

空間的に相関のある不規則荷重を受ける 連続ばり系の分散・共分散解析

PROBABILISTIC ANALYSIS OF MULTI-SPANNED CONTINUOUS BEAMS SUBJECTED TO CORRELATED STOCHASTICALLY DISTRIBUTED LOAD

河角省治*, 岡林隆敏**, 吉田啓三***, 崎山毅****

Shouji KAWAKADO, Takatosi OKABAYASI, Keizou YOSIDA and Takesi SAKIYAMA

* (株)PAL構造 部長 電算技術部 (〒852 長崎市旭町8番20号)

** 工博 長崎大学 助教授 工学部社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

*** 工修 松尾橋梁(株) 工事部 (〒551 大阪市大正区鶴町3丁目4番18号)

**** 工博 長崎大学 教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

Traffic load on highway bridge, live load on floor of building and snow load on roof of building can be modeled as stochastically distributed load with special correlation. This paper is concerned with a method for calculating the variance of the static deflections and the internal forces of multi-spanned continuous beams subjected to correlated stochastically distributed loads. The purpose of this paper is to explain the concept of the present method and to apply the method to the continuous beams including the spring support condition subjected to correlated distributed loads idealized into the white noise random field. As the numerical results, the standard deviations of the response of the static deflections and the internal forces are shown for two-spans continuous beams including the spring support conditions under the band-limited process and the narrow-band process distributed loads. And the results are shown for the traffic load on the two-spans continuous beams bridge.

Key Words : probabilistic analysis, variance response, continuous beams, random fields, correlated stochastically load

1. はじめに

渋滞時の活荷重が作用する道路橋、積載荷重を受ける事務所・倉庫の床板、さらに、雪荷重の作用する構造物においては、荷重が空間的に変動することを考慮する必要がある。また、このような不規則荷重をガウス性確率場でモデル化すると、線形理論で表される構造応答の平均値回りの変動は、外力の平均値回りの変動を入力とする出力応答により規定できる。著者らは、不規則分布荷重を白色雑音過程でモデル化した場合について、確率伝達マトリックス法を用いて連続ばりの変形および断面力の共分散応答を得ている⁽¹⁾。前報では、実用的な観点よりむしろ、数学モデルの取扱いや解法の基本的演算を明確にしている。

しかし、実在の不規則分布荷重は空間的に相関を持っていることが、渋滞時の車両列荷重⁽²⁾⁻⁽⁴⁾、事務所・倉庫の積載荷重⁽⁴⁾、さらに、積雪荷重⁽⁵⁾において指摘されている。従って、信頼性理論に基づく構造物の安全性の照査において必要とされる、実用的な不規則構造解析については、不規則分布荷重を空間的に相関を有する荷重モデルで構成

しなければならない。

そこで、相関のある荷重を、空間形成フィルタ⁽⁶⁾⁽⁷⁾を通過した波形により表現する。すなわち、白色雑音場の作用する空間形成フィルタを確率微分方程式⁽⁸⁾で表現する。このようにして構成された荷重系を用いて、構造系とフィルタ系の方程式を合成し、構造-荷重系に対する確率微分方程式を構成する⁽⁹⁾。このように考えると、すでに報告した白色雑音荷重を有する連続ばりの手法⁽¹⁾を拡張することにより、相関を有する荷重を受ける連続ばりの解析が可能となる。

本論文では、任意の相関を有する不規則分布荷重を受けるばね支点を含む多径間連続ばり系の実用的な不規則応答解析手法を提案する。さらに、静的応答においても、振動における共振のような、特定の周期の荷重に対して応答が敏感になる現象を明らかにする。

構造系は、はり要素の状態変数と連続ばり系の節点未知量より表現する。また、任意の相関を有する不規則分布荷重は、白色雑音過程を入力とする線形微分方程式で記述され

る荷重系の定常応答過程で表現する⁽⁶⁾⁽⁷⁾。連続ばり系と荷重系を合成した構造-荷重系は、白色雑音過程を受ける伊藤型の確率微分方程式⁽⁸⁾で表現できる。この方程式の解より、応答の共分散の空間的变化を表す共分散方程式⁽¹⁾⁽⁹⁾⁻⁽¹¹⁾が誘導される。この共分散方程式は境界値問題になっており、これを解くために伝達マトリックス法⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾を確率論的解析に拡張した手法を用いる。本論文では、伝達マトリックス法で用いられる節点マトリックスおよび境界マトリックスを構造-荷重系に拡張することにより、共分散方程式の解法を示している。

本解法の有効性を示すために、2 径間連続ばり系に指数関数および指数余弦関数の相関関数を有する不規則荷重が載荷した場合の解析を行った。さらに、渋滞時の車両列荷重⁽³⁾を受ける、2 径間連続桁橋の解析を行った。本解法の有利な点は、煩雑な解析的演算を実行することなく、効果的に計算機を活用できる定式化をしている点にある。さらに、連続ばり系の境界条件および節点の外的制約条件は境界マトリックスおよび節点マトリックスを変えるだけで、また、分布荷重の相関は荷重系のマトリックスを変更するだけで対応できる汎用性がある。

なお、著者らは、本論文の荷重モデルとその取扱いを基礎として、直列型平面骨組構造系の解析法をすでに示している⁽¹⁵⁾。

2. 連続ばり系の状態空間

2.1 連続ばり系の状態空間表示

図-1 のような不規則分布荷重 $q(x)$ と不規則分布モーメント $m(x)$ が作用する s 径間の連続ばり系を考える。0 から s は節点を表し、その中で 0 節点と s 節点には、境界条件を与えるものとする。また i の記号は i 径間を表す。節点における未知量には、節点に働く外的制約により図-2 のようなものがあり、これを図-1 では V_j で表している。各節点にはこれらの未知量が 1 あるいは 2 個が生じることになる。

図-3 のような断面力を考える。はり要素の変位と断面力からなる状態変数。さらに、端部および中間節点に現れる総数 t の節点未知量を状態変数に組み込み、これらを状態方程式で表す。

