

等価介在物法を用いた材料特性分布の逆解析

BACK ANALYSIS OF HETEROGENEOUS MATERIAL PROPERTY USING EQUIVALENT INCLUSION METHOD

堀 宗朗*・細川 直行**

Muneo HORI, Naoyuki HOSOKAWA

*正会員 Ph.D. 東京大学助教授 地震研究所 (〒113 東京都文京区弥生 1-1-11)

**正会員 工修 東京ガス (〒105 東京都港区海岸 1-5-20)

The prediction of the distribution of heterogeneity is a challenging subject in soil and rock engineering. In general, this prediction is formulated as a non-linear inverse problem, and it is not transparent to see the validity of the back analysis due to its ill-posedness. This paper proposes formulation and analysis of the distribution prediction based on the equivalent inclusion method. Two sequential linear inverse problems are posed; the first for predicting eigenfield which disturbs observed data, and the second for determining heterogeneity equivalent with the eigenfield. Once the ill-posedness of these two problems is identified, relatively simple back analysis methods can be found which overcomes the ill-posedness to some extent. In simple numerical simulation, the advantage of the proposed formulation and analysis method is demonstrated. The limitation of the proposed method is shown at the same time.

Key Words : back analysis, inverse problem, equivalent inclusion method, Green function

1. はじめに

現在、工学・理学において高い関心を集めている逆問題^{1),2)}の中でも、物体表面の計測データを用いて内部の材料特性の分布を推定する問題は土木工学の中のホットテーマのとなっている。これは、合理的な設計・施工・維持管理には、材料特性分布の高精度の推定が重要な課題となるからである。例えば、岩盤工学においても大規模空洞掘削時の岩盤の緩み域³⁾や岩盤内の高透水領域の推定⁴⁾に関して研究が進められている。

材料力学の逆解析に関する数学理論⁵⁾は一応の完成を見ている。したがって、解析の成功の鍵を握るのは逆問題の設定の仕方である。例えば、材料特性分布の推定は非線形逆問題として設定されるため、問題の適切性(解の存在・一意性・連続性)を明らかにすることが難しく、解析の見通しがよくない。この結果、解の妥当性に常に疑問が残る、また推定精度向上のために測定の実・量の改善を検討することも容易ではない。

このような問題の解決には、不適切性が明確な逆問題として材料特性分布推定を設定し直すことが必要である。本研究は不均一体問題を等価介在物法を用いて定式化した上で、材料特性分布推定を線形逆問題とし

て設定し、効果的な逆解析手法を構築することを試みる。逆問題が線形化されることによって、不適切性の判定が容易となり、計測データから推定できる精度の限界が明らかになる。この結果、測定と解析のバランスがとれた、材料特性分布の推定のための逆解析システムの開発につながる事が期待できる。

簡単のため、本研究は2次元線形浸透流問題を例とする。しかし、提案される逆問題の設定・解析手法は、3次元や非線形は勿論、力学・電磁気学・光学等に適用することが可能である。本論文の構成は以下の通りである。最初に材料特性分布推定の問題点について2章で整理する。これを解消すべく3章において等価介在物法を用いて逆問題を設定し直し、不適切性を明らかにする。その上で不適切性に対処した解析手法を提案する。4章において数値シミュレーションを行い、提案された逆解析手法の有効性を検討する。

2. 材料特性分布推定の逆問題の性質

透水係数が場所毎に変わる不均一体 V に対して、表面 ∂V で圧力と流量を観測し、内部の透水係数の分布を推定することを考える。流体の粘性を1、透水係

数¹を k_{ij} とすると、圧力 p 、圧力勾配 q_i 、流速 v_i に関する V の場の式は、次のようになる。

$$q_i = p_{,i} \quad (1)$$

$$v_i = k_{ij} q_j \quad (2)$$

$$v_{i,i} = 0 \quad (3)$$

、の後の下添え字はその方向の偏微分を表す。また、総和規約を用いている。 ∂V での圧力と流量が $\bar{p}$ と $\bar{q}$ であれば、 $p(\mathbf{x})$ は次の式を満たすことになる。

$$\begin{cases} (k_{ij} p_{,j})_{,i} = 0 & \text{in } V \\ p = \bar{p} \ \& \ n_i k_{ij} p_{,j} = \bar{q} & \text{on } \partial V \end{cases} \quad (4)$$

V での偏微分方程式の解、 $(k_{ij}(\mathbf{x})g_{,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{k}))_{,i} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 、を用いると、式 (4) を満たす p は形式的に次のように与えられる。

$$p = \int_{\partial V} g^q(\mathbf{k}) \bar{p} - g(\mathbf{k}) \bar{q} dS \quad (5)$$

ここで、 $g^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{k}) = n_i(\mathbf{x})k_{ij}(\mathbf{x})g_{,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{k})$ である。また、 $\mathbf{k}$ は g や g^q が k_{ij} の分布に応じて変わること強調している。また、式 (5) より、逆問題は次のように設定される。

$$\begin{aligned} & \text{find } k_{ij}(\mathbf{x}) \text{ in } V \text{ s.t. on } \partial V \\ & \begin{cases} \bar{p} = \int_{\partial V} g^q \bar{p} - g \bar{q} dS \\ \bar{q} = n_i k_{ij} (\int_{\partial V} g^q \bar{p} - g \bar{q} dS)_{,j} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

