置設計
P=[1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0]*0.1;
                                     %任意の行列
                                     %振動次数
n=10;
U=eye(n*2);
e=1.1;
alp=-h*w*e;                         %希望固有値実部
bet=w*e;                             %希望固有値虚部
for i=1:n
    V1=[V1 inv((A'-alp(i)*U)^2
            +bet(i)^2*U)*(A'-alp(i)*U)*C'];
    V2=[V2 inv((A'-alp(i)*U)^2
            +bet(i)^2*U)*bet(i)*C'];
    v1=V1*P(i)-V2*P(i+1);
    v2=[v1,V1*P(i+1)+V2*P(i)];
    vv=[vv,v2];
end
G=(P*vv)';                         %ゲイン行列
```

図 - 8 オブザーバー理論のプログラム

7. 吊床版橋の振動解析と応答解析

(1) 構造物の諸元と有限要素モデル

本研究における振動解析の事例として吊床版橋⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾である。歩道橋の歩行者による振動と、その制御について考える。振動解析の対象とする吊床版橋は、大分県内にある、橋長 139.0m、吊支間長 62.5m の 2 系間連

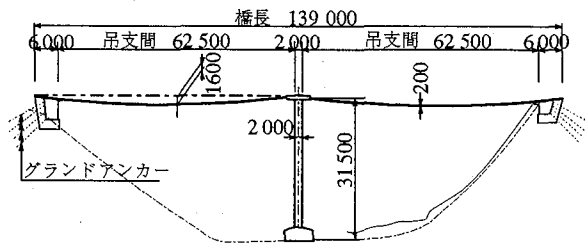


図 - 9 制御対象吊床版橋一般図

表 - 4 吊床版橋の諸元

構造形式	2 径間連続吊床版橋
橋 長	139.0m
吊支間長	2@62.5m
サ グ	1.6m

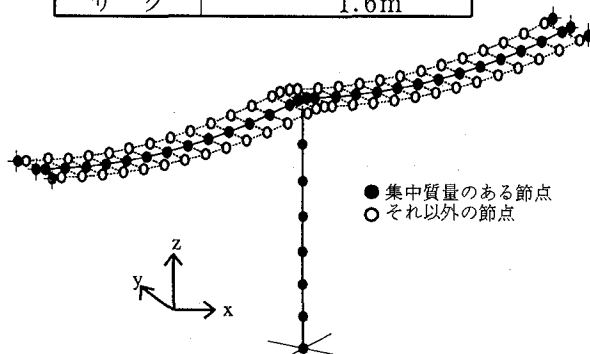


図 - 10 吊床版橋の骨組構造モデル

続吊床版歩道橋である。その一般図を図 - 9 に、諸元を表 - 4 に示す。この吊床版橋を 3 次元骨組構造でモデル化した。これが図 - 10 である。全節点数は 99 であり、全要素数は 150 である。構造物の境界条件は全て固定とする。床版の橋軸方向の部材に関する剛性行列については、ケーブル要素を考えたものを用いた。質量は集中質量とし、床版については、橋軸中央部に配置する。また、回転慣性は橋軸回りの回転のみを考慮した。このような条件の下で構造物の縮約を行った。

(2) 振動解析結果

振動解析の結果、得られた 1 次から 15 次までの固有振動数を表 - 5 に示した。また、求められた振動モードの 1 次から 14 次振動までを図 - 11 に示した。2 径間の吊床版橋の振動数は低く、人間の歩行に関係する 2Hz から 4Hz の間に含まれる構造物の振動次数は、8 次から 11 次振動になる。また、対称な 2 径間の吊床版橋であるために、非常に接近した振動数を持つことがわかる。振動解析の結果、歩行者の歩行や走行により、複数の振動モードが同時に励起される可能性があることが分かる。

