

構造材料の配分最適化手法による 最適な補強構造の形態に関する基礎的研究

FUNDAMENTAL STUDIES OF STRUCTURAL REINFORCEMENT OPTIMIZATION
USING A MATERIAL DISTRIBUTION APPROACH

佐々木 康彦*、三上 隆**、葦澤 憲吉***

Yasuhiko SASAKI, Takashi MIKAMI and Noriyoshi NIRASAWA

*工博 北海道大学助手 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

**工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (同 上)

***工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (同 上)

A material distribution approach, based on the use of an artificial composite material with microscale voids, is applied to shape and topology optimization problems of structures for reinforcement. This new approach consists of computing effective material properties of the composite material using the homogenization method, and solving an optimal distribution of the material by a suitable optimization algorithm such as the optimality criteria method. The optimal structure for reinforcement which supports a primary structure is investigated through a density distribution of solid material. Computational experiments show that the applicability of the present approach to structural reinforcement optimization problems is quite satisfactory.

Key Words: shape and topology optimization, finite element approximation,
structural reinforcement, optimality criteria method

1. まえがき

一般に構造物の設計を論ずる場合、設計過程は設計要求に基づく概念設計から始まって、基本設計、詳細設計、さらに製品を生産するための生産設計に至る一連の流れとして把握される。このような設計の流れの中で上流に位置する概念設計・基本設計における基本的な構造形状や材料レイアウトの決定過程は、特に設計者の個人的な経験や勘に依存するところが大きかった。しかし、近年における人工知能の研究、ニューラルネットワーク、遺伝的アルゴリズム等の研究は種々の新しい概念を生み出し、それを応用した最適化手法およびコンピュータ技術は概念設計あるいは基本設計の支援に有力であると考えられる。

構造物や機械構造の設計に関連した重要な問題の一つとして、連続体の形状あるいはトポロジー(位相)を含めた形態の最適化問題があり、その最適化手法は多くの構造設計者の関心を集めている。この問題における先駆的な研究として、菊池らが均質化法の理論を適用して

形状およびトポロジーの同時最適化問題を、「構造材料の分布あるいは配分最適化問題」に置き換える画期的な手法を提案している^{1)、2)}。土木の分野では、須田らが構造物と地盤に関連する形状最適化設計に均質化法を適用した事例を示している³⁾。また、構造形態の生成手法という観点では、伊能らが力学構造を力学情報を含むセル・オートマトンとしてモデル化し、ヤング率分布を変化させることでさまざまな位相構造が生成可能であるとしている⁴⁾。

本研究では構造材料の配分最適化手法を応用して、主要な構造要素を意味する「主体構造」の周辺空間における“最適な補強構造”の生成・抽出を試みた。この最適化問題では均質化法に従って周期性をもつ多孔質状の微視構造を仮定し、孔の寸法および単位構造の回転角を設計変数とする。使用材料の体積比制約のもとで、平均コンプライアンスを目的関数に選び、最適性規準法に基づいて最適化を進めた。事前に設定した主体構造に

応じた最適な補強構造を形成する基礎的な数値解析を行い、得られた補強構造の形態について検討を加えた。

この研究は最終的に、構造設計者の経験的な知識のみならず、コンピュータ技術を高度利用した数理的手法によって、基本設計における構造形態の検討案を提案できる道をめざすものである。

2. 構造材料の微視構造と

拡張された形状最適化問題

構造物の最適な幾何学的形状を決定する形状最適化問題、特に有限要素法を用いて連続体の形状最適化を行う場合に、境界上の節点の移動に伴う解析精度の悪化、滑らかな最適形状を得ることの困難さ、最適化計算の手間と時間の増大などが問題となる。これらの問題点の対応策として、誤差評価に基づいて要素分割を改良するアダプティブ有限要素法、スプライン曲線を使用して滑らかな形状を発生させるスプライン有限要素法、さらに内部を含む全領域の解析を境界上の節点に帰着させる境界要素法などの手法が研究開発されてきている⁵⁾。

構造最適化問題に関しては外形形状の最適化のみならず、領域内部での空間生成を含んだトポロジー最適化問題が存在する。しかし、このような問題の解決には前述の形状最適化手法では満足な対応ができず、本質的に全く異なったアプローチが必要不可欠であった。すなわち、領域を通常の完全固体状のものとするよりも多孔質状とする方がより最適になる可能性があるので、構造物を“多孔質状の微視構造”を持つ混合体として取り扱う均質化法の理論を導入し、拡張された形状最適化問題を考えるものである⁶⁾。