通常、観測データに比べ推定すべき k_{ij} が多く、解の唯一性や連続性が問題となる。

基本解 g が k_{ij} に関して非線形²であるため、逆問題 (6) の不適切性を明確にすることは難しい。また、逆解析の方針は、推定された k_{ij} から計算される値と観測データの差から適当な目的関数を定義し、非線形計画法の手法を用いて目的関数を最小化することとなる。この目的関数に、 k_{ij} の分布に関する先験情報⁶を利用したり、カルマンフィルタ⁷を用いた最小化が行われる。通常、繰り返し計算が必要となるこのような方法では、収束先が初期値に依存し、数学的に設定された条件を満たす解が得られても、その解が工学的・物理的に妥当か否かは明確ではない。この結果、用いられた逆解析手法の有効性は問題に応じて議論せざるをえず、汎用的な手法を開発することが難しくなっている。

3. 等価介在物法に基づく定式化

等価介在物法は、不均一体問題を等価な均一体に置き換えて解く方法⁸である。この方法では、境界値問題 (4) を適当な基準透水係数 k_{ij}^o を持つ仮想的な均一体 V^o に付加的な流速が分布する問題に置き換える。この付加的な流速は、式 (2) の右辺を $k_{ij}^o q_j + (k_{ij} - k_{ij}^o) q_j$ と書き換えた場合の、第 2 項である。この等価介在物法を用いた透水係数推定の逆問題の設定と逆解析手法を提案する。

3.1 等価介在物法に基づく逆問題の設定

付加的な流速をアイゲン流速 v_i^* とする。 v_i^* が与えられると、式 (1)、(3) の他に、式 (2) に代わる次の式が V^o の場の式となる。

$$v_i = k_{ij}^o q_j + v_i^* \quad (7)$$

この結果、 V^o の圧力は次の式を満たすようになる。

$$\begin{cases} k_{ij}^o p_{,ij} + v_{i,i}^* = 0 & \text{in } V^o \\ p = \bar{p} \ \& \ n_i k_{ij}^o p_{,j} = \bar{q} & \text{on } \partial V^o \end{cases} \quad (8)$$

$-v_{i,i}^*$ は湧きだしとみなせるため、重ね合わせの原理に基づき、問題 (8) の解は、例えば圧力の境界条件と $v_i^* = 0$ として決まる場と境界の圧力を 0 として $v_{i,i}^*$ から決まる場の和で与えられる。前章と同様、 V^o の偏微分方程式の解 $g^o(\mathbf{x})$ を用いるが、 V^o は均一であるため、透水係数 k_{ij}^o の無限体の基本解を利用することができる。この基本解は解析的に計算することができる。また、この基本解を用いて圧力は次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} p = & \int_{V^o} g_{,i}^o v_i^* dV \\ & + \int_{\partial V^o} g^{oq} \bar{p} - g^o (\bar{q} + n_i v_i^*) dS \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $g^{oq}(\mathbf{x}) = n_i(\mathbf{x})k_{ij}^o g_{,j}^o(\mathbf{x})$ である。式 (9) の圧力勾配を q_j とすると、 q_j と式 (7) から決まる流速場 $k_{ij}^o q_j + v_i^*$ は、 V のダルシー則 (2) を満たす。すなわち、

$$k_{ij} q_j = k_{ij}^o q_j + v_i^* \quad \text{in } V^o \quad (10)$$

V^o と V の場が一致することは解の唯一性より保証されるため、式 (10) は等価条件と呼ばれる。

以上より、式 (4) は、式 (8) と v_i^* の積分方程式である等価条件 (10) の組合せに置き換えられることがわ

¹ V は、不連続面が存在するため透水係数が場所毎に変化する岩盤や地盤のモデルとなる。

² k_{ij} の分布形状が予想できる場合、 k_{ij} を分布関数の線形和とし、その係数を推定する逆問題にすることができる¹。

かる。したがって、逆問題(6)は、次の2段階の逆問題と等価となる。

1. 式(9)をもとに、 $\bar{p}$ と $\bar{q}$ から v_i^* を推定する逆問題：

$$\begin{aligned} & \text{find } v_i^* \text{ in } V^o \text{ s.t. on } \partial V^o \\ & \begin{cases} \bar{p} = \int_{V^o} g_{,i}^o v_i^* dV \\ \quad + \int_{\partial V^o} g^{oq} \bar{p} - g^o(\bar{q} + n_i v_i^*) dS \\ \bar{q} = n_i (k_{ij}^o q_j + v_i^*) \end{cases} \quad (11) \end{aligned}$$

2. 式(10)をもとに、 v_i^* から k_{ij} を推定する逆問題：

$$\begin{aligned} & \text{find } k_{ij} \text{ in } V \text{ s.t. in } V \\ & k_{ij} q_j = k_{ij}^o q_j + v_i^* \quad (12) \end{aligned}$$

式(11), (12)から明らかなように、設定された2つの逆問題は、推定すべき量について線形となっている。

3.2 逆問題の不適切性

線形性を利用して、等価介在物法に基づいて設定された2つの逆問題の不適切性を調べる。どちらも解の存在は保証されているが、第1の逆問題に関しては、推定すべき V^o 内の v_i^* が ∂V^o のデータ $\bar{p}$ と $\bar{q}$ よりも数が多くなるため、第2の逆問題に関しては、1次テンソル v_i^* の成分よりも2次テンソル k_{ij} の成分の数が多いため、解の唯一性が問題となることは容易にわかる。しかし、 $\bar{p}$ と $\bar{q}$ から直接 k_{ij} を求めることに比べて、 v_i^* を推定するほうが未知数も少なく、線形逆問題であるため簡単である。