表 - 5 固有振動数

振動番号	振動次数	振動数 (Hz)
1 次振動	曲げ 1 次	0.5897
2 次振動	曲げ 2 次	1.4705
3 次振動	曲げ 3 次	1.1661
4 次振動	曲げ 4 次	1.1676
7 次振動	曲げ 5 次	1.9001
8 次振動	曲げ 6 次	2.0756
9 次振動	曲げ 7 次	2.7583
10 次振動	曲げ 8 次	2.7642
14 次振動	曲げ 9 次	3.7836
15 次振動	曲げ 10 次	3.8095

(3) 歩行者による振動制御のためのモデ化

歩行者による外力の周波数は、2Hz から 4Hz であると言われている。この周波数範囲にある橋梁の振動次数は、6 次振動から 15 次振動である。歩行者は橋梁上を移動するために、歩行者による応答解析を行うためには、振動モードは連続関数であった方が応答のプログラムが簡単になる。そこで、各節点の値として得られる離散的な振動モードをフーリエ級数で表示することにより、連続関数として表示する。支間長を L として、振動のモードが N 個の値で表されているものとする。 i 次振動のモードを $\psi_i(x)$ で表す。

$$\psi_i(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^N \{ a_k \cos(k\pi x / L) + b_k \sin(k\pi x / L) \} \quad (50)$$

ここで、

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \psi_{ki}(x) \cos(k\pi x_s) \quad (51)$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \psi_{ki}(x) \sin(k\pi x_s)$$

図 - 12 に、歩行者により励起される振動

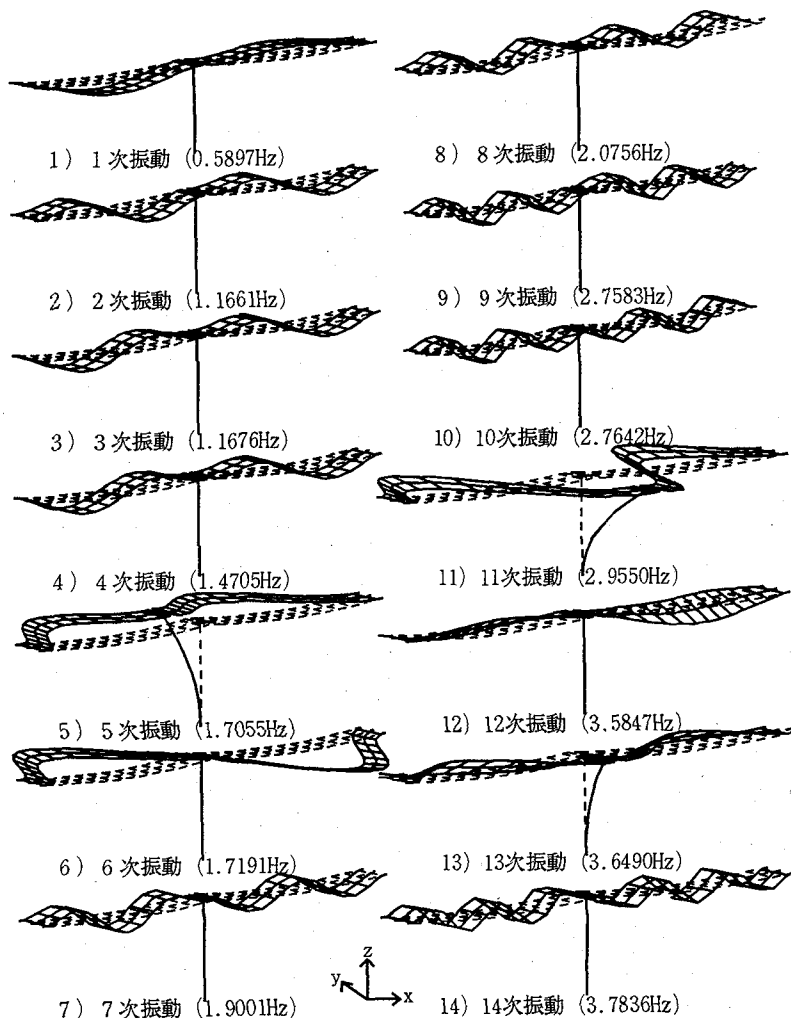


図 - 11 吊床版橋の振動モード

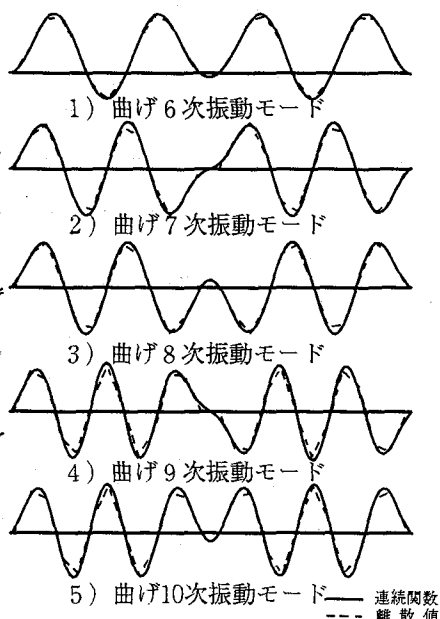


図 - 12 連続関数の振動モード

モードにおいて、離散値によるものと連続関数による振動モードを示した。良い精度で一致することが分かる。

次に、歩行者が橋梁に加える荷重をモデル化する。連続系で示した歩行者の荷重は、歩行者が $v(m/sec)$ で移動するものとして、歩行者による衝撃を

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t \quad (52)$$

で表現すると、橋梁に作用する外力は、

$$f(x, t) = \delta(x - vt)P(t) \quad (53)$$

で表すことができる。