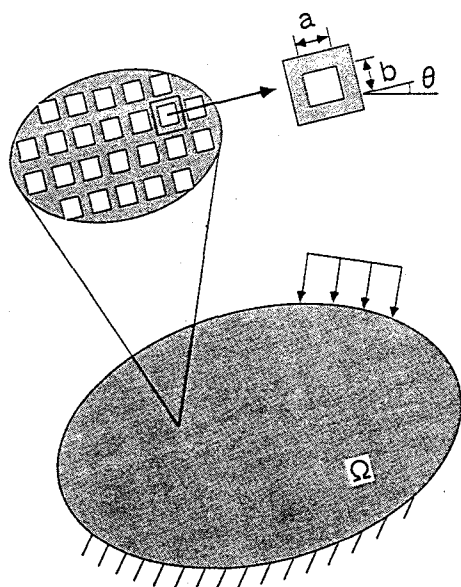


図1 設計領域での微視構造と設計変数

均質化法では、図1に示すような周期性をもつ多孔質状の微視構造を仮定し、さらにその構成要素として単位微視構造(ユニットセル)を考える。すなわち、レイアウトする領域を「設計領域」と呼ぶと、そこに微小な長方形孔を無数にあけることで多孔質体を形成し、その微視構造を定義するユニットセルの孔の大きさを変化させることで多孔質の度合いを決める。また相対的な孔の大きさだけでなくユニットセルを最適な方向に回転させることにより、非常に自由度の大きい多孔質体を作り出すことができる。

もし、ある点の近傍が普通の意味における構造であれば微小な孔は形成されず(固体領域となり)、また何らの構造も形成されなければその部分は孔だけ(完全な空隙)となる。適当な多孔質が最適であれば微小孔の大きさは0や1という極限值の中間値を取る。従って、設計領域における任意点での微視構造を決定する長方形孔の正規化した寸法 a ($0 \leq a \leq 1$)、 b ($0 \leq b \leq 1$) およびユニットセルの回転角 θ が設計変数となる。

このような新しい概念に基づいて1988年にベンソーと菊池により提案された構造最適化アルゴリズムは、形状およびトポロジーの最適化を同時に可能とする強力な最適化手法であった。また、この拡張された最適化問題では、構造物がすでに固体で形成されており与えられた体積の範囲内で多孔質体を用いて、既存の構造を最適に補強する問題、すなわち「補強構造の最適化問題」も全く同じ考えで表現が可能である。

3. 構造材料の配分最適化手法

3.1 最適配分問題の定式化

本研究で対象とする最適配分問題では、設計領域における「平均コンプライアンス」を目的関数に選び、その最小化をめざす。また、設計領域に全く孔の開いていない状態に対する使用可能な構造材料の「体積比」を制約条件とする。一般に、設計変数は前述の長方形孔の寸法 a 、 b とユニットセルの回転角 θ である。以下では2次元弾性問題を考えると、この最適配分問題は次式で表される。

$$\text{Minimize}_{a, b \text{ and } \theta} \left\{ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \right\} \quad (1)$$

$$\text{subject to } \int_{\Omega} (1-ab) d\Omega \leq \Omega_s \quad (2)$$

ここで、変位 u は釣合方程式の解であり、仮想変位 v に対する仮想仕事の原理を表す次式を満足する。

$$\sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} E_{ijkl}^G \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} d\Omega$$

$$= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} t_i v_i d\Gamma \quad \forall v \in V \quad (3)$$

以上の式において、 f は設計領域 Ω に働く物体力、 t は境界 Γ 上の分布力、また Ω_s は使用可能な材料の上限值である。

さらに、平均コンプライアンスは最小化されたポテンシャルエネルギーのマイナス2倍であることを考慮すると、次式のような簡略化が可能である。

$$\underset{a, b \text{ and } \theta}{\text{Maximize}} \quad \underset{u \in V}{\text{Minimize}} \quad \Pi(u, a, b, \theta) \quad (4)$$

$$\text{subject to} \quad \int_{\Omega} (1 - ab) d\Omega \leq \Omega_s \quad (2)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Pi(u, a, b, \theta) = & \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \int_{\Omega} E_{ijkl}^G \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega \\ & - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

構造材料の配分最適化に際して、まず最初に解析対象である設計領域を有限要素法で離散化する。2次元弾性問題の有限要素として、ここでは隅角部の節点において x 、 y 方向の変位成分を持ち、一要素8自由度を持つ「4節点長方形要素」を使用した。