最大の不適切性は第1の逆問題での解の連続性である。これは、内部のアイゲン流速が表面の場に及ぼす影響は、距離に応じて早く減衰することに起因する。すなわち内部のアイゲン流速に対する表面の場の感度が小さいため、内部のアイゲン流速が変化しても表面の場はあまり変化しないことになる。2次元³の場合、基本解 g^o は、遠方で $g^o(\mathbf{x}) \propto \log|\mathbf{x}|$ であるので、式(9)の右辺から、 $\mathbf{y}$ にあるアイゲン流速が $\mathbf{x}$ に作る流速は、

$$|g_{,ij}^o(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_j^*(\mathbf{y})| \approx |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2} \quad (13)$$

となり、ソース点 $\mathbf{y}$ と観測点 $\mathbf{x}$ の距離に対して減衰が早いことがわかる。この減衰の早さはラプラス方程式を支配方程式とする問題に特有であり、浸透流問題に限らず、保存則を支配方程式に持つ問題について当て

はまる。サンブナンの原理にあるように、遠方の影響の近似には減衰の早さは都合がよい。しかし、内部の不均一性の影響が表面に現れなくなるため、表面データから材料特性を逆解析することの難しさを端的に示す。

さらに、 g^o が滑らかであるため、計測方法の問題点も明らかになる。例えば、点 $\mathbf{x}$ の回りに観測点 $\mathbf{x} + n\mathbf{a}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)を設け、圧力の観測値を $(\bar{p})_n = \bar{p}(\mathbf{x} + n\mathbf{a})$ とする。 V^o のアイゲン流速を適当に離散化し $(v^*)_m = v_i^*(\mathbf{y}^{(m)}) dS$ とおき、 g^o を展開して $\mathbf{x} - \mathbf{y}^{(m)}$ で評価すると、 $(\bar{p})_n$ は $(g_{,i}^o + n(g_{,ij}^o a_j) + \dots)(v^*)_m$ の和として与えられる。展開された第3項以降を無視し、 $(g^o)_{0m} = g_{,i}^o$ 、 $(g^o)_{0m} = g_{,ij}^o a_j$ とすると、 $[(\bar{p})_0, (\bar{p})_1, (\bar{p})_2, \dots]^T$ は次のようにマトリクス表示される。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (g^o)_{00} & (g^o)_{01} & \dots \\ (g^o)_{00} + (g^o)_{00} & (g^o)_{01} + (g^o)_{01} & \dots \\ (g^o)_{00} + 2(g^o)_{00} & (g^o)_{01} + 2(g^o)_{01} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} (v^*)_0 \\ (v^*)_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

式(14)の係数マトリクスのランクは2である。実際には高次項を含んでいるが、物体の表面で多くの計測を行おうとすると $\mathbf{a}$ が小さくなる。そのため高次項を含めたとしても、係数マトリクスは2つの固有値が大きく、他は小さくなる。したがって、 $[(v^*)_0, (v^*)_1, \dots]^T$ は $[(\bar{p})_0, (\bar{p})_1, \dots]^T$ に関して連続性が低くなる。上記の考察より、仮に表面で十分な数の観測が可能な場合でも、マトリクスのランクが変わらないため、むやみに観測の数を増やすことには意味が無いことがわかる。

3.3 逆解析手法の定式化

式(14)で示されるように、表面の計測データを直接用いる限り、逆問題(11)の不適切性を除くことはできない。この点に対処すべく、表面の計測データを内部データに変換する方法を構築する。同じアイゲン流速 v_i^* が与えられた V^o に対して、式(8)を分解した次の2つの境界値問題⁴を考える。

⁴ 表面の一部のみで圧力と流量が計測される場合も、その部分の圧力と流量を別々に用いてBVP(1)とBVP(2)が設定できる。

³ 3次元の場合は減衰はさらに早くなる。

BVP(1): 圧力の境界値問題

$$\begin{cases} k_{ij}^o p_{,ij}^{(1)} + v_{i,i}^* = 0 & \text{in } V^o \\ p^{(1)} = \bar{p} & \text{on } \partial V^o \end{cases} \quad (15)$$

BVP(2): 流量の境界値問題

$$\begin{cases} k_{ij}^o p_{,ij}^{(2)} + v_{i,i}^* = 0 & \text{in } V^o \\ n_i(x)(k_{ij}^o p_{,j}^{(2)} + v_i^*) = \bar{q} & \text{on } \partial V^o \end{cases} \quad (16)$$

重ね合わせの原理により、 a が 1 と 2 の両方の場合について、BVP(a) の解は、アイゲン流速を 0 とし境界条件から決まる場 $p^{h(a)}$ と、境界条件を 0 とし v_i^* から決まる場 $p^{d(a)}$ の和である。0 の境界条件に対応するグリーン関数 $g^{o(a)}$ を用いると、 $p^{d(a)} = \int_{V^o} g^{o(a)}(x, y) v_{i,i}^*(y) dV_y$ である。2 つの境界値問題の解は一致するから、圧力勾配⁵は $p_{,i}^{(1)} = p_{,i}^{(2)}$ を満たし、次の式が成立する。

$$\Delta \gamma_i^o(x; v^*) = \Delta q_i^h(x) \quad \text{in } V^o. \quad (17)$$

ここで、 Δq_i^h と $\Delta \gamma_i^o$ は、 $p^{h(a)}$ の圧力勾配 $q_i^{h(a)}$ と $g^{o(a)}$ から定義される積分オペレータ $\gamma^{o(a)}$ によって、それぞれ、 $-q_i^{h(1)} + q_i^{h(2)}$ と $\gamma_i^{o(1)}(v^*) - \gamma_i^{o(2)}(v^*)$ とし定義される。