はり要素の状態変数 $Y_B(x)$ と節点の未知量 V を

$$Y_B(x) = [y(x) \quad \phi(x) \quad M(x) \quad Q(x)]^T \quad (1)$$

$$V = [V_1 \quad \dots \quad V_t]^T \quad (2)$$

で定義する。また、はり要素に作用する外力ベクトル $F_{Y_B}(x)$ を

$$F_{Y_B}(x) = [0 \quad 0 \quad m(x) \quad -q(x)]^T \quad (3)$$

とする。

はり要素の状態変数と節点の未知量を合成して、拡大

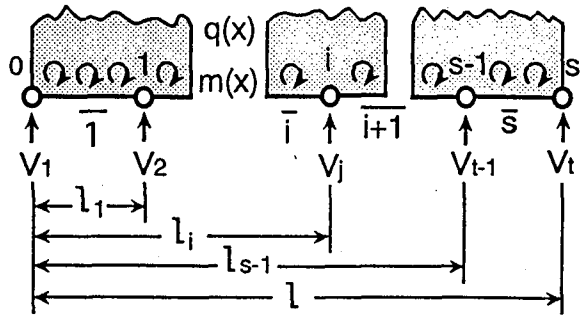


図-1 連続ばり構造系

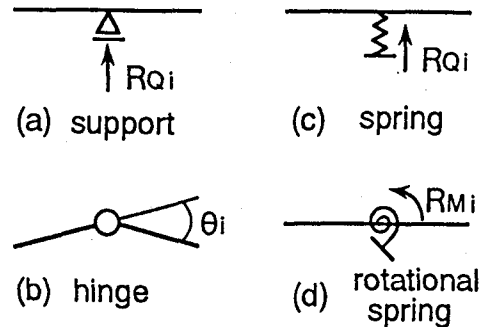


図-2 節点未知量

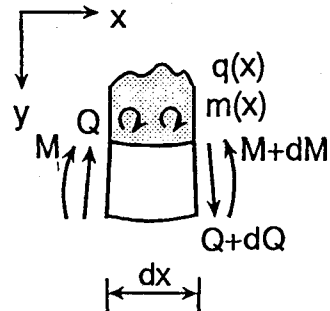


図-3 微小要素

化した構造系の状態変数を $Y(x)$ で表すと

$$Y(x) = \begin{bmatrix} Y_B(x) \\ V \end{bmatrix} \quad (4)$$

のようになる。ここに、 $Y(x)$ は $(4+t)$ 次元のベクトルとなる。この拡大された状態変数による連続ばり系に関する構造系の状態方程式は

$$\frac{d}{dx} Y(x) = A_Y(x) Y(x) + F_Y(x) \quad (5-1)$$

$$\text{境界条件: } Y(0) = Y_0, Y(l) = Y_l \quad (5-2)$$

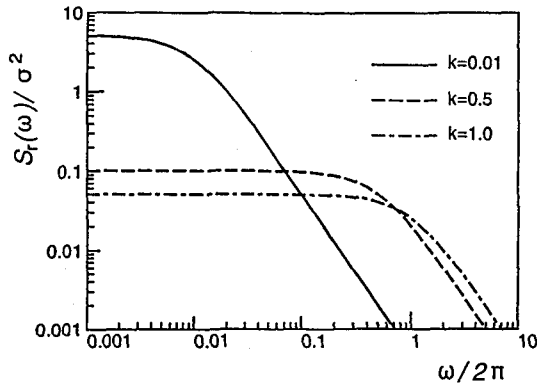


図-4 パワースペクトル密度関数
指数関数型の自己相関の場合

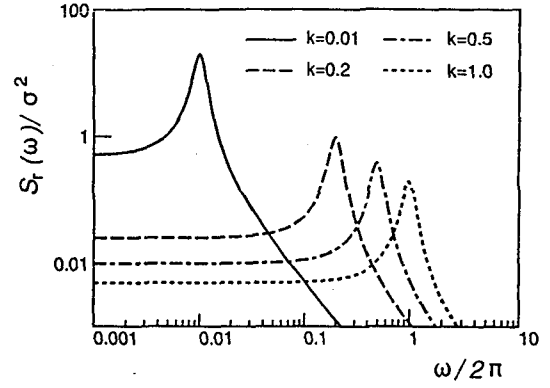


図-5 パワースペクトル密度関数
指数余弦関数型の自己相関の場合

のようにベクトル表示される。ここに、

$$A_Y(x) = \begin{bmatrix} A_{Y_B}(x) & 0_{4,t} \\ 0_{t,4} & 0_{t,t} \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

$$F_Y(x) = \begin{bmatrix} F_{Y_B}(x) \\ 0_t \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

であり、 $A_Y(x)$ は $(4+t)$ 次元の正方行列、また、 $F_Y(x)$ は $(4+t)$ 次元のベクトルとなる。さらに、 $A_{Y_B}(x)$ は、はり要素の状態変数 $Y_B(x)$ に関する係数行列である。なお、 $0_{k,j}$ は $(k \times j)$ の 0 行列を表し、 0_k は k 次元の 0 ベクトルである。また、構造系の状態遷移行列 $\Phi_Y(x_1, x_2)$ は

$$\Phi_Y(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \Phi_{Y_B}(x_1, x_2) & 0_{4,t} \\ 0_{t,4} & I_t \end{bmatrix} \quad (7)$$

のようなブロックで表される。 $\Phi_{Y_B}(x_1, x_2)$ は、はり要素の状態変数 $Y_B(x)$ の状態遷移行列である。また、 I_k は k 次元の単位行列である。

3. 不規則荷重のモデル化

3.1 荷重系の状態空間表示

構造系に作用する外力ベクトル $F_{Y_B}(x)$ は、平均値 $E[F_{Y_B}(x)]$ とその回りの変動 $\hat{F}_{Y_B}(x)$ に分離することができる。外力の平均値 $E[F_{Y_B}(x)]$ に対する応答 $E[Y_B(x)]$ は、従来の構造解析の方法で解くことができる。そこで、本論文では、外力の平均値回りの変動 $\hat{F}_{Y_B}(x)$ に対する応答 $\hat{Y}_B(x)$ に着目する。以後、式の簡略化のために変数は平均値回りの変動を表すものとする。

本研究では、外力としては不規則分布荷重 $q(x)$ のみ考えることとし、外力ベクトル $F_{Y_B}(x)$ は、任意のパワースペクトル密度を有する定常確率過程ベクトル $Z(x)$ と確定関数行列 $G_{Y_B Z}(x)$ の積で表される非定常確率過程ベクトルとする。

$$F_{Y_B}(x) = G_{Y_B Z}(x) Z(x) \quad (8)$$

$Z(x)$ のパワースペクトル密度関数または自己相関関数

が既知の場合は、 $Z(x)$ を白色雑音過程を入力とする線形微分方程式の定常解過程で近似的に表現することができる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。本論文では、これを荷重系と呼ぶことにする。

荷重系の状態変数 $Z(x)$ は d 次元のベクトルであり、荷重系の状態方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dx} Z(x) = A_Z Z(x) + N_Z(x) \quad (9)$$