3.2 最適性規準法に基づく設計変数の更新

一般に、最適性規準法^{7), 8)}ではある最適化問題の最適解が満たされるべき規準、すなわち「最適性規準」があらかじめ定義され、その最適性規準を満足するような解が漸化式を含む繰り返し計算によって求められる。この研究で設定した最適配分問題の解法にこのような最適性規準法を適用するために、ラグランジュの未定乗数 λ を導入して、次式で表されるラグランジュ関数 L を定義する。

$$\begin{aligned} L(u, a, b, \theta) = & \Pi(u, a, b, \theta) \\ & - \lambda \left(\int_{\Omega} (1 - ab) d\Omega - \Omega_s \right) \end{aligned} \quad (6)$$

最適配分問題に対する最適性規準は、(6)式で定義したラグランジュ関数の停留値を与える条件から導き出すことができる。

次に、設計変数およびラグランジュ乗数の漸化式を考える。まず、得られた最適性規準の条件式を最適解においてその値が1となるような分数式に変形し、収束性に関するパラメータを指数とする「指数型の漸化式」を基本とする。さらに正規化している設計変数 a 、 b については $0 \leq a \leq 1$ 、 $0 \leq b \leq 1$ という条件も考慮する。なお、回転角 θ については前述のような分数式に変形で

きない式なので、最適性規準の条件式をそのまま用いる。以上により、この研究における設計変数とラグランジュ乗数の漸化式は次式ようになる。

$$a^{(k)} = \text{Min} \{ \text{Max} \{ 0, \left(\frac{-2\lambda^{(k-1)} b^{(k-1)}}{\sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial E_{ijkl}^{G(k)}}{\partial a} \frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j}} \right)^{\rho_a} \times a^{(k-1)} \}, 1 \} \quad (7)$$

$$b^{(k)} = \text{Min} \{ \text{Max} \{ 0, \left(\frac{-2\lambda^{(k-1)} a^{(k)}}{\sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial E_{ijkl}^{G(k)}}{\partial b} \frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j}} \right)^{\rho_b} \times b^{(k-1)} \}, 1 \} \quad (8)$$

$$\theta^{(k)} = \theta^{(k-1)} - \rho_{\theta} \times \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial E_{ijkl}^{G(k)}}{\partial \theta} \frac{\partial u_k^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} \quad (9)$$

$$\lambda^{(k)} = \left(\frac{\int_{\Omega} (1 - a^{(k)} b^{(k)}) d\Omega}{\Omega_s} \right)^{\rho_{\lambda}} \times \lambda^{(k-1)} \quad (10)$$

ここで、 $\rho_a, \rho_b, \rho_{\theta}, \rho_{\lambda}$ は正定数であり、漸化式の収束

性に関するパラメータを表す。

これらの漸化式に基づいて、設計変数 a 、 b 、 θ およびラグランジュ乗数 λ の値を更新しながら、最適化過程の繰り返し計算を進める。

3.3 均質化弾性定数の算定

設計領域を有限要素で分割し、設計変数である長方形孔の寸法とユニットセルの回転角は、各有限要素内で一定値であるとする。従って、一つの有限要素には一組の設計変数 (a, b, θ) が対応する。次に、長方形孔の寸法 a 、 b の関数である構造材料の均質化した弾性定数 $E_{ijkl}^H(a, b)$ について、均質化法では理論解析および補間多項式を用いた方法で求めている。そして、ユニットセル回転後の均質化弾性定数 $E_{ijkl}^G(a, b, \theta)$ は、座標変換マトリクス $R_{mn}(\theta)$ ($m, n = 1, 2$)を用いて、次式から算定される。

$$E_{ijkl}^G = \sum_{I,J,K,L=1}^2 E_{IJKL}^H R_{Ii} R_{Jj} R_{Kk} R_{Ll} \quad (11)$$

本研究では、ユニットセル回転前の均質化弾性定数 E_{ijkl}^H に対して、次のような近似式を用いた。

$$E_{ijkl}^H = (1-a)(1-b)E_{ijkl} \quad (12)$$

この式で、 E_{ijkl} は多孔質体の実質部分の弾性定数であり、ここでは等方性とする。従って、回転後の均質化弾性定数 E_{ijkl}^G も等方性であり、各有限要素における設計変数は長方形孔の寸法 a 、 b の2つだけとなる。

この研究は後述するように、材料の密度濃淡図を通じて、最適な補強構造の形態生成・抽出の可能性を検証することに主眼を置いている。従って、最終的に得られる構造形態のトポロジー的な検討において、(12)式のような近似式の精度の影響は小さいと考え、配分最適化手法における均質化弾性定数の算定の簡略化を優先したものである。