式(17)では、表面データは V^o 内の圧力勾配 Δq^h という内部のデータに変換されている。したがって、 V^o の場を離散化する場合、オペレータ $\Delta \gamma_i^o$ に対応するマトリクスは正方となる上に、グリーン関数の減衰の速さに起因する不適切性は回避⁶される。しかし、式(17)は逆問題(11)を書き換えたものであるから、解に唯一性が無いという不適切性は解消されない。事実、 V^o 内で発散が 0 となるアイゲン流速の成分を決定することは難しく、 $\Delta \gamma_i^o(v^{**}) = 0$ とする v_i^{**} が存在することになる。この結果、第 2 の逆問題(12)は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} & k_{ij}(\gamma_j^o(v^{**}) + q_j) \\ & = k_{ij}^o(\gamma_j^o(v^{**}) + q_j) + v_i^{**} + v_i^* \quad \text{in } V^o \quad (18) \\ & \Delta \gamma_i^o(v^{**}) = 0 \end{aligned}$$

ここで、 v_i^* は $\Delta \gamma_i^o(v^*) = \Delta q^h$ を満たす式(17)の解の一つであり、 $q_j(x) = q_j^{h(a)} + \gamma^{o(a)}(v^*)$ 、 $\gamma_i^o = \gamma^{o(a)}$ である ($a = 1$ or 2)。

以上より、2 つの線形逆問題(11)、(12)は、 v_i^* に関する式(17)と v_i^{**} と k_{ij} に関する式(18)に置き換えることができる。式(18)は未知のアイゲン流速と透水係数に関する複線形の逆問題である。なお、 k_{ij}^o は任意であるから、異なる k_{ij}^o を用いて式(17)、(18)を解析してもよい。この場合、式(9)で与えられる p や、それから決定される q_i と v_i が、選択された k_{ij}^o に依らないことが新たに条件として加わることになる。

透水係数の分布を直接求める前章の逆問題と、アイゲン流速を用いた本章の 2 つの逆問題を表 3.3 に整理する。(3)では求める関数が線形ないし複線形になることを強調しておく。

表-1 設定された逆問題の比較

(1)	find k_{ij} in V s.t. on ∂V $\bar{p} = \int_{\partial V} g^q \bar{p} - g \bar{q} dS$ $\bar{q} = n_i k_{ij} (\int_{\partial V} g^q \bar{p} - g \bar{q} dS)_{,j}$
(2)	i) find v_i^* in V^o s.t. on ∂V^o $\bar{p} = \int_{V^o} g_{,i}^o v_i^* dV$ $\quad + \int_{\partial V^o} g^{oq} \bar{p} - g^o (\bar{q} + n_i v_i^*) dS$ $\bar{q} = n_i (k_{ij}^o q_j + v_i^*)$ ii) find k_{ij} in V s.t. in V $k_{ij} q_j = k_{ij}^o q_j + v_i^*$
(3)	i) find v_i^* in V^o s.t. in V^o $\Delta \gamma_i^o(v^*) = \Delta q_i^h$ ii) find k_{ij} and v_i^{**} in V^o s.t. in V^o $k_{ij}(\gamma_j^o(v^{**}) + q_j) = k_{ij}^o(\gamma_j^o(v^{**}) + q_j) + v_i^{**} + v_i^*$ $\Delta \gamma_i^o(v^{**}) = 0$

4. 数値計算結果

提案された等価介在物法に基づく逆解析手法の妥当性を示すため、有限要素法を用いた数値シミュレーションを行う。 V を適当な透水係数を持つ N 個の要素に分割し、 V^o の分割も同様に行う。逆解析を行う準備として、境界 ∂V での圧力を指定し流量を計算する。 ∂V を M 分割すると圧力と流量は M 次のベクトル $[\bar{P}_I]$ と

⁵ ベクトル量である流速を用いると、ベクトル量であるアイゲン流速を推定することが容易である。なお、流速の代わりに圧力を用いることも可能である。この場合、スカラー量である圧力から同じくスカラー量であるアイゲン流速の発散 $v_{i,i}^*$ を推定し、ついで $v_{i,i}^*$ から v_i^* を推定し、最後に v_i^* から k_{ij} を推定するという 3 段階の逆解析を行なうことになる。

⁶ $\Delta \gamma_i^o$ の性質上、 Δq_i^h が大きいところの v_i^* は大きくなり、逆に、 Δq_i^h が小さいところの v_i^* は小さくなる。一般に、 Δq_i^h は S から離れたところでは小さくなるため、その部分の v_i^* も小さくなる。したがって、 v_i^* の大きさは妥当な推定の可能性を示す一つの指標となりうる。

$[\bar{Q}_I]$ によって与えられる。ついで、この $[\bar{P}_I]$ と $[\bar{Q}_I]$ を用いてBVP(a)を解き、各要素の $q_i^{h(a)}$ を要素と成分の順に並べた $2N$ 次のベクトル $[Q_I^{h(a)}]$ とする。オペレータ $\gamma_i^{o(a)}(v^*)$ は $2N \times 2N$ の正方マトリクス $[\Gamma_{IJ}^{o(a)}]$ として求まる。これはある要素のアイゲン流速が別の要素に作る圧力勾配⁷を与える。