本論文で仮定した歩行者外力の条件は、 $60kgf$ の人間が1人で速度 $2.9m/sec$ 、歩調 $2.8Hz$ であるものとする。歩行による衝撃比を 1.6 とする。従って $P_0 = 96kgf$ とした。モードを連続系で表示すると k 次振動の規準座標の方程式は、

$$\ddot{q}_k(t) + 2h_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \phi_k(vt)P(t) \quad (54)$$

で与えられることになる。

(4) 応答解析

1人歩行による応答解析を行った。応答解析の手法は、MATLABでは、Runge-Kutta法とpade近似による離散化法が準備されている。図-13は、 $\frac{3}{8}L$ 地点の変位応答を表示したものである。横軸が時間である。速度 $2.9m/sec$ で移動するので、橋梁を渡り終えるのに約 $48sec$ かかる。ここでは、その手前の $40sec$ まで計算

している。計算に用いた振動次数は1次から15次までの曲げ振動のみを考えている。数値計算は、時間刻み $\delta t = 0.02(sec)$ としてpade近似による離散化法を用いた。MATLABは応答解析の方法としてRunge-Kutta法とpade近似による離散化法が準備されている。

Runge-Kutta法と比較してもほとんど値は変わらない。

8. オブザーバーによる状態推定と振動制御

(1) オブザーバーによる状態推定

オブザーバーを適用して振動制御を行う前に、オブザーバーの有効性を確認する必要がある。ここでは、制御を考えないで、歩行者が移動した場合、橋長 L の $\frac{3}{8}$ 地点の速度応答のみから、曲げ振動の1次から10次の状態変数を推定した。

希望固有値としてはオブザーバーが速やかに推定するために、減衰を各次振動とも $h=0.1$ とした。また次の関係になるように希望固有値を設定した。

$$\begin{aligned} \lambda_k &= (-h\omega_k + i\omega_k)\alpha \\ \lambda_{k+1} &= (-h\omega_k - i\omega_k)\alpha \end{aligned} \quad (55)$$

ここに、 ω_k は構造系の固有振動数、 α は極配置における逆行列を特異にしないためのパラメータで、ここでは $\alpha = 1.1$ とした。また、任意に決めることのできる p 行列であるが、ここでは

$$p = [0.1 \ 0 \ \dots \ 0.1 \ 0] \quad (56)$$

の20次元ベクトルとした。

このような設計条件でオブザーバーを設計し、状態推定を行った。図-14は曲げ1次から曲げ10次までの基準座標に対する推定結果である。点線が応答解析の結果であり、実線がオブザーバーによる推定結果である。比較が明確にできるように、計算は $10sec$ までとした。それ以上計算しても、結果に変化はなかった。一部曲げ5次振動に、両者の差が現れているが、オブザーバーによる状態推定は、十分な推定結果を示している。

(2) 振動制御の有効性の検討

