構造工学論文集 Vol.43A(1997年3月) 土木学会

固定要素網内に移動境界を考慮した単相問題逆解析

INVERSE ANALYSIS FOR ONE-PHASE PROBLEMS WITH MOVING BOUNDARIES USING FIXED MESH

浜口 俊雄* ・村上 章** ・長谷川 高士***
Toshio HAMAGUCHI, Akira MURAKAMI and Takashi HASEGAWA

*正会員 農修 京都大学大学院助手 農学研究科地域環境科学専攻 (〒606-01 京都市左京区北白川追分町)
**正会員 農博 京都大学大学院助教授 農学研究科地域環境科学専攻 (〒606-01 京都市左京区北白川追分町)
***正会員 農博 京都大学大学院教授 農学研究科地域環境科学専攻 (〒606-01 京都市左京区北白川追分町)

This study presents the numerical strategy and its performance of an inverse analysis method for a physical conduction model with moving boundaries through a fixed-meshing approach. First, we introduce an analytical concept to solve a so-called one-phase Stefan problem, which has the moving/free interface between physical models or the front of a physical model. This concept is formulated for the design of the interface location in the framework of 'the zero extention theory'. Second, we demonstrate an inverse analysis for a two-dimensional groundwater model with moving boundaries. Through a numerical result, it is revealed that we can sucessfully describe the estimated motion of moving boundaries and identify the physical property.

Key Words : *Stefan problem, interface, moving boundary, zero-extention theory, fixed mesh, inverse analysis, Kalman filter, FEM*

1. はじめに

物理現象問題に対する境界は，主として基本境界，自然境界，混合境界，自由境界，移動境界からなる．これらのうち，あまり見受けられない後半の3境界について簡単に述べる．混合境界とは，基本境界と自然境界が同時に与えられた境界のことであり，自由境界とは予めその位置を特定できないが定常的に不動な境界のことである．また移動境界とは，自由境界と同様に，予めその位置を特定できない上に経時的に位置が変化していく境界のことである．

こういった各境界の性質を見据えれば，物理現象の諸問題は概して固定位置境界問題と移動境界問題[1),2)]に大別される．前者は予め位置が全て特定された既知境界からなる問題であり，後者は予め位置が部分的に特定できない未知境界からなる問題である．ただし，境界移動が生じても，その位置が前もって特定される問題は，移動境界問題の範疇には含めない．自由境界または移動境界のいずれかを含んだ問題は，上記の分類において後者である．従って，移動境界問題では相異なる物理モデル (複雑な物理現象を理論づけて捉えた対象) の支配領域が存在し，複数の領域間で或る物理量が相互流入出しながら均衡がとれた結果，はじめて界面位置が定まる．このような問題を*Stefan*問題[3)]と呼んでいる．特に移動境界問題が，相異なる物理モデル領域をn個有しているとき，同問題はn相*Stefan*問題と称される．

土木分野においても，湖沼凍結・融解問題，飽和・不飽和問題，塩水・淡水問題，広域地下水問題，河川洪水氾濫問題[4)]など，移動境界問題として取り扱える問題は多数見受けられる．こういった問題は二相以上が一般的である．また，相界面の周辺域において相変化遷移領域が生じる可能性もある．この遷移領域の取り扱いを厳密に捉えて解析に反映することは大変やっかいである．遷移機構は相物性に依ってまちまちであり，統一した解析手法の確立は極めて困難である．しかるに，相変化の潜在要因を考慮して算術平均で定めた'見かけの物性値'を便宜上利用するエンタルピー法[2),5)]が解析上で相変化の扱いを簡単なものにしてくれるため，有力な方法と思われる．この方法によれば，遷移領域はいずれかの相に含められるとして解析すれば良い．本論の検討では，エンタルピー法に基づいて定めた物性値を与えるものとして，話を進めている．したがって，遷移領域の存在は考えず，相の界面上に相変化条件式を与えて解析を行えばよいと言える．また，本論は多相問題を簡便化することで理解が容易となった単相*Stefan*問題に言及する[6)]．相変化のない従来の単相問題では，単一の物理モデル領域のみを考察対象とし，それ以外の領域は取り扱わない場合が普通である．本論では，物理モデルとして扱われていない領域 (以降これを「非物理モデル領域」とよぶ) から物理モデルとして扱われている領域への物理的作用を解析に反映可能なものにするようなモデル修正について検討・提案することを目的の1つとする．