以上の準備を下に、各要素の v_i^* を $2N$ 次のベクトル $[V_I^*]$ によって表すと、式(17)は次のマトリクス方程式に書き換えることができる。

$$[\Delta \Gamma_{IJ}^o][V_I^*] = [\Delta Q_I] \quad (19)$$

ここで、 $[\Delta \Gamma_{IJ}^o] = [\Gamma_{IJ}^{o(1)} - \Gamma_{IJ}^{o(2)}]$ と $[\Delta Q_I] = -[Q_I^{h(1)}] + [Q_I^{h(2)}]$ である。同様に、式(18)も次のマトリクス方程式に書き換えることができる。

$$[K_{IJ}][(\Gamma_{JK}^o)[V_K^{**}] + [Q_J]] = [K_{IJ}][(\Gamma_{JK}^o)[V_K^{**}] + [Q_J]] + [V_I^*] + [V_I^*] \quad (20)$$

$$[\Delta \Gamma_{IJ}^o][V_I^{**}] = [0]$$

$[K_{IJ}]$ と $[K_{IJ}^o]$ は、各要素の k_{ij} と k_{ij}^o に対応した 2×2 のマトリクスが対角に並ぶ $2N \times 2N$ のマトリクスであり、 $[Q_I] = [Q_I^{h(a)}] + [\Gamma_{IJ}^{o(a)}][V_I^*]$ である。

例題として、図1に示すような中央の3要素に高透水領域がある 3×3 の要素からなる V を考える。 N と M は9と12である。各要素は単位長さをもつ正方形であり、要素の透水係数は無次元化されている。 V

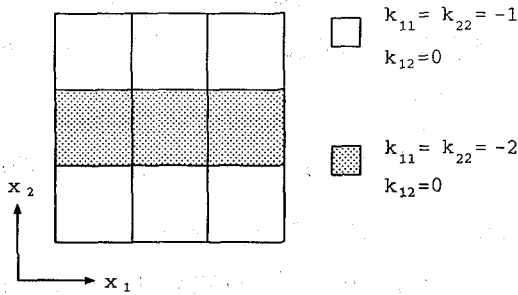


図-1 問題設定

の境界条件を図2に示す。境界条件として与えられた境界の各辺の流量から $[\bar{Q}_I]$ 、境界値問題の解として得られる境界の各節点の圧力から $[\bar{P}_I]$ が決まる。両者とも12次のベクトルである。 $[\bar{Q}_I]$ ないし $[\bar{P}_I]$ を V^o に用いて、対応する $[Q_I^{h(a)}]$ と $[\Gamma_{IJ}^{o(a)}]$ を求めた上で、未知

の $[V_I^*] \cdot [V_I^{**}] \cdot [K_{IJ}]$ を逆解析する。 $[V_I^*] \cdot [V_I^{**}]$ は18次のベクトル、 $[K_{IJ}]$ は 18×18 のマトリクスである。

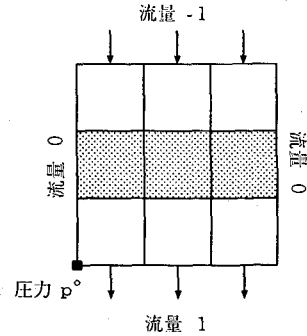


図-2 境界条件

4.1 第1の逆問題

$[\Delta \Gamma_{IJ}^o]$ は逆を持たない。 $[\Delta \Gamma_{IJ}^o]$ の18個の固有値のうち、0でない固有値は11個である。これは境界条件から得られる情報が $[\bar{P}_I]$ の11個の成分であることに対応する。発散が0となるアイゲン流速は固有値0の固有ベクトルに対応する。したがって、 $[\Delta \Gamma_{IJ}^o]$ の固有値と固有ベクトルを λ^p と $[E_I^p]$ で表し、 $\lambda^p \neq 0$ ($p = 1, 2, \dots, 11$)とすると、式(19)より、 $[V_I^*]$ は次のようになる。

$$[V_I^*] = \sum_{p=1}^{11} \frac{([\Delta Q_J]^T [E_J^p])}{\lambda^p} [E_I^p] \quad (21)$$

なお、式(20)の下式より、未知数 x^p を導入して $[V_I^{**}] = \sum_{p=12}^{18} x^p [E_I^p]$ と表すことができる。

基準透水係数を $k_{11}^o = -1.0 \cdot k_{12}^o = 0.0 \cdot k_{22}^o = -2.0$ とした時に式(21)より得られる $[V_I^*]$ を図3に示す。比較のため、正解のアイゲン流速と、正解のアイゲン流速から $[V_I^*]$ を引いた $[V_I^{**}]$ も同時に示す。矢印の長さはアイゲン流速の最大の長さが1となるように基準化されている。正解のアイゲン流速と $[E_I^p]$ ($p = 1, 2, \dots, 11$)との内積は、 $[\Delta Q_J]^T [E_J^p] / \lambda^p$ に一致し、 $[V_I^*]$ はこの固有値の成分を正確に推定している。事実、 $[V_I^*]$ が V^o において作る場は ∂V^o 上で $[\bar{P}_I]$ と $[\bar{Q}_I]$ を再現する。

$[\Delta \Gamma_{IJ}^o]$ は基準透水係数 k_{ij}^o によって変わる。したがって、 k_{ij}^o を変えることで $[\Delta \Gamma_{IJ}^o]$ の0固有値に対応する $[E_I^p]$ が変化する。 k_{ij}^o を変えた一つの例として、 k_{22}^o を -5.0 とした場合の逆解析の結果を図4に示