最適レギュレータによる状態フィードバックにより、振動制御の有効性を確認した。制御装置としては、可動

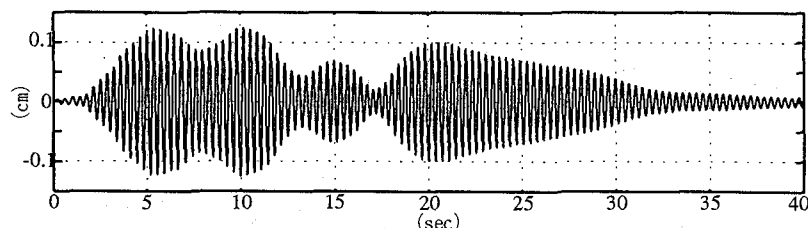


図-13 歩行者による橋梁振動の変位応答解析

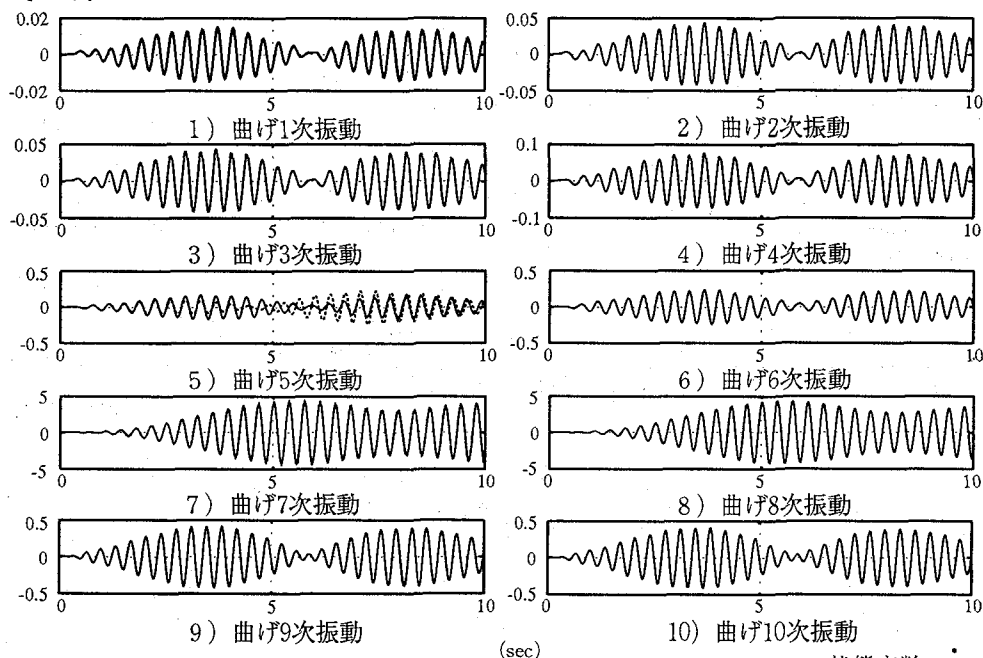
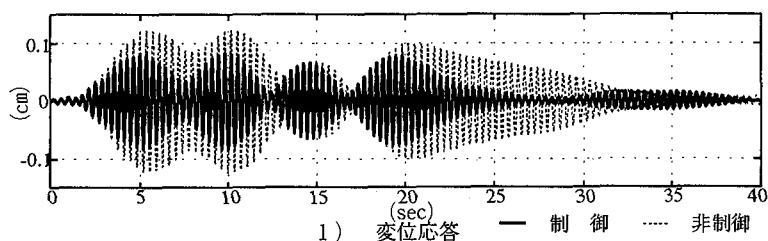
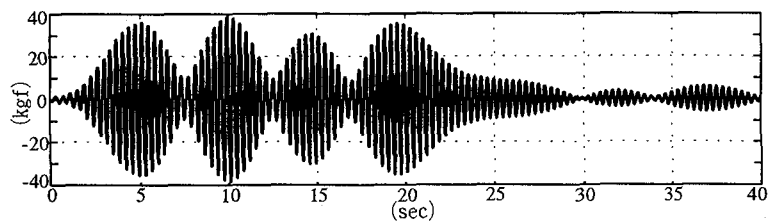


図-14 各次推定 (速度)

——状態変数： $\dot{\hat{x}}$
推定量： $\dot{\hat{x}}$

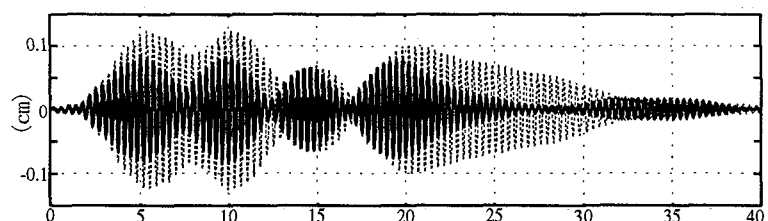


1) 変位応答

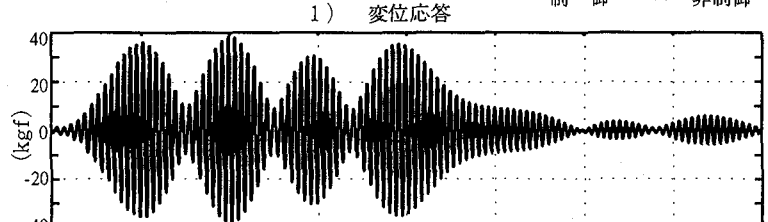


2) 制御力

図 - 15 最適レギュレータ理論による振動制御



1) 変位応答



2) 制御力

図 - 16 オブザーバー理論を用いた振動制御

質量を制御するアクティブマスダンパー (AMD) を想定している。制御モデルは、曲げ1次から曲げ10次までを対象とした。制御力は、各振動次数が明確に表れている $\frac{3}{16}L$ 地点を選んだ。制御力および制御点は、可制御性および可観測性を満足する点を選んだ。評価関数のパラメータを $Q=I, R=0.7$ とした場合、橋梁の変位応答を図-16に示した。1)は、 $\frac{3}{8}L$ の変位応答波形である。2)は、発生した制御力を示したものである。走行外力の $\frac{1}{3}$ 程度の制御力で有効な制御が実現していることがわかる。図-16は、オブザーバーを用いて制御を行った場合の変位応答と制御力を示したものである。オブザーバーは、 $\frac{3}{8}L$ 地点の速度応答のみから全状態量を推定している。オブザーバーを用いても、これを用いない図-15の結果と比べて応答形状及び制御力において変化はなく、オブザーバーを用いた振動制御の有効性を示している。これらの結果から、オブザーバーを用いた制御器を設計することが可能であることが確認できた。

9. まとめ

本論文では、まず、制御用CADソフトウェアMATLAB

を用いて、土木構造物、特に橋梁の振動制御の設計を行うためのプログラムを整備した。さらに、この計算手順を、歩行者による吊床版橋振動のオブザーバを用いた制御問題に適用し、振動制御の有効性を検討したものである。得られた結論を要約すると次のようになる。

(1) 構造解析と振動制御設計まで、同じプログラミング環境で実現する必要がある。MATLABでは、構造解析のためのプログラムが準備されていないので、3次元骨組構造解析のプログラムとMATLAB言語を使用して作成した。

(2) 多自由度系構造物の振動制御では、同時に複数の振動を制御する必要がある。そこで、少ない観測点の情報から状態推定するオブザーバの理論が必要である。振動制御のためのオブザーバの設計方法を示した。

(3) MATLABのプログラミング環境において、構造解析から振動制御の設計に至る一連の行程を整備した。