ところで上記のモデル修正を検討するには，一般形の基礎方程式が必要である．しかし，単相*Stefan*問題

のあらゆる単一物理モデルをまとめて一般化した基礎方程式を作成することは，構成式の相違から極めて困難である．故に，本論文では単純な単相 *Stefan* 問題において典型的と言えるモデルを用いて，本提案手法に基づく定式化を説く．ここに言う典型モデルとは，凍結・融解問題のようにラプラス作用素が基礎方程式に含まれるモデルを指す．

以上の基礎方程式を用いた本提案手法の概略を述べる．移動境界問題に重要な要素網の細かさは，要求に見合う十分な精度の解が得られるように決める．単一の物理モデルに用いられる変数は，当然の事ながら，物理モデル領域のみを定義域に持つ．故に物理変数の定義域外周の一部が物理モデル界面に相当することになるが，その界面位置を解析で求める場合，どうしても界面付近の非物理モデル領域を解析領域に含めなければない．この解決手段として，「物理変数の定義域に対して，物理的矛盾点が無いように定義域外の領域，つまり非物理モデル領域へ広げる」という策が挙げられる．そこで本論文では，0-拡張理論[1]と呼ばれる概念を援用して，物理変数を非物理モデル領域へと拡張する．拡張対象領域が非物理モデル領域だからといって闇雲に物理変数を拡張するのではなく，同領域で拡張変数の持つ物理的意味が存在してしかも物理的矛盾点が無いように考えた拡張を変数に当用することが解析的に望ましい．さらに固定要素網による移動境界問題解析を行う際には，有限要素法による式展開の過程で，非物理モデル領域が関わる項を，物理モデル領域へ向かう物理作用として式変形を施す．これによって，拡張変数は解析領域全体で定義されているにも関わらず，有限要素で展開・修正されたモデルは，単一物理モデルに当てはまる領域では，その物理挙動が生じ，非物理モデル (単一物理モデルに該当しないモデル) 領域では，そこで生じる何らかの物理的作用が物理モデル領域に対して影響を及ぼす，という性質のモデルとなる．固定要素網による移動境界問題の定式化は，何より，確率論に基づく逆解析手法への適用の大きな助力となる．

上記手法の有用性を，解析例によって検証する．本論文の解析例として，広域地下水盆における不圧平面地下水問題を用いる．同問題は，降雨による水位変動によって地下水貯留域が経時的に変化する現象を平面地下水モデルで捉えるという問題である．移動境界はその周辺域を傾斜した基盤層に沿って位置を変える3次元的な挙動を催す．

最後の節で，本提案よる移動境界問題逆解析の特長と展望を述べる．

2. 物理モデル

2.1 基礎方程式

以降では，時間変数をt，空間変数ベクトルを$\boldsymbol{\xi}$，求めるべき未知変数ベクトルを$\boldsymbol{p}$，単位面積当たりの考察空間系外からの物理作用量を$\boldsymbol{\eta}$とおく．また微分作用素作用素は，時間に関するものをD_t，空間に関するものを$\boldsymbol{D}_\xi$とする．なお$\boldsymbol{D}_\xi$は，$\boldsymbol{p}$に関する構成式の成因を組み込んだ作用素と見なす．

前節でも述べたように，単相 *Stefan* 問題の基礎方程式ですら，一般形として一式に集約することは困難である．しかし線形・非線形を問わず，同方程式は往々にして，定常ではポアソン方程式型，非定常では熱伝導方程式型となることが多い．そこで本論の主旨の理解を第一に考え，議論に用いる代表的な基礎方程式として，

(定常時)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(c\boldsymbol{D}_\xi\boldsymbol{p})+\boldsymbol{\eta}=0 \quad [\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi})] \tag{1}$$

(非定常時)

$$aD_t\boldsymbol{p}=\boldsymbol{\nabla}\cdot(c\boldsymbol{D}_\xi\boldsymbol{p})+\boldsymbol{\eta} \quad [\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}(t,\boldsymbol{\xi})] \tag{2}$$

を与える．ここにaは物性値を示し，cは解析代表長さを表す．解析代表長さとは，平面2次元解析時には，残りの1次元が有限な場合，媒体高さ (幅) に等しく，無限な場合，もしくは3次元解析時には単位長さに等しくなるものと定義する．