⁷ グリーン関数の対称性より、 $[\Gamma_{IJ}^{o(a)}] = [\Gamma_{JI}^{o(a)}]$ である ($I = 2n + i, J = 2m + i, n, m = 1, 2, \dots, N$)。

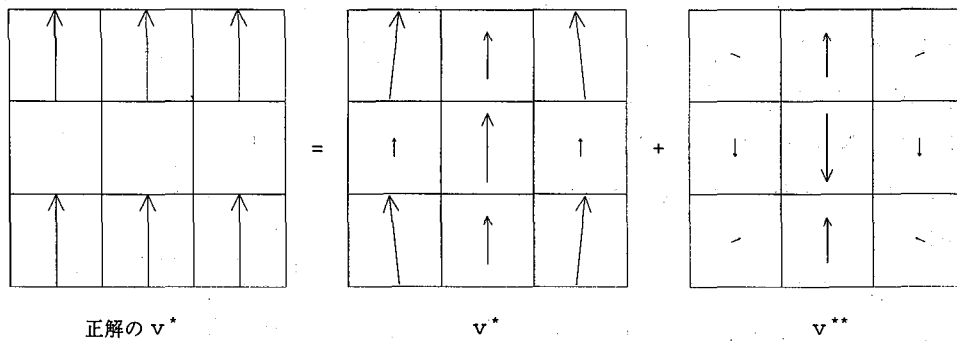


図-3 $[V_I^*]$ の逆解析: $k_{22}^o = -2.0$

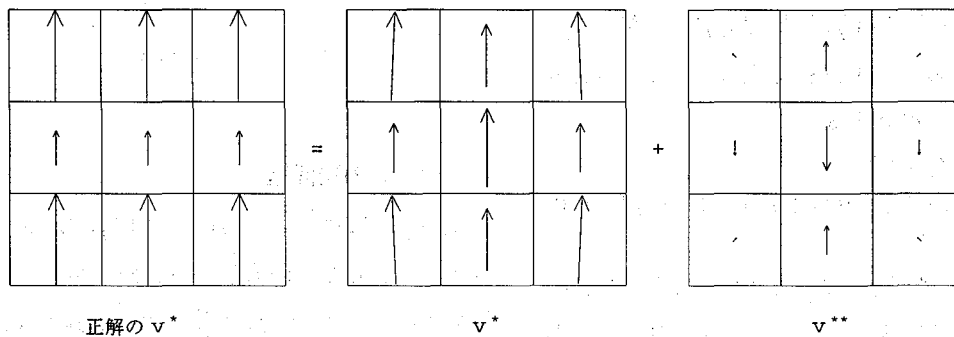


図-4 $[V_I^*]$ の逆解析: $k_{22}^o = -5.0$

す。逆解析された $[V_I^*]$ が作る圧力勾配と流速は元来 k_{ij}^o に依存しないので、 $[Q_I] = [Q_I^{h(1)}] + [\Gamma_{IJ}^{o(1)}][V_I^*]$ と、 $[V_I] = [K_{IJ}^o][Q_J] + [V_I^*]$ を計算し、選択された k_{ij}^o が与える影響を調べた。図 5 に $k_{22}^o = -2.0$ と -5.0 の場合の $[Q_I]$ と $[V_I]$ を示す。両者はほぼ一致しており、 k_{ij}^o の選択によらず、式 (21) から推定されるアイゲン流速は、計測データを満たすほぼ同一の圧力勾配と流速の場を作ることがわかる。

4.2 第 2 の逆問題

前述したように、 $[V_I^{**}]$ は発散が 0 となるアイゲン流速 v_i^{**} に対応する。事実、 v_i^{**} は次の式を満たす。

$$\begin{cases} v_{i,i}^{**}(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } V^o \\ n_i(\mathbf{x})v_i^{**}(\mathbf{x}) = 0 & \text{on } \partial V^o \end{cases} \quad (22)$$

この式 (22) を満たす v_i^{**} は唯一ではない。しかし、 v_i^* が作る場に比べて v_i^{**} が作る場⁸は小さい。これを示すために、2 つの k_{ij}^o について $[V_I^{**}]$ が作る圧力勾配と流速を図 6 に示す。いずれの k_{ij}^o でも、図 5 と比べる

と、場の大きさは小さいことが示されている。

未知の $[V_I^{**}]$ と $[K_{IJ}]$ について複線形となる式 (20) を解くためには、適当な初期値を与えた収束計算が必要である。 $[V_I^{**}]$ が作る圧力場が $[V_I^*]$ が作る場より小さいことを利用して、初期値は $[V_I^{**}] = [0]$ と次式を満たす $[K_{IJ}]$ とする。

$$([K_{IJ}] - [K_{IJ}^o])([Q_J]) = [V_I^*] \quad (23)$$

$[Q_I]$ は式 (21) で与えられた $[V_I^*]$ を用いて、 $[Q_I] = [Q_I^{h(a)}] + [\Gamma^{o(a)}][V_I^*]$ である。この初期値を用いて、 $[V_I^{**}]$ と $[K_{IJ}]$ を繰り返し計算することになる。式 (20) の解は唯一とは限らない。しかし、異なる境界の圧力と流量の測定データ⁹が与えられると、推定される $[K_{IJ}]$ が絞り込まれることが期待できる。A 種類の測定データが与えられた場合を想定する。 $[K_{IJ}]$ が $3N$ の未知数、一つの測定データに対応する $[V_I^{**}]$ の未知係数 x^p が $2N - M + 1$ 、式 (20) の上式から決まる条件が $2N$ で