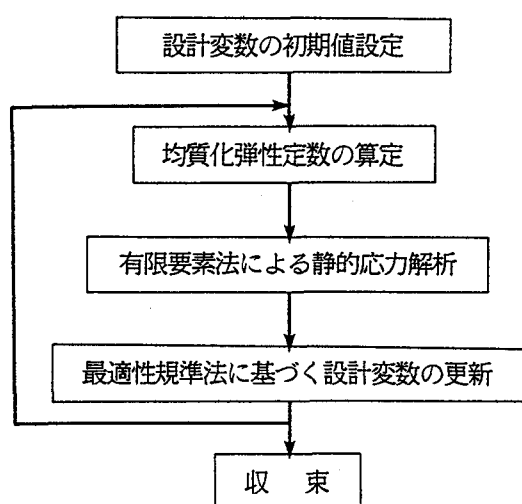


図2 最適配分問題の解法プロセス

この最適配分問題に対する全体の解法プロセスを図2に示す。すなわち、設計変数に応じた均質化弾性定数の算定、その弾性定数を用いた有限要素法による応力解析、最適性規準を満足する漸化式による設計変数の更新、そして以上の全過程を繰り返し計算するというのが、配分最適化手法の主要なアルゴリズムである。

4. 最適な補強構造の数値解析例

4.1 片持梁の補強構造と体積比

第一の数値解析モデルを図3に示す。先端に集中荷重を担う「片持梁」を主体構造とし、その上部空間に最適な補強構造を探るための設計領域を設定したものである。片持梁部分も設計領域に含めるが、最適化過程では全く孔の開かない固体材料に固定するので(固定領域)、多孔質材料の領域は上部補強空間だけである。

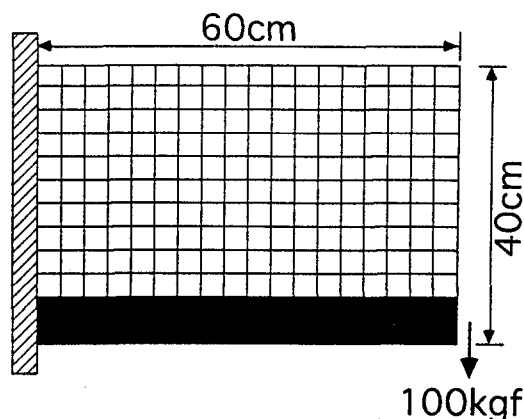


図3 片持梁の数値解析モデル

設計領域の寸法は縦40cm、横60cm、厚さ2cm、要素分割数は縦12×横18である。なお、最適な構造形態の形成手法を検証するための基礎的な数値解析例なので、この研究では比較的粗い要素分割とした。しかし、補強構造の巨視的な形態のみならず、構造細部まで検討する場合は、より細かな要素分割が必要である。また、多孔質体の実質部分の材料は等方性であり、その弾性係数 $E=2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。先端荷重は下向きに $P=100 \text{ kgf}$ である。使用材料の体積比の制約条件に関しては、多孔質領域での体積比を40%および60%とし、体積比の相違による補強構造の比較検討を行った。

各有限要素の設計変数である長方形孔の寸法 a 、 b の初期値については、最適化の収束を早める

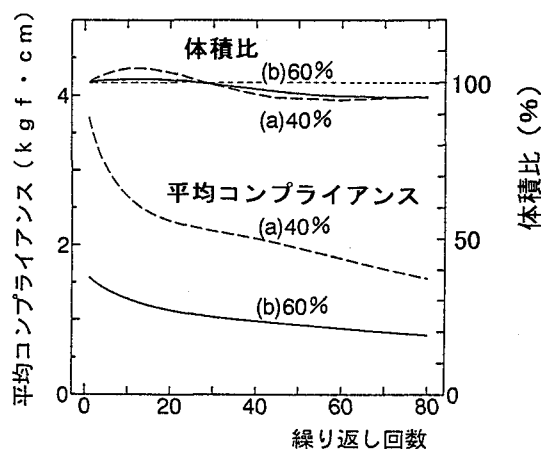


図4 体積比の推移と平均コンプライアンスの収束状況

ために前述の規定した体積比に一致するような値を全要素に設定した。また、設計変数およびラグランジュ乗数の漸化式(7)、(8)、(10)におけるパラメータについては最終的に $\rho_a = \rho_b = 0.01$ 、 $\rho_\lambda = 0.2$ という値を用いた。これらの数値は、目的関数である平均コンプライアンスの収束状況や体積比制約条件の満足度を検証するために実施した一連の予備解析結果に基づいて決定したものである。