いま本論文の主旨を理解し易くするため，線形性の基礎方程式を扱う場合に言及する．式(1)および式(2)が線形方程式であるために，作用素$\boldsymbol{D}_\xi$は単純に$\boldsymbol{\nabla}$に物性値を乗じて得られる作用素とおき，またcは定数と仮定した．逆に$\boldsymbol{\nabla}$の乗数またはcが物性値ではなく$\boldsymbol{p}$を含んだ物理量であれば非線形方程式となってしまう．

2.2 境界条件

1.節で述べた5つの境界は，

(基本境界) $\boldsymbol{p}=\widehat{\boldsymbol{p}}$ (3)

(自然境界) $\boldsymbol{n}\cdot c\boldsymbol{D}_\xi\boldsymbol{p}=\widehat{\boldsymbol{r}}$ (4)

(混合境界) $\boldsymbol{p}=\widehat{\boldsymbol{p}}$, $\boldsymbol{n}\cdot c\boldsymbol{D}_\xi\boldsymbol{p}=\widehat{\boldsymbol{r}}$ (5)

(自由境界) $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{n}\cdot c\boldsymbol{D}_\xi\boldsymbol{p}=\widehat{\boldsymbol{r}}_0$ (6)

(移動境界) $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_m$, $\boldsymbol{n}\cdot c\boldsymbol{D}_\xi\boldsymbol{p}=\widehat{\boldsymbol{r}}_t$ (7)

という条件式で表される．なお式(6),(7)は，単相問題に関する条件式を記述している．多相問題を考察する場合は，両条件における後半の式右辺を各々$\widehat{\boldsymbol{r}}_0-\widehat{\boldsymbol{r}}'_0$，$\widehat{\boldsymbol{r}}_t-\widehat{\boldsymbol{r}}'_t$に換えてやればよい．また両条件式は，一見して類似した形式をとっていても大きな相違がある．それは，自由境界と移動境界との定義の相違内容そのもの，つまり，式中の$\boldsymbol{p}$の時間依存性の有無にある．条件式(6)の$\boldsymbol{p}$が時間独立であれば境界位置は定常的に定ま

り，逆に条件式(7)の$\boldsymbol{p}$が時間従属であれば境界位置は経時的に移動し得るものである．

ところで，多相領域間相互の物理作用量の入出バランスをはかるため，又は同作用量のギャップを補うための条件は結合条件と呼ばれている．式(6),(7)の後半の式は，いずれも，多相問題の結合条件式を単相問題の条件式に言及したものである．この自由または移動境界条件を満足する位置をもって界面と考える．この条件式は，後述のモデル修正(3.3節，3.4節)のところで利用しているので，そちらを参照されたい．

本論文で取り扱う物理モデルの支配領域は，基本境界，自然境界，自由境界または移動境界の3境界からなる領域に焦る．

3. 修正モデル

3.1 0–拡張理論

本節では，0–拡張理論の定義をベクトル変数のかたちで紹介する．以下では，便宜上，2.1節で用いた空間変数ξと未知変数$\boldsymbol{p}$を使う．まず，一つの空間領域Vの存在を仮定し，そのVを，領域Ωとその補領域$\overline{\Omega}$に分ける．同時に，空間に分布を有した変数$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi})$が，$\Omega$のみを値域にもち，$\overline{\Omega}$では値域にもたない場合を想定する．ここで$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi})$が$\overline{\Omega}$も値域にもち，かつ，値$\boldsymbol{o}$をとるものと拡大解釈し，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi})$の値域を$V$全域として再定義する．こういった変数値域についての拡大解釈が「0–拡張理論」と称される．

同拡張理論は，取り扱いには単位階段関数などの超関数を用いて数式表記を行うのが適当である．基礎方程式(1), (2)を念頭におくと，広義的な定義に基づく関数の範疇で少なくともH^1–級の超関数でなければならない．よって，0–拡張理論を用いて定式化するには，上記説明でいうΩ値域と$\overline{\Omega}$値域の界面，すなわち，自由/移動境界において，本来の$\boldsymbol{p}$値が$\boldsymbol{o}$となる変数を対象として拡張することが必要である．

3.2 拡張変数

概して拡張対象の変数は，前小節において述べた必要条件「$\boldsymbol{p}$が自由/移動境界上で値$\boldsymbol{o}$をとること」を満たさない場合の方が一般的である．故に，ここでは拡張対象の変数に対して間接的ながら0–拡張を施せるように，上記の必要条件を捉え直すことにする．