⁸ 式 (9) から明らかなように、 $v_{i,i}^{**} = 0$ でも p が発生する。

⁹ 実際には圧力や流量を変えた測定が可能であるとは限らないが、クロスホール試験のように、境界条件をかえて測定を行うものもある。

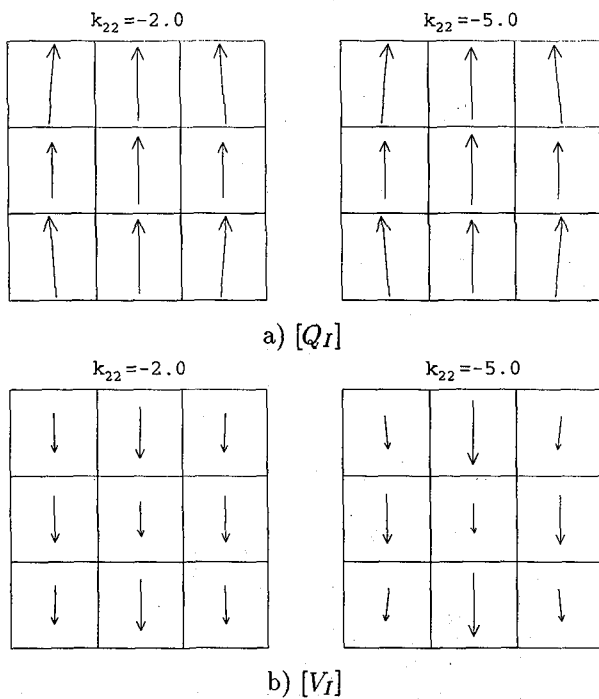


図-5 $[V_I^*]$ の作る場

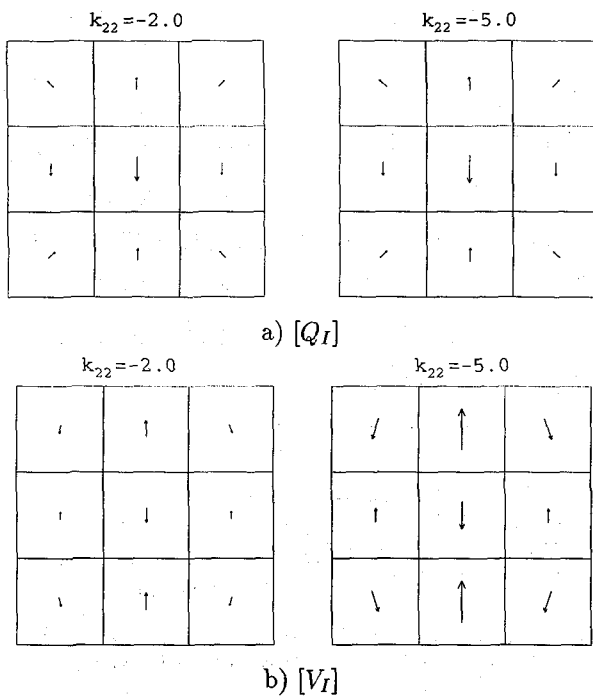


図-6 $[V_I^{**}]$ の作る場

あるから、

$$A(2N) > 3N + A(2N - M - 1) \quad (24)$$

であることが望ましい。式 (20) の上式内のマトリクスは測定データに依存しないから、この場合も未知数に

関して複線形となる。当然のことながら、式 (24) の条件は、 $3N$ の未知数を $A(M - 1)$ の測定データから推定すること一致する。

式 (23) によって決まる初期値を用いて、式 (20) の上式の右辺と左辺の差をエラーとし、これを最小化する $[V_I^{**}]$ と $[K_{IJ}]$ を計算する。式 (20) の上式が複線形となるため、逐次計算にはニュートン法を用いた。なお、図 7 に示す 3 つの境界条件から得られた測定データを加え、4 組の測定データを用いた。矢印は単位の流量であり、矢印の無い辺での流量は 0 である。4 組の測定データを用いて、 $k_{11}^0 = -1.0 \cdot k_{12}^0 = 0.0 \cdot k_{22}^0 = -2.0$ の場合の計算結果を図 8 に示す。図 8 に示す逆解析の結果は、初期値よりも正解から離れている。これは、ニュートン法を用いて非線形方程式を機械的に計算したことによる。未知数 $[V_I^{**}]$ と $[K_{IJ}]$ を $3N + A(2N - M + 1)$ 次のベクトル $[x_i]$ によって表し、 n 回目の解を上添字 (n) で表すと、形式的に式 (20) から次の式が得られる。

$$[F_{ij}(x^{(n)})][x_j^{(n+1)}] = [y_i(x^{(n)})] \quad (25)$$

ここで、 $[y_i]$ は $A(2N)$ 次のベクトル、 $[F_{ij}]$ は $A(2N) \times (3N + A(2N - M + 1))$ のマトリクスであり、前回に推定された $[x_i^{(n)}]$ によって決まる。 $[F_{ij}]$ は正方ではないため式 (25) の誤差を最小にする $[x_i^{(n+1)}]$ を求めることになる。つまり、 $[x_i^{(n+1)}]$ は次式を満たす。

$$[F_{ij}(x^{(n)})]^T [F_{jk}(x^{(n)})][x_k^{(n+1)}] = [F_{ij}(x^{(n)})]^T [y_j(x^{(n)})] \quad (26)$$