荷重系の次元数および係数行列は、パワースペクトル密度関数または自己相関関数より決定される。ここで、 $N_Z(x)$ は平均値が 0 で次のような性質を有する正規性白色雑音過程ベクトルである。

$$E[N_Z(x_1) N_Z^T(x_2)] = Q_Z \delta(x_1 - x_2) \quad (10)$$

ここに、 $E[\]$ は集合平均の演算であり、 δ はディラックのデルタ関数である。また、 Q_Z は荷重強度行列である。

$Z(x)$ の共分散を $R_Z(x)$ とすると、 $Z(x)$ に関する共分散方程式が導かれる⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R_Z(x) &= A_Z R_Z(x) + R_Z(x) A_Z^T \\ &\quad + Q_Z \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $Z(x)$ は定常確率過程としていることから、 $dR_Z(x)/dx = 0$ となり、式(11)は次の連立方程式となる。

$$A_Z R_Z(x) + R_Z(x) A_Z^T + Q_Z = 0 \quad (12)$$

この式を解くことで、 $x=0$ と l の $R_Z(x)$ の共分散は、

$$R_Z(0) = R_Z(l) = R_Z \quad (13)$$

のように得られる。荷重系の状態遷移行列は式(9)より、

$$\Phi_Z(x_1, x_2) = e^{A_Z(x_1 - x_2)} \quad (14)$$

で与えられる。

3.2 不規則荷重のモデル

荷重モデルの具体的な例として、指数関数形の自己相関関数および指数余弦関数形の自己相関関数を有する確率

過程でモデル化された荷重について、荷重系の状態方程式の次元数、係数行列および状態遷移行列を以下に示す。

指数関数形の自己相関関数の場合、不規則分布荷重の自己相関関数 $R_r(\lambda)$ およびパワースペクトル密度関数 $S_r(\omega)$ は次式で表される。

$$R_r(\lambda) = \sigma^2 e^{-\Omega|\lambda|} \quad (15)$$

$$S_r(\omega) = \frac{\sigma^2 \Omega}{\pi(\Omega^2 + \omega^2)} \quad (16)$$

このとき、荷重系の次元数は $d = 1$ であり、係数行列などは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} A_Z &= [-\Omega] \\ G_{YBZ} &= [0 \ 0 \ 0 \ -\sqrt{2\Omega}]^T \\ Q_Z &= [\sigma^2] \\ \Phi_Z(x_1, x_2) &= [e^{-\Omega|x_1-x_2|}] \\ R_Z &= [\sigma^2/2\Omega] \end{aligned}$$

この荷重モデルのパワースペクトル密度関数は、荷重の空間的な相関の程度を表す波数パラメータ $k = \Omega/2\pi l$ を種々変化させた場合 図-4 のように示される。

さらに、指数余弦関数形の自己相関関数の場合、 $R_r(\lambda)$ および $S_r(\omega)$ は次式で与えられる。

$$R_r(\lambda) = \sigma^2 e^{-\beta|\lambda|} \cos(\Omega\lambda) \quad (17)$$

$$S_r(\omega) = \frac{\sigma^2 \beta (\Omega^2 + \beta^2 + \omega^2)}{\pi((\Omega^2 + \beta^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2)} \quad (18)$$

荷重系の次元数は $d = 2$ であり、係数行列などは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} A_Z &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\Omega^2 + \beta^2) & -2\beta \end{bmatrix} \\ G_{YBZ} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2\beta}\sqrt{\Omega^2 + \beta^2} & \sqrt{2\beta} \end{bmatrix} \\ Q_Z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \\ \Phi_Z(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} e^{-\beta(x_1-x_2)} [\cos \Omega(x_1-x_2) + \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega(x_1-x_2)] \\ -\frac{\Omega^2 + \beta^2}{\Omega} e^{-\beta(x_1-x_2)} \sin \Omega(x_1-x_2) \\ \frac{1}{\Omega} e^{-\beta(x_1-x_2)} \sin \Omega(x_1-x_2) \\ e^{-\beta(x_1-x_2)} [\cos \Omega(x_1-x_2) - \frac{\beta}{\Omega} \sin \Omega(x_1-x_2)] \end{bmatrix} \\ R_Z &= \begin{bmatrix} \sigma^2/4\beta(\Omega^2 + \beta^2) & 0 \\ 0 & \sigma^2/4\beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

この荷重モデルのパワースペクトル密度関数は、パワースペクトル密度関数の中心周波数を表すパラメータ $k = \Omega/2\pi l$ を種々変化させ、スペクトル幅を表すパラメータの値を $h = \beta/\Omega = 0.1$ のようにすると 図-5 のように示される。

4. 構造-荷重系の状態方程式と境界条件

4.1 構造-荷重系の節点行列

構造系の状態変数 $Y(x)$ と荷重系の状態変数 $Z(x)$ を合成して、構造-荷重系の状態変数を

$$X(x) = \begin{bmatrix} Y(x) \\ Z(x) \end{bmatrix} \quad (19)$$

のように、 $(4+t+d)$ 次元のベクトルで定義する。この状態変数は、 i 径間の右端 X_i^R より $i+1$ 径間の左端 X_{i+1}^L へ i 点の節点行列 P_{Xi} により伝達される。

$$X_{i+1}^L = P_{Xi} X_i^R \quad (20)$$

この節点行列 P_{Xi} は、次のようなブロックより構成される。

$$P_{Xi} = \begin{bmatrix} P_{Yi} & 0_{4+t,d} \\ 0_{d,4+t} & I_d \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここに、 P_{Yi} は連続ばり系の状態変数 $Y(x)$ の i 点の節点マトリックスであり、次式のように与えられる。

$$P_{Yi} = \begin{bmatrix} I_4 & P_{Yi}^{12} \\ P_{Yi}^{21} & P_{Yi}^{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここで、 P_{Yi}^{12} 、 P_{Yi}^{21} および P_{Yi}^{22} は節点の条件により定められる行列であり、以下のように定式される。

i 節点の未知量が 1 個の場合、その未知量が t 次元の未知量ベクトル V の j 番目の成分とすると、

$$P_{Yi}^{21} = \begin{bmatrix} 0_{j-1,4} \\ P_{aj} \\ 0_{t-j,4} \end{bmatrix} \quad (23-1)$$

$$P_{Yi}^{12} = [0_{4,j-1} \ P_{bj} \ 0_{4,t-j}] \quad (23-2)$$

$$P_{Yi}^{22} = I_t - \Delta_{t,j} \quad (23-3)$$

のように定義される。ここに、 $\Delta_{t,j}$ は j, j 要素が α_j でそれ以外の要素が 0 の $(t \times t)$ 次元の行列である。さらに、 α_j, P_{aj}, P_{bj} は節点の条件により、以下の値となる。

a) ヒンジ支点の場合

$$\alpha_j = 1$$

$$P_{aj} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$P_{bj} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (24-1)$$

b) ヒンジ点の場合

$$\alpha_j = 1$$

$$P_{aj} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$P_{bj} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (24-2)$$

c) バネ定数 k_{yi} の鉛直バネの場合

$$\alpha_j = 1 + 1/k_{yi}$$

$$P_{aj} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$P_{bj} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (24-3)$$

d) バネ定数 $k_{\phi i}$ の回転バネの場合

$$\alpha_j = 1 + 1/k_{\phi i}$$

$$P_{aj} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

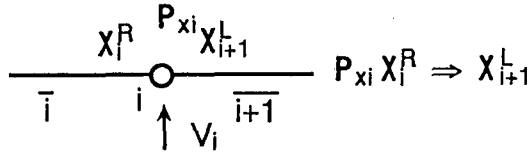


図-6 節点マトリックス

$$P_{bj} = [0 \ 0 \ -1 \ 0]^T \quad (24-4)$$

さらに、 i 節点の未知量が 2 個の場合、未知量が未知量ベクトル V の k および $(k+1)$ 番目の成分として、式 (23) において $j = k, k+1$ とする j についての和を取ることで得られる。