最適化過程における体積比の推移と平均コンプライアンスの収束状況を図4に示す。この結果から体積比40%および60%のいずれの場合も、体積比がほぼアクティブな制約条件として作用すること、目的関数である平均コンプライアンスの値が漸次単調減少しながら材料の配分最適化が進行していくことがわかる。最終的に繰り返し回数80回における平均コンプライアンスの相対誤差は、体積比40%および60%の場合でそれぞれ0.76%、0.56%となり、十分に収束したと判断する。

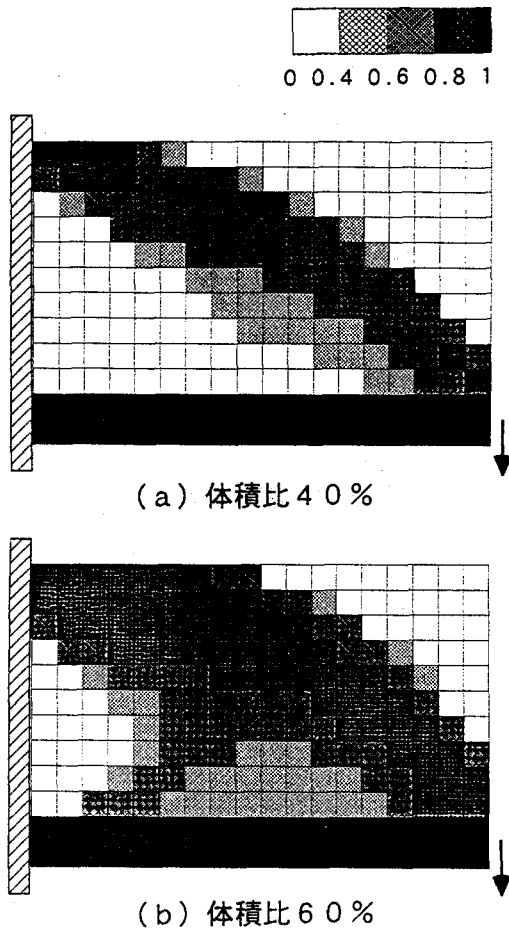


図5 片持梁と最適な補強構造

先端に集中荷重を担う片持梁の最適な補強構造に関する数値解析結果を図5(a)、(b)に示す。これらの結果は各要素での長方形孔の寸法 a 、 b に基づいて、次式から算定する正規化した無次元密度

$$\rho = 1 \cdot (1 - ab) \quad (13)$$

を五段階の濃淡で表示したものである。この正規化した無次元密度は構造材料の実際の密度によらず、ある要素に全く孔が開かない場合は $\rho = 1.0$ 、逆に要素全体が孔になった場合は $\rho = 0.0$ という値をとる。

(a) 体積比40%の場合は、片持梁の先端と固定壁上部とを連結する直線上に材料が帯状に配分されることがわかる。これに対して、(b) 体積比60%の場合は使用材料に余裕があるため、前述の補強構造をさらに強化するとともに、片持梁の固定端付近を支持する新たな構造が発生していることが特徴的である。体積比の相違によるこれらの比較結果は、使用材料の体積比を適切に増加することで補足的な構造が生まれ、全体としては新しいトポロジーを有する補強構造が形成される可能性を示唆している。

4.2 連続桁・主塔系の補強構造と想定荷重

第二の数値解析モデルを図6に示す。二径間連続桁の中央部に比較的剛性の高い主塔を持つ「連続桁・主塔系」を主体構造に選定した。また、この主体構造をさらに補強する最適な構造形態を探るために、主体構造の上部周辺空間に長方形形状の設計領域を設定する。

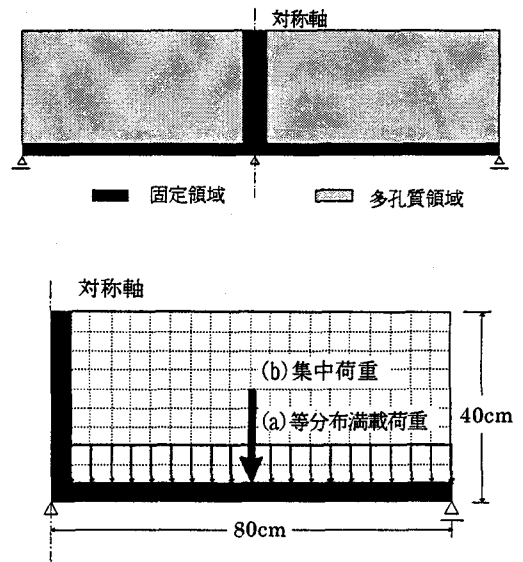


図6 連続桁・主塔系の数値解析モデル
(二種類の想定荷重)