(4) 歩行者による吊床版橋振動について、1点で観測し、10次振動の状態変数を推定するオブザーバを設計し、シミュレーションからその有効性を確認した。

(5) オブザーバを用いた制御を歩行者による吊床版橋の振動制御に適用し、数値シミュレーションによりその有効性を確認した。

参考文献

- 1) 小堀為雄・吉田博：有限要素法による構造解析プログラム,丸善株式会社,1980.12.
- 2) 戸川隼人：マイコンによる有限要素解析,培風館,1982.6.
- 3) 戸川隼人：有限要素法による振動解析,サイエンス社,1975.10.
- 4) Mario Paz,木村欽一訳：パソコンで解く振動と力,丸善株式会社,1989.12.
- 5) The Math Works,Inc.:MATLAB Reference Guide,サイバネットシステム株式会社,1993.5.
- 6) The Math Works,Inc.:Control System Toolbox User's Guide,サイバネットシステム株式会社,1993.5.
- 7) Howard B.Wilson and Louis H.Turcotte:Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using MATLAB, CRC Press,1994.
- 8) K.Ogata:Solving Control Engineering Problem with MATLAB,PRENTICE HALL,Inc.,1994.
- 9) K.Ogata:Designing Linear Control Systems with MATLAB,PRENTICE HALL,Inc.,1994.
- 10) 梶川康男・津村直宜・角本周：PC吊床版歩道橋の

振動とその使用性,構造工学論文集Vol.36A,pp.685 - 695,1990.3.

- 11) 角本周・前田研一・梶川康男・黒野雅利：近接固有振動数を有する吊床版橋の振動使用性に関する検討,橋梁交通振動に関するコロキウム論文集, PartB, pp207 - 214.1995.
- 12) 阿部寛：やさしいMacの数値数式処理プログラム,毎日コミュニケーションズ,1990.8.
- 13) 小国力：MATLABの利用と実際,サイエンス社,1995.4.
- 14) 岡林隆敏・加賀利明・甲斐利彦：MATLAB言語による道路橋交通振動の解析,長崎大学工学部研究報告,

第26巻,第46号,pp.97 - 104,1996.1.

- 15) 河角省治・岡林隆敏・崎山毅：数値処理プログラムによる不規則振動解析,構造工学論文集,Vol.-41A, pp.597 - 603,1995.3.
- 16) 白石昌武：入門現代制御理論,啓学出版,1989.10.
- 17) 岩井善太・井上昭・川路茂保：オブザーバ,コロナ社,1988.10.
- 18) 岡林隆敏・木戸正敏・加賀利明：未知入力オブザーバーを用いた他自由度系構造物の振動制御,シンポジウム第4回「運動と振動の制御」講演論文集, pp267 - 270,1995.

(1996年9月6日受付)