なお、端部支点でバネを含まない場合 P_{Yi} は単位行列となる。

4.2 構造物-荷重系の状態方程式

連続ばり系の状態方程式 (5) と荷重系の状態方程式 (9) および式 (8) より、 $(l_i \leq x \leq l_{i+1})$ 区間の構造物-荷重系の状態方程式は、

$$\frac{d}{dx} X(x) = A_X(x) X(x) + N_X(x) \quad (l_i \leq x \leq l_{i+1}) \quad (25-1)$$

$$i \text{ 節点の条件: } X_{i+1}^L = P_{Xi} X_i^R \quad (25-2)$$

$$\text{境界条件: } X(0) = X_0, X(l) = X_l \quad (25-3)$$

のように、平均値 0 の白色雑音過程ベクトル $N_X(x)$ を入力とする確率微分方程式で表される。ここに、

$$A_X(x) = \begin{bmatrix} A_Y(x) & A_{YZ}(x) \\ 0_{d,4+t} & A_Z \end{bmatrix} \quad (26-1)$$

$$N_X(x) = \begin{bmatrix} 0_{4+t} \\ N_Z(x) \end{bmatrix} \quad (26-2)$$

$$A_{YZ}(x) = \begin{bmatrix} G_{YBZ}(x) \\ 0_{t,d} \end{bmatrix} \quad (26-3)$$

さらに、

$$E[N_X(x_1) N_X^T(x_2)] = Q_X \delta(x_1 - x_2) \quad (27-1)$$

$$Q_X = \begin{bmatrix} 0_{4+t,4+t} & 0_{4+t,d} \\ 0_{d,4+t} & Q_Z \end{bmatrix} \quad (27-2)$$

である。また、境界条件 X_0 と X_l は

$$X_0 = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, X_l = \begin{bmatrix} Y_l \\ Z_l \end{bmatrix} \quad (28)$$

により構成されている。 Y_0, Y_l は連続ばり系の状態変数の境界条件であり、他方、 Z_0, Z_l は荷重系式 (9) の解の $x=0, x=l$ における値である。

状態方程式 (25) の解は、

$$X(x) = \Phi_X(x, l_i) \Lambda(i, 0) X_0$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{j=1}^i \{ \Phi_X(x, l_i) \Lambda(i, j) \\ & \times \int_{l_{j-1}}^{l_j} \Phi_X(l_j, \lambda) N_X(\lambda) d\lambda \} \\ & + \int_{l_i}^x \Phi_X(x, \lambda) N_X(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (29)$$

となる。 $\Phi_X(x_2, x_1)$ は $X(x)$ の状態遷移行列であり、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Phi_X(x_2, x_1) &= A_X(x) \Phi_X(x_2, x_1) \\ \Phi_X(x_1, x_1) &= I_{4+t+d} \end{aligned} \quad (30)$$

で定義される。さらに、状態遷移行列 $\Phi_X(x_2, x_1)$ は

$$\Phi_X(x_2, x_1) = \begin{bmatrix} \Phi_Y(x_2, x_1) & \Phi_{YZ}(x_2, x_1) \\ 0_{d,4+t} & \Phi_Z(x_2, x_1) \end{bmatrix} \quad (31)$$

のように分割できる。なお、 $\Phi_{YZ}(x_2, x_1)$ は、荷重系に単位入力を加えたときの構造物系の応答より構成される行列である。また、 $\Lambda(j, i)$ は、 i 点左側より j 点右側へ状態変数を伝達する行列であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Lambda(j, i) &= P_{Xj} \Phi_X(l_j, l_{j-1}) P_{Xj-1} \\ &\cdots \Phi_X(l_{i+1}, l_i) P_{Xi} \end{aligned} \quad (32)$$

4.3 構造物-荷重系の境界条件の処理

連続ばり系の左端では、 $Y_B(0)$ の 4 変数は回転支持、固定支持および自由端対して、それぞれ 2 個の変数が未知量となる。これを $\tilde{Y}_{B0}$ とする。また、端部がバネ支点であっても節点マトリックスを介することで、いずれかの境界条件に変換できる。他方、右端では、 $Y_B(l)$ の 4 変数は対応する境界条件に対して、2 変数は 0 となる。これを $\tilde{Y}_{Bl}$ とする。

これらの変数を用いて、構造物系の状態変数の左端および右端の境界ベクトルを

$$\tilde{Y}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{B0} \\ V_0 \end{bmatrix}, \tilde{Y}_l = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{Bl} \\ V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_2 \\ V_l \end{bmatrix} \quad (33)$$

で定義する。左端境界条件は

$$Y_0 = B_Y \tilde{Y}_0 \quad (34)$$

と表される。右端では節点未知変数も 0 とするように

$$B'_{Yl} Y_l = \tilde{Y}_l = 0_{2+t} \quad (35)$$

とする。なお、 B_Y と B'_{Yl} は、連続ばり系の左端と右端の境界マトリックスである⁽¹⁾。

これらの境界条件での処理を、構造物-荷重系に拡張する。構造物-荷重系では、左端と右端の境界ベクトルを、

$$\tilde{X}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, \tilde{X}_l = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_l \\ Z_l \end{bmatrix} \quad (36)$$

で定義する。境界マトリックスを用いて、始端と終端ベクトル X_0, X_l を

$$X_0 = B_X \tilde{X}_0 \quad (37-1)$$

$$B'_{Xl} X_l = \tilde{X}_l \quad (37-2)$$

のように表す。ここに、左端と右端の境界マトリックスは次式のようなブロックから構成される。

$$B_X = \begin{bmatrix} B_Y & 0_{4+t,d} \\ 0_{d,t+2} & I_d \end{bmatrix} \quad (38-1)$$

$$B'_X = \begin{bmatrix} B'_Y & 0_{2+t,d} \\ 0_{d,t+4} & I_d \end{bmatrix} \quad (38-2)$$

5. 不規則応答解析

5.1 構造物-荷重系の共分散方程式

応答 $X(x)$ は平均値回りの変動のみを考えているので、応答の共分散 $R_X(x)$ は、 $E[X(x)X^T(x)]$ で定義される。 $R_X(x)$ は、

$$R_X(x) = \begin{bmatrix} R_Y(x) & R_{YZ}(x) \\ R_{ZY}(x) & R_Z \end{bmatrix} \quad (39)$$

のようなブロックより構成される。 R_Z は式(9)で与えられる荷重系の定常応答 $Z(x)$ の共分散である。さらに、構造物系ははり部材の応答と節点の未知量の共分散より、次式のように構成されており、

$$R_Y(x) = \begin{bmatrix} R_{YB}(x) & R_{YBV}(x) \\ R_{VYB}(x) & R_V \end{bmatrix} \quad (40)$$