このためニュートン法による収束計算において、 $[y_i] \neq [0]$ であるにもかかわらず、 $[F_{ij}]^T [y_j] = [0]$ となり収束計算が終了¹⁰することがある。この場合が正にこのケースであった。

4.3 計測誤差とモデル誤差への対処

前述の数値シミュレーションでは、計測誤差を考慮していないが、逆解析では計測誤差の扱いは重要な課題である。通常の逆解析では、誤差の確率的性質を利用して、計測誤差を除くことが行われる。提案された逆解析手法では、線形解析を利用して誤差の一部を除くことができる。これは、発散が 0 となるアイゲ

¹⁰ 収束先が正解に一致する場合誤差は 0 となるが、収束先が正解に一致する一般的な条件を見つけることは容易ではない。現在、検討中の課題である。

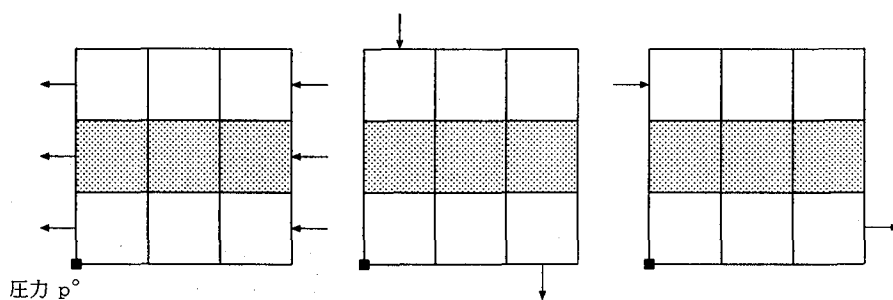


図-7 境界条件

収束計算の初期値				正解	収束計算の結果			
k_{11}	k_{12}	k_{22}			k_{11}	k_{12}	k_{22}	
-1.076	-0.023	-0.945		$k_{11} = k_{22} = -1$ $k_{12} = 0$	-0.886	-0.049	-0.971	
-1.289	-0.017	-1.350			-0.671	0.083	-0.653	
-1.110	0.008	-0.962		$k_{11} = k_{22} = -2$ $k_{12} = 0$	-0.925	0.123	-1.035	
-1.804	0.063	-1.793			-0.299	-0.037	-2.722	
-1.279	-0.029	-1.035			-197.1	-180.8	-192.8	
-1.804	0.063	-1.793			-1.299	-0.037	-2.722	
-1.110	0.008	-0.962			-0.925	0.123	-1.035	
-1.289	-0.017	-1.350			-0.671	0.083	-0.653	
-1.076	0.023	-0.945			-0.886	-0.049	-0.971	

図-8 ニュートン法による逆解析結果

ン流速の基底である, $[E_I^p]$ の成分が $[\Delta Q_I]$ に含まれないことを利用する. すなわち, 計測誤差は式 (19) の右辺 $[\Delta Q_I]$ の乱れとして現れるが, $[\Delta Q_I]$ に含まれる $[E_I^p]$ の成分は計測誤差として除去することができる.

$[\Delta \Gamma_{IJ}^p]$ の 0 固有値の固有ベクトル $[E_I^p]$ に対して, $[E_I^p]^T [\Delta Q_I] = 0$ が成立するという性質は, モデル誤差の一つである V^0 の要素分割についても一つの基準を与える. これは $[E_I^p]$ が分割に依存するためである. 要素数が一定の場合, $[\Delta \Gamma_{IJ}^p]$ の 0 となる固有値の数は分割によらないから, V^0 の分割が V と離れば離れるほど, $[E_I^p]^T [\Delta Q_I]$ が増加すると考えられる. したがって, 計測誤差に比べて, $[E_I^p]^T [\Delta Q_I]$ が過度に大きい場合は, V^0 の要素分割が適当でないことが考えられる.

5. おわりに

材料特性推定問題を等価介在物法を利用することで 2 段階の線形逆問題として設定することに成功した. この結果, 逆問題としての不適切性が明らかになり, 不適切性に対処した逆解析手法を提案した. この手法は,

表面計測データを内部データに変換することによって特徴があり, 解の求め易さが改善される. なお, 提案された逆問題の設定方法は, 材料特性推定逆問題の不適切性を本質的に変えるものではない. しかし, 不適切性を見通しを良くするため, 測定の改善を図る際には有効であることが期待される.

参考文献

- 1) 久保司郎: 逆問題, 培風館, 1992.
- 2) 岡本良夫: 逆問題とその解き方, オーム社, 1992.
- 3) 桜井春輔, 芥川真一, 徳留修: ノルム最小化法に基づく非弾性ひずみの逆解析, 土木学会論文集 pp.197-202, 1995.
- 4) 奥野哲夫, 西琢郎, 斉藤章: 逆解析を用いた亀裂内透水係数の空間分布推定, 土木学会第 50 回年次学術講演会, pp.658-659, 1995.
- 5) H.D.BUI: 材料力学における逆問題, 裳華房, 1994.
- 6) 山口栄輝, 堀宗朗, 細川直行: 岩盤浸透流問題の逆解析の新しい定式化とペイズ推定の適用, 構造工学論文集 Vol.40A, pp.445-450, 1994.
- 7) 村上章: カルマンフィルタ, 構造工学論文集 Vol.40A, pp.445-450, 1994.
- 8) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Solids, North-Holland, New York, 1993.

(1996 年 9 月 6 日 受付)