この数値解析例でも設計領域には主体構造を含めるが、最適化過程では全く孔の開かない固定領域とするため、多孔質領域は上部の補強空間だけである。配分される構造材料の割合は使用材料の体積比が40%の場合、主体構造が3割、補強構造に7割となる。数値解析では対称性を考慮して、図6に示すように右半分の領域で解析を行った。

設計領域の寸法は縦40cm、横80cm、要素分割数は縦10×横20である。また、実質部分の材料は同様に等方性であり、その弾性係数 $E=2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。制約条件である使用材料の体積比に関しては、多孔質領域に全く孔の開いていない状態を100%とし、その基準値の40%に設定した。また、荷重条件については図6に示すように、(a) 径間に等分布満載荷重 $w=1.25 \text{ kgf/cm}$ 、(b) 径間中央部に集中荷重 $P=90 \text{ kgf}$ という二種類の荷重状態を想定し、補強構造に対する荷重条件の効果を検討した。

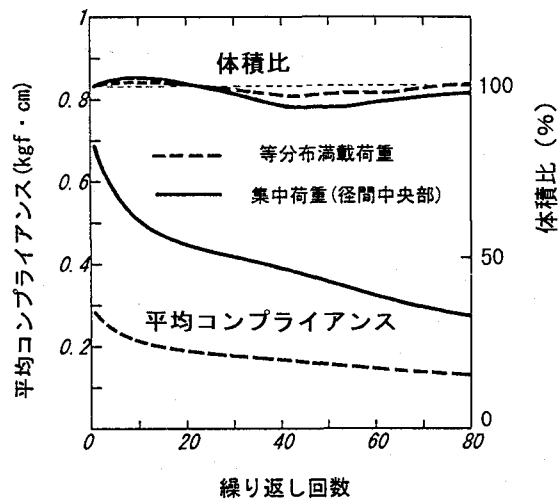


図7 体積比の推移と平均コンプライアンスの収束状況

最適化過程における体積比の推移と平均コンプライアンスの収束状況を図7に示す。これらの結果から、荷重条件が等分布満載荷重、集中荷重(径間中央部)のいずれの場合でも体積比がほぼアクティブな制約条件として作用すること、平均コンプライアンスの値が漸次単調減少しながら最適化が進行していることなど、先の数値解析例と同様に良好な収束傾向を示すことがわかる。なお、いずれの場合も目的関数である平均コンプライアンスの相対誤差が繰り返し回数80回で1%以下となり、収束とみなした。また、図8は上から順に、繰り返し回数20、40、60、80回における材料配分の進行状況を濃淡図で表したものである。最適な構造形態を形成するように、構造材料の密度が高まって行く様子が明らかである。

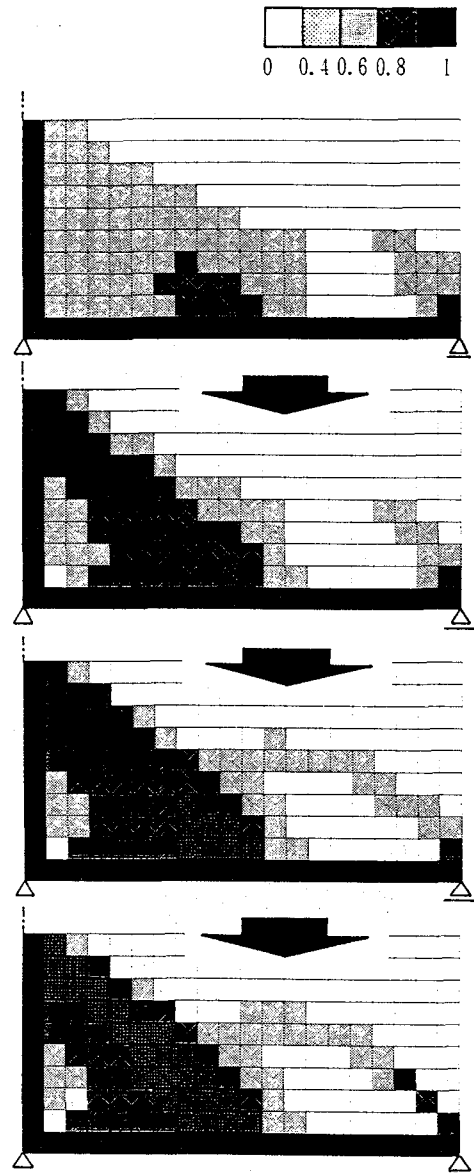


図8 最適な補強構造の形態抽出過程
(集中荷重：径間中央部)