本論文の目的である、はり部材の共分散は、 $R_{YB}(x)$ より求めることができる。

応答過程の共分散 $R_X(x)$ は、状態変数 $X(x)$ と同じく、節点においては、節点行列により伝達される。 i 部材右端の共分散を R_{Xi}^R 、 $i+1$ 部材左端の共分散を R_{Xi+1}^L とすると、 i 節点の節点マトリックスを用いて、

$$R_{Xi+1}^L = P_{Xi} R_{Xi}^R P_{Xi}^T \quad (41)$$

のように伝達される。

この共分散 $R_X(x)$ の ($l_i \leq x \leq l_{i+1}$) における空間的変化は、次式の共分散方程式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R_X(x) &= A_X(x) R_X(x) + R_X(x) A_X^T(x) \\ &+ E[N_X(x) X_0^T] \Lambda^T(i, 0) \Phi_X^T(x, l_i) \\ &+ \Phi_X(x, l_i) \Lambda(i, 0) E[X_0 N_X^T(x)] \\ &+ Q_X \end{aligned} \quad (42)$$

$$i+1 \text{ 部材左端の境界条件: } R_{Xi+1}^L = P_{Xi} R_{Xi}^R P_{Xi}^T$$

また、左端と右端の境界条件の共分散は

$$R_{X0} = E[X_0 X_0^T], R_{Xi} = E[X_i X_i^T] \quad (43)$$

である。

式(42)の共分散方程式において、左端境界条件の共分散 R_{X0} が求められ、さらに、 $E[X_0 N_X^T(x)]$ およびこれの転置行列である $E[N_X(x) X_0^T]$ が得られると、この方程式は、微分方程式の数値解法により解くことができる。

5.2 境界条件の処理

式(42)の共分散方程式は、境界値問題になっており、これを解くために初期値問題への変換を行う。そこで、

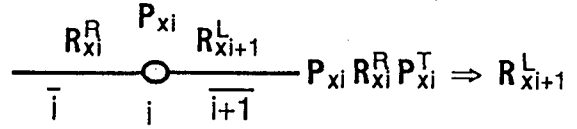


図-7 共分散応答と節点マトリックス

$E[X_0 N_X^T(x)]$ と左端境界条件の共分散 R_{X0} の誘導について説明する。

1) $E[X_0 N_X^T(x)]$ の誘導

解過程 $X(x)$ において、 $x = l$ の値すなわち X_l は式(29)より与えられる。この式に、右側より ($l_i \leq x \leq l_{i+1}$) 区間で定義された白色雑音 $N_X(x)$ をかけて、白色雑音過程の性質式(27)を用いて積分を実行し、さらに、境界条件式(37)の関係を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_l N_X^T(x)] &= B'_X \Lambda(s, 0) B_X E[\tilde{X}_0 N_X^T(x)] \\ &+ B'_X \Lambda(s, i+1) \Phi_X(x, l_i) Q_X \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、 $E[\tilde{X}_l N_X^T(x)]$ および $E[\tilde{X}_0 N_X^T(x)]$ は、

$$E[\tilde{X}_l N_X^T(x)] = \begin{bmatrix} E[0_{2+t} 0_{4+t}^T] & E[0_{2+t} N_Z^T(x)] \\ E[Z_l 0_{4+t}^T] & E[Z_l N_Z^T(x)] \end{bmatrix} \quad (45-1)$$

$$E[\tilde{X}_0 N_X^T(x)] = \begin{bmatrix} E[\tilde{Y}_0 0_{4+t}^T] & E[\tilde{Y}_0 N_Z^T(x)] \\ E[Z_0 0_{4+t}^T] & E[Z_0 N_Z^T(x)] \end{bmatrix} \quad (45-2)$$

のように分割できる。また、荷重系の初期条件と外力は独立であることから、式(44)は、 $E[\tilde{X}_0 N_X^T(x)]$ に関する連立方程式として解くことができる。従って、

$$E[X_0 N_X^T(x)] = B_X E[\tilde{X}_0 N_X^T(x)] \quad (46)$$

を得る。

なお、式(42)および式(44)の詳細な計算の過程については、既に文献(1)において報告した。

2) R_{X0} の誘導

右端境界の共分散 R_{Xi} は、左端境界の共分散 R_{X0} と ($0 \leq x \leq l$) 区間の荷重項 $P_X(l)$ によって、

$$R_{Xi} = \Lambda(s, 0) R_{X0} \Lambda^T(s, 0) + P_X(l) \quad (47)$$

のように表すことができる。 $P_X(l)$ は共分散方程式(42)において $R_{X0} = 0$ としたときの $x = l$ の解として計算できる。さらに、式(47)の各マトリックスは構造系と荷重系について、次のように分解できる。

$$R_{Xi} = \begin{bmatrix} R_{Yi} & R_{YZi} \\ R_{ZYi} & R_Z \end{bmatrix} \quad (48-1)$$

$$R_{X0} = \begin{bmatrix} R_{Y0} & R_{YZ0} \\ R_{ZY0} & R_Z \end{bmatrix} \quad (48-2)$$

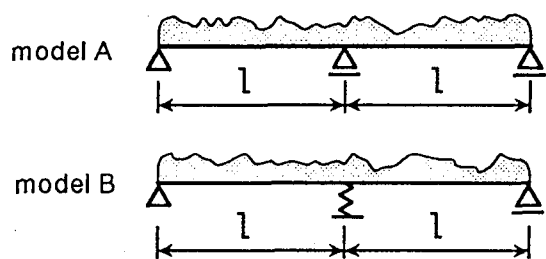


図-8 解析モデル

$$P_X(l) = \begin{bmatrix} P_Y(l) & P_{YZ}(l) \\ P_{ZY}(l) & P_Z(l) \end{bmatrix} \quad (48-3)$$

$$\Lambda(s, 0) = \begin{bmatrix} \Lambda_Y & \Lambda_{YZ} \\ 0_{d,4+t} & \Lambda_Z \end{bmatrix} \quad (48-4)$$

また、式(35)の関係を用いると、次式を得る。

$$B'_X R_X l B'_X{}^T = \begin{bmatrix} 0_{2+t,2+t} & 0_{2+t,d} \\ 0_{d,2+t} & R_Z \end{bmatrix} \quad (49)$$

ここで、 R_Z は式(13)より得られる。なお、 $R_X(x)$ および $P_X(l)$ は対称行列である。

これらの関係および境界条件式(34),(35)を用いると式(47)は、 R_{Y0} と R_{YZ0} に関する連立方程式として解くことができる。

6. 数値計算と考察

6.1 解析モデルについて

本解法の有効性を検証するため、さらに、相関のある荷重を受ける連続ばり系の基本的性質を検討するために、図-8に示した2径間連続ばり(model A)および中間支点が鉛直バネ支持の2径間連続ばり(model B)に、指数関数形の自己相関関数を有する確率過程でモデル化された荷重が作用する場合、さらに、指数余弦関数形の自己相関関数を有する確率過程でモデル化された荷重が作用する場合についての解析を行った。これらの荷重モデルについては、3章において既に説明している。