移動境界問題では必ず界面が存在しており，また単相*Stefan*問題は，考察すべき未知変数$\boldsymbol{p}$の値に関して，界面位置を特定するための指標値を必ず持っている．このことを数式で表せば，境界条件式(6), (7)となる．いま，

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_m \tag{8}$$

という変数に着目する．同変数は物理的解釈が可能なものであり，何よりも幸いなことに界面上で$\boldsymbol{o}$の値と一致しているため，前小節での必要条件を満たし得る．変数$\boldsymbol{e}$を0–拡張による定式化を施し，$\boldsymbol{p}_m$が所与の定数扱いであることに留意しながら結果を$\boldsymbol{p}$に関して整理すると，

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}_m + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_m) \cdot u\{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_m\} \tag{9}$$

となる．ここに$u\{\bullet\}$は単位階段関数を表す．式(9)は，$\boldsymbol{e}$を介して間接的に$\boldsymbol{p}$を0–拡張していることに他ならない．よって，0–拡張のための必要条件は，「$\boldsymbol{p}$が自由/移動境界上で適当な空間変数$\boldsymbol{p}_m$の値と一致すること」と改められる．

式(9)は，超関数uを含む表記のため，基礎方程式に使った際の連続性や微分可能性の有無について議論の必要があると思われる．関数に関する既往の定義に従えば，$\tilde{\boldsymbol{p}}$の導関数の，界面上における左方極限値と右方極限値が異なることは明らかである．しかしながら，テスト関数を用いた超関数の広義的な定義(*Schwarz*の超関数)に従えば，

1. 任意次数の導関数が求まる，
2. 不連続関数が微分可能である，
3. 連続と不連続の事象をひとまとめに表現できる，
4. 解析演算(微分積分等)の他に合成積・演算子変換などが随意行える，
5. (偏)微分方程式の理論中に不連続関数を含めることが可能である，

といったことが言える．本論文では，この超関数の見地から0–拡張変数の数学的性質をうかがうことにする．

連続性についての検証であるが，界面上において単位階段関数が如何なる有限値をとったところで，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_m$であることから，$\tilde{\boldsymbol{p}}$の連続性は保たれる．具体的に数式を用いて結果を表せば，

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{cases} \boldsymbol{p}_m & \text{in } \overline{\Omega} \\ \boldsymbol{p}\ (=\boldsymbol{p}_m) & \text{on } S_f \text{ or } S_t \\ \boldsymbol{p} & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{10}$$

となる．ここに，S_fは自由境界，S_tは移動境界を示す．以上から，式(9)は超関数uを含んでいながらも連続的な式を取り扱っていることが分かるので，不連続関数に関する箇条項目2.や3.や5.については留意しなくてよい．

続いて微分可能性を検証する．いま，式(9)の$\boldsymbol{\xi}$に関する全微分項を$d\tilde{\boldsymbol{p}}^{\xi}$とし，同様に，$\boldsymbol{t}$に関する全微分項を$d\tilde{\boldsymbol{p}}^{t}$とする．以下では，$\xi_i$を$t$に読み換えることで，$d\tilde{\boldsymbol{p}}^{t}$の説明に相当することから，$d\tilde{\boldsymbol{p}}^{\xi}$についてのみの説明とする．$d\tilde{\boldsymbol{p}}^{\xi}$は，

$$d\tilde{\boldsymbol{p}}^{\xi} = \frac{\partial \boldsymbol{p}_m}{\partial \xi_i} d\xi_i + \Big[u\{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_m\} + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_m) \cdot \delta\{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_m\} \Big] \times \frac{\partial (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_m)}{\partial \xi_i} d\xi_i \tag{11}$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{p}_m}{\partial \xi_i} d\xi_i + u\{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_m\} \cdot \frac{\partial (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_m)}{\partial \xi_i} d\xi_i \quad (12)$$
$$(i=1,2)$$

で与えられる．ここに，$\delta\{\bullet\}$はデルタ関数を示す．式(11)においてデルタ関数を因数に持つ項は$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_m)$も因数に持つため恒等的に0となり，$d\tilde{\boldsymbol{p}}^{\xi}$は，超関数のなかで単位階段関数のみ用いた式(12)に至るのである．超関数$u\{\bullet\}$を1回微分するとデルタ関数，$j+1$回微分する(j：自然数)と$\delta^{(j)}\{\bullet\}$を得る．その$\delta^{(j)}\{\bullet\}$は容易に求まる[7]．よって，$\tilde{\boldsymbol{p}}$に関する任意次数の導関数を求め得るため，式(9)における上記項目 1.は成立している．式(12)を具体的に表せば，

$$d\tilde{\boldsymbol{p}}^{\xi} = \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{p}_m}{\partial \xi_i} d\xi_i & \text{in } \overline{\Omega} \ / \text{ on 界面左方極限} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \xi_i} d\xi_i & \text{in } \Omega \ / \text{ on 界面右方極限} \end{cases} \quad (13)$$
$$(i=1,2)$$