連続桁・主塔系を主体構造に選んだときの、周辺空間における補強構造の最適化結果を図9(a)、(b)に示す。(a) 等分布満載荷重が作用した場合は、主塔側において連続桁と主塔とを連結する三角形の補強構造が得られ、また右支承側には径間中央部と右端側とを結ぶアーチ形状の補強が見られる。これに比べて、(b) 集中荷重(径間中央部)の場合は、荷重作用点付近の桁と主塔上部とを結ぶ直線上に帯状の補強構造が形成され、しかも高密度な材料配分となることが特徴的である。これらの比較結果から、等分布荷重に対しては面的な広がりを持つ補強構造、また集中荷重には帯状の直線的な補強構造と、比較的異なった構造形態が形成されることがわかる。

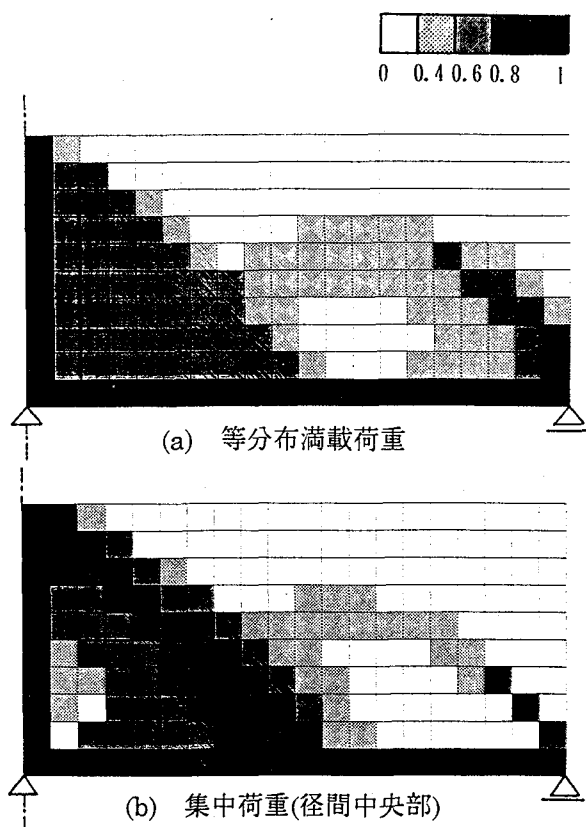


図9 連続桁・主塔系の周辺空間における最適な補強構造

4.3 異なる主体構造とその補強構造

第三の数値解析モデルとしては図10に示すように、二種類の異なる主体構造を考えた。一方は「単純桁」を主体構造とし、他方は前の数値解析例と同じ「連続桁・主塔系」を主体構造に選定した。

数値解析では対称条件を考慮して、(a)と(b)いずれの場合も右半分の領域で解析を行った。設計領域の寸法は縦10m、横20m、要素分割数は縦10×横20である。また、実質部分は等方性材料である。荷重条件については、図10に示すように各径間中央部に集中荷重 $P=60tf$ を作用させた。

最適な補強構造に関する数値解析結果を、二種類の主体構造について比較して、図11(a)、(b)に示す。いずれの場合も繰り返し回数80回で、平均コンプライアンスの相対誤差は1%以下となった。(a)単純桁が主体構造の場合は、桁の両支点を結ぶようにアーチ形状の補強構造が得られ、さらにアーチ構造と荷重作用点を結ぶ補強が見られる。これに比べて、(b)連続桁・主塔系の場合は主塔と連続桁を結び付けるケーブルを連想させる補強構造が得られた。これらの比較結果から、主塔および中間支承の有無に応じて、力学的特性が全く異なる構造形態でも形成できることが判明した。