数値計算では、基準となる諸量で状態変数の無次元化を行っている⁽¹⁾。このとき、不規則分布荷重の強度は、一様分布荷重強度 p と径間長 l により $\sigma^2 l / p^2 = 1$ に規定した。また、バネ支持では、バネの影響が明確となるようにバネ定数は $k_y = 200EI/l^3$ のような柔らかいものとした。

なお、以下に示す解析結果の図において、それぞれの応答の標準偏差は、一様分布荷重 p が作用する2径間連続ばりの応答の最大値 $\bar{y}_{\max}$, $\bar{\phi}_{\max}$, $\bar{M}_{\max}$, および $\bar{Q}_{\max}$ で規準化している。

6.2 指数関数形の場合の解析

図-9は、2径間連続ばりにおいて、指数関数形の自己相関関数を有する荷重モデルのスペクトルパラメータを

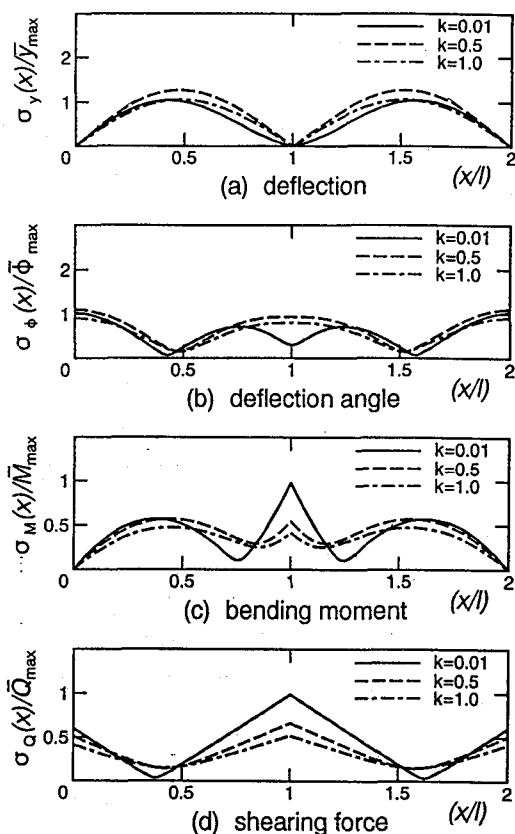


図-9 2径間連続ばりの応答の標準偏差
(指数関数型の自己相関, model A)

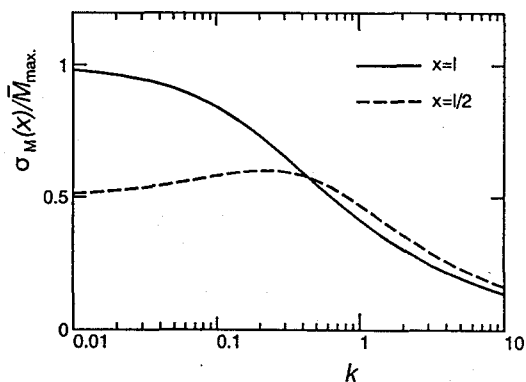


図-10 パラメータ k の変化による中央支点
および径間中央の曲げモーメント応答の変動
(指数関数型の自己相関, Model A)

$k = 0.01, 0.5, 1.0$ と変化させたときの応答の標準偏差を示したものである。横軸は単径間長で規準化している。実線は $k = 0.01$ の場合、破線は $k = 0.5$ の場合、そして一点鎖線は $k = 1.0$ の場合を示している。 $k \rightarrow 0$ とすると、

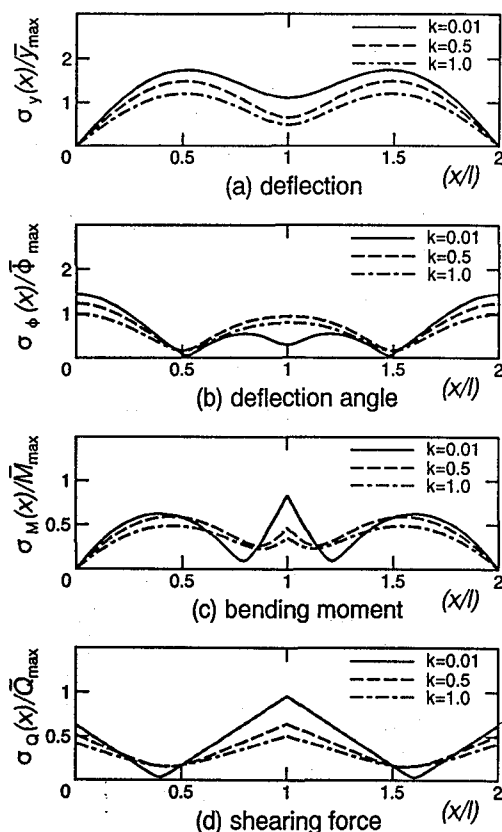


図-11 2径間連続ばりの応答の標準偏差
(指数関数型の自己相関, model B)

等分布荷重の強度が不規則に変化する応答に漸近し、応答の最大値は1に近づく。一方 $k \rightarrow \infty$ では、白色雑音過程による応答に漸近する。しかし、ここでの荷重モデルは k の値にかかわらず荷重のパワーを一定としていることから、 $k \rightarrow \infty$ の場合の応答値は低下する。

図(a)はたわみの応答である。たわみは各支点で、確率1で0となり、 $x = l/2$ 近傍で最大となっている。また、スペクトルパラメータ k の変化にともない応答の最大値は $k = 0.5$ 付近をピークとするような変化を示している。図(b)と図(d)はたわみ角とせん断力の応答である。荷重が変動するためにたわみ角とせん断力は確率1で0となる点はない。また、どちらの応答も k の変化により、中間支点上での応答の変動が最大となっている。図(c)は曲げモーメントの応答であり、両端境界において確率1で0となり、中間支点上での応答の変動が最大となっている。また、応答の最大値は k の増加にともない、中間支点上からスパン中央付近に遷移している。

さらに、この現象を調べるために、図-10にスペクトルパラメータ k を変化させたときの、曲げモーメント応答の $x = l$ および $x = l/2$ における標準偏差値の変化

を示した。実線は中間支点上での、破線はスパン中央での応答である。中間支点上の応答は k の増加と共に減少し、 $k = 0.45$ 以上ではスパン中央の応答の方が大きくなっていることが分かる。

なお、この計算において、パラメータ k の値が約2以上の大きなものとなると、式(47)から導かれる連立方程式が非正則となり、初期条件 R_{X0} の解が得られなくなる。この問題を解決するために、以下の検討を行った。

式(47)および式(48)から得られる連立方程式の解を示すと、

$$R_{YZ0} = -C(\Lambda_{YZ} R_Z + P_{YZ}(l) \Lambda_Z^{-1}) \quad (50-1)$$

$$R_{Y0} = -C(\Lambda_{YZ} R_{YZ0}^T \Lambda_Y^T + \Lambda_Y R_{YZ0} \Lambda_{YZ}^T + \Lambda_{YZ} R_Z \Lambda_{YZ}^T + P_Y(l) C^T) \quad (50-2)$$

$$C = B_Y (B_Y' \Lambda_Y B_Y)^{-1} B_Y' \quad (50-3)$$

のようになる。この第1式、式(50-1)の第2項は、本来、 k を大きくすることで第1項に比べて無視できるような値になる項である。ところが、数値計算では逆に発散する傾向にある。このことが原因で k が大きくなると初期条件 R_{X0} の解が得られなくなると推察された。そこで、 $k \geq 1$ の場合式(50-1)の第2項を0とすることで、この問題を解決した。このことの検証は、 $k = 1$ および $k = 1.5$ の値において、式(50-1)をそのまま用いた場合と、その第2項を0とした場合の比較により、両者が同じ結果になることを確認した。

図-11は、中間支点が鉛直バネ支持の2径間連続ばりにおいて、荷重のスペクトルパラメータを2径間連続ばりの場合と同じく変化させたときの、応答の標準偏差を示したものである。実線は $k = 0.01$ の場合、破線は $k = 0.5$ の場合、そして一点鎖線は $k = 1.0$ の場合を示している。

図(a)のたわみの応答において、中間支点近傍の応答が、連続ばりのそれと大きく異なり確率1で0とはならない。また、スペクトルパラメータ k の変化にともない応答の最大値は、連続ばりの場合と異なり、 k の増大により減少している。図(b)のたわみ角応答では、連続ばりとの差がたわみの場合ほど大きくない。図(c)は曲げモーメントの応答であり、中間支点上での応答の変動が最大となっている。中間支点付近の応答が連続ばりの場合と多少異なる。図(d)のせん断力の応答においては、連続ばりの結果とほとんど同じである。

6.3 指数余弦関数形の場合の解析

図-12は2径間連続ばりにおいて、指数余弦関数形の自己相関関数を有する荷重モデルのスペクトルピーク幅パラメータを $h = 0.1$ のように狭くした値に固定し、スペクトル中心周波数パラメータを $k = 0.01, 0.2, 0.5, 1.0$ と変化させたときの応答の標準偏差を示したものである。図の実線は $k = 0.01$ の場合、破線は $k = 0.2$ の場合、一点鎖

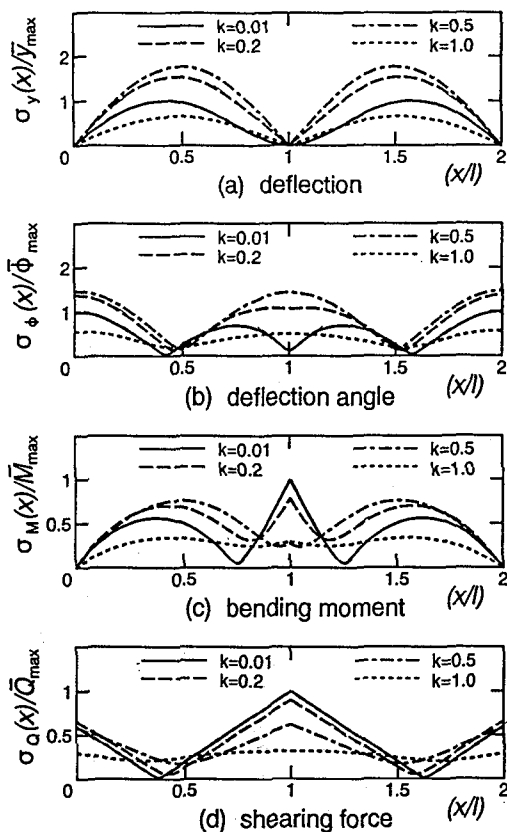


図-12 2径間連続ばりの応答の標準偏差
(指数余弦関数型の自己相関)
($h = 0.1$, model A)

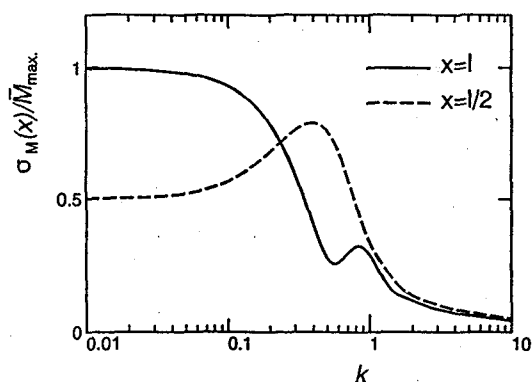


図-13 波数パラメータ k の変化による中央支点
および径間中央の曲げモーメント応答の変動
(指数余弦関数型の自己相関)
($h = 0.1$, model A)

線は $k = 0.5$ の場合、そして点線は $k = 1.0$ の場合を示している。スペクトルパラメータ k の変化にともなう応答の変動は、指数関数形の場合と同じような傾向を示すが、変

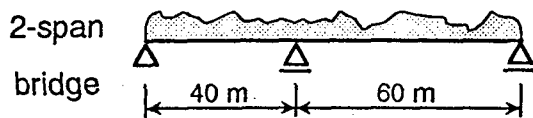


図-14 2径間連続桁橋

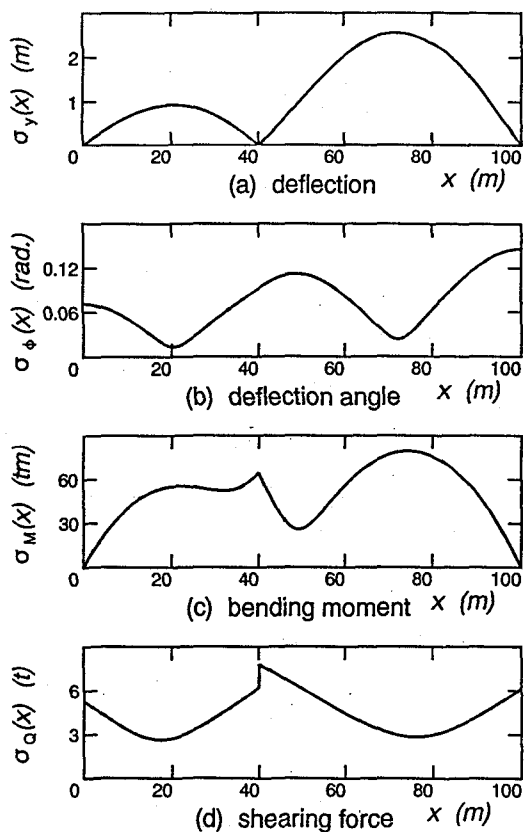


図-15 2径間連続桁橋の車両列荷重
による応答の標準偏差

動の大きさはこの問題の場合が大きいようであり、 k が大きくなることで応答値はより小さくなっている。このことは、連続ばりの変形に寄与する不規則分布荷重の低周波成分のパワーが指数関数形よりも減少していることによると考えられる。