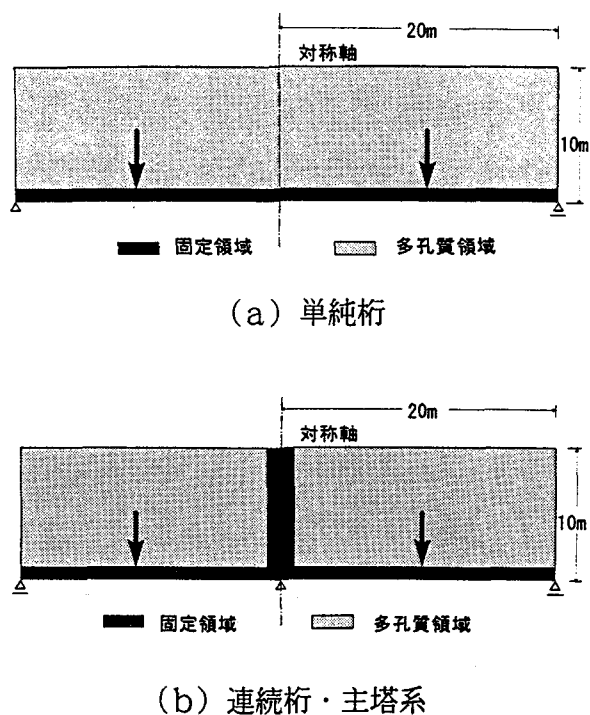


図10 主体構造が異なる数値解析モデル

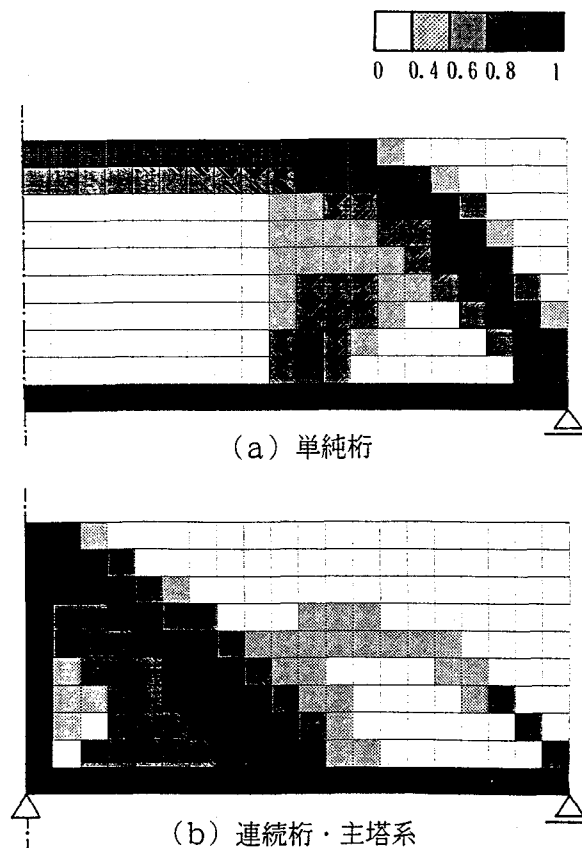


図11 主体構造が異なる場合の最適な補強構造の形態比較

5. まとめ

本研究では構造材料の配分最適化手法を応用して、特定の主体構造の周辺空間における最適な補強構造の形成を試みた。得られた数値解析例を通じて、この研究の成果を要約すると以下の通りである。

- (1) 最適配分された材料の「密度濃淡図」から、形状とトポロジーを含めた補強構造の形態を視覚的に抽出できることが明らかになった。
- (2) 使用材料に余裕を持たせることで、新しいトポロジーを有する補強構造が形成される可能性を示唆する結果が得られた。
- (3) 事前設定した主体構造や想定荷重に応じて、アーチ構造やケーブル構造など力学的特性が全く異なる補強構造でも形成が可能である。

今後はさらに、この配分最適化手法による多様な数値解析事例に基づいて、主体構造の選定および最適な補強構造の形態に関する客観的な評価方法について研究を進めたい。

参考文献

- 1) Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 71, No. 2, pp.197-224, 1988.
- 2) Suzuki, K. and Kikuchi, N.: A homogenization method for shape and topology optimization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.93, pp.291-318, 1991.
- 3) 須田清隆、内田雅博：構造形態決定過程における均質化法の応用について、構造工学論文集、Vol.39A, pp.445-453, 1993.
- 4) 伊能教夫、上杉武文：力学構造物を自己組織化するセル・オートマトン —さまざまな位相構造の生成とその形態比較—、日本機械学会論文集(A編)、61 巻 585 号、pp.241-246、1995.
- 5) 山川 宏：最適化デザイン、計算力学とCAEシリーズ9、培風館、1993.
- 6) 菊池 昇：均質化法による最適設計理論、応用数理、第3巻・第1号、pp.2-26, 1993.
- 7) Venkayya, V.B.: Optimality criteria: a basis for multidisciplinary design optimization, *Computational Mechanics*, Vol.5, pp.1-21, 1989.
- 8) 土木学会構造物最適性研究小委員会：構造システムの最適化 —理論と応用—、構造工学シリーズ1、土木学会、1988.

(1996年9月6日受付)