図-13 は $h = 0.1$ に固定し、パラメータ k を変化させたときの、曲げモーメント応答の $x = l$ および $x = l/2$ における標準偏差値の変化を示したものである。実線は中間支点上での、破線はスパン中央での応答である。図より、 $k = 0.25$ 付近からスパン中央の応答の方が大きくなっていることが分かる。さらに、 $k = 1$ のように波数パラメータが整数となり荷重の波形が第1径間と第2径間で対称となる

ような場合、中間支点の応答は極大値となり、 $k = 0.5, 1.5$ のように荷重の波形が逆対称となるような場合、中間支点の応答は極小値となっていることが分かる。

これらのことから連続ばり系の場合、不規則荷重の波数のパラメータ k の値に鋭敏に反応した応答の変動を示すことが分かった。

6.4 車両列荷重を用いた解析

本解法の実用性を確認するために、白木ら⁽³⁾が求めた、都市高速道路の渋滞時の車両列荷重を用い、図-14に示す2径間連続桁橋の解析を行った。

白木らの荷重モデルは、自己相関関数が指数関数形であり、分散が $\sigma^2 = 0.4064(l^2/m^2) [39.03(kN^2/m^2)]$ 、波数パラメータが $\Omega = 0.3164(m^{-1})$ としている。この荷重モデルは径間長が約 20m のとき、前節の波数パラメータ $k = 1$ に相当し、長径間長が 60m の2径間連続桁橋では、 $k \approx 3$ に相当する。

図-15に2径間連続桁橋の応答の標準偏差を示す。図より、たわみと曲げモーメント応答の最大値は長径間の中央付近で発生し、たわみ角応答は右端で最大値をとる。さらに、非対称構造であることから、せん断力応答は中間支点で不連続となっている。なお、曲げ剛性を $EI = 10000(tm^2)$ のように小さな値に仮定したため、たわみおよびたわみ角応答は現実的な値より大きくなっている。

また、白木らは、同じ問題をグリーン関数法を用いた複雑な解析的演算により解き、曲げモーメントとせん断力の分散応答を得ている。しかし、本解法を適用すると、比較的簡単な数値計算により、構造応答の変形および断面力の分散・共分散を得ることができる。さらに、構造モデルや荷重モデルの変更に対しても係数行列を変更するだけで対応できる。なお、本解析による分散応答の結果と白木らの結果は、図上の比較で一致することを確認した。

7. おわりに

本論文は、任意の空間的相関のある不規則分布荷重を受ける、ばね支点を含む多径間連続ばり系の実用的な不規則応答解析法を提案したものである。確率伝達マトリックス法の適用において、実在の不規則荷重の作用による構造物の不規則応答を解析するためには、本論文の荷重モデルが必要となる。著者らがすでに報告した2次元の構造系の解析⁽¹⁵⁾においても、この荷重モデルとその取扱いを基礎としている。

本論文では、任意の空間的相関を有する不規則分布荷重のフィルタ理論に基づく状態空間の取扱いを説明した。さらに、状態空間を構造-荷重系として合成した場合の取扱いと、状態変数の共分散を未知数とした場合の処理について説明した。本研究で得られた結果を要約すると、次のようになる。

(1) 空間的な相関を有する不規則荷重を、空間形成フィルタを通過した波形で表し、確率微分方程式の解過程で表現することにより、荷重系の状態空間を定義した。

(2) 構造-荷重系の状態変数からなる伊藤型の確率微分方程式に対応する共分散方程式の解法を示し、さらに、荷重の周期パラメータの増大により解が不安定になる数値計算における問題点を解決し、任意の相関を有する不規則分布荷重を受ける連続ばり系の汎用的な解析手法を提案した。

(3) 本解法を、指数関数形および指数余弦関数形の自己相関関数を有する確率過程でモデル化した不規則分布荷重を受ける2径間連続ばり系に適用し、その有効性を確認した。

(4) 本解法で得られた2径間連続ばり系の応答性状から、不規則荷重の周期パラメータの変化に対して、構造系の応答が鋭敏に変動する現象を明らかにした。

(5) 本解法を用いて、渋滞時の車両列荷重を受ける、2径間連続桁橋の解析を行ない、本解法の実用性を確認した。

本研究の計算は、マトリックス演算ソフトウェア MATLAB を用いて行ったことを付記する。

参考文献

- 1) 岡林隆敏, 河角省治, 吉田啓三: 不規則分布荷重を受ける連続ばりの分散・共分散解析, 土木学会論文集, No. 525/I-33, pp.117-126, 1995-10.
- 2) 高岡宣善, 白木渡, 松保重之: 不規則関数論に基づく道路橋空間領域での信頼性解析, 土木学会論文報告集, 第334号, pp.79-88, 1983-6.
- 3) 白木渡, 高岡宣善, 松保重之, 山本克之: 都市高速道路高架橋における渋滞時活荷重のモデル化, 土木学会論文集, No. 362/I-4, pp.239-248, 1985-10.
- 4) H.O.Madson, S.krenk and N.C.Lind: *Method of Structural Safety*, Prentice-Hall, Inc., 1986.
- 5) R.B.Corotis and V.A.Jaria: *Stochastic Nature of Bulding Live Load*, ASCE. Vol.105, No.ST3, pp.493-510, 1979-3.
- 6) 有本卓: カルマンフィルタ, 産業図書, 1981-4.
- 7) 木村英紀: 動的システム理論, 産業図書, 1974-7.
- 8) L.Arnold: *Stochastic Differential Equation*, Jhon Wiley & Sons, 1974.
- 9) 岡林隆敏, 浦川剛, 吉田啓三: 相関のある不規則分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第341号, pp.155-162, 1984-1.
- 10) 岡林隆敏: 不規則な分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第316号, pp.11-21, 1981-12.
- 11) 岡林隆敏, 花井正美, 吉田啓三: 不規則分布荷重を受けるアーチ部材の分散・共分散解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第423号, pp.97-104, 1991-5.
- 12) 成岡昌夫, 遠田良喜: 伝達マトリックス法(コンピュータによる構造工学講座), 倍風館, 1975-3.

- 13) 大地洋三：マトリックス構造解析，コロナ社，1979-8.
- 14) E.C.Pestel and F.A.Leckie: *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, 1963.
- 15) 河角省治，岡林隆敏，崎山毅：不規則分布荷重を受ける直列型剛節構造系の確率伝達マトリックス法による解析，構造工学論文集，Vol.42A, pp.439-447, 1996-3.

(1996年9月6日 受付)