となる．界面上(S_f/S_t)では全微分不可能であるが，単位階段関数を用いた式(12)のような数式表記を用いれば，箇条項目 5.が言える．以上より$\tilde{\boldsymbol{p}}$は，本論文の超関数表記を用いているのであれば，空間的・時間的な連続性および微分可能性が広義的に保証され，次小節の式群で表されるような修正モデルを導く際に何ら数学的問題のないことが示された．

ただし，ここで注意すべきは，$\boldsymbol{p}$を$\tilde{\boldsymbol{p}}$に読み替えた基礎方程式(1)ないし(2)の解の性質である．上記からも分かる様に，界面上では全微分不可能であるため，得られた解の勾配が不連続となる．これを解消する意味で，本節の主題に挙がっている'修正モデル'を考える．つまり，2.2節でも取り上げた相結合条件を，以下に示す有限要素法で自然境界条件に類似したかたちとして組み込む．これによって，解の連続性・微分可能性も得ることができ，その妥当性も保証されると思われる．

3.3 有限要素方程式

本文では，基礎方程式(1)および(2)を有限要素法に適用し，拡張値域である領域$\overline{\Omega}$から従来の物理モデル領域Ωへの物理作用，すなわち，多相問題を単相問題として簡便に扱うための相結合条件を解析に旨く組み込んだ修正モデルの有限要素方程式を導く．

境界条件式(3), (4)に留意しながら全領域Vにおいて積分した弱形式を求める．次に，空間において形状関数ϕにより離散化する($\tilde{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{\phi}\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}$，ここに$\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}$：節点$\tilde{\boldsymbol{p}}$値ベクトル)．続いて，非定常時のみ時間差分パラメータθ $(0\leq\theta\leq1)$を用いて$\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}$を時間展開し，$\partial\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}/\partial t$に関して時間差分を行う[8]．積分領域$V$を$\Omega$と$\overline{\Omega}$に分割して表記すると，式(14)～(21)を得る．

(定常時)

$$\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{p}}^{*} = \boldsymbol{\omega} \quad (14)$$

(非定常時)

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}{}_{t+1} = \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}{}_{t} + \boldsymbol{\omega}_{t+\theta} \quad (15)$$

ここに，

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M} + \theta\boldsymbol{S} \quad (16)$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M} - (1-\theta)\boldsymbol{S} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{M} = \int_{\Omega} a\boldsymbol{\phi}^{T}\boldsymbol{\phi}dV + \int_{\overline{\Omega}} a\boldsymbol{\phi}^{T}\boldsymbol{\phi}dV \quad (18)$$

$$\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} c\boldsymbol{\phi}^{T}\boldsymbol{\nabla}^{T}\boldsymbol{D}_{\xi}\boldsymbol{\phi}dV + \int_{\overline{\Omega}} c\boldsymbol{\phi}^{T}\boldsymbol{\nabla}^{T}\boldsymbol{D}_{\xi}\boldsymbol{\phi}dV \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \int_{S_n} \boldsymbol{\phi}^{T}\hat{\boldsymbol{r}}dS + \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}^{T}\boldsymbol{\eta}dV + \int_{\overline{\Omega}} \boldsymbol{\phi}^{T}\boldsymbol{\eta}dV \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{t+\theta} = \int_{S_n} \boldsymbol{\phi}^{T}\hat{\boldsymbol{r}}dS + \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}^{T}\boldsymbol{\eta}_{t+\theta}dV + \int_{\overline{\Omega}} \boldsymbol{\phi}^{T}\boldsymbol{\eta}_{t+\theta}dV \quad (21)$$

ここに，S_nは自然境界を示す．式(19)は，物理量$\boldsymbol{p}$の流束(仕事量の'束')に関する係数であり，その第2項は領域$\overline{\Omega}$に関するものである．本論の単相$Stefan$問題では，$\overline{\Omega}$においてΩでの物理モデルが支配してないものと考えるため，「$c=0$」または「作用素$\boldsymbol{D}_{\xi}$に含まれる物性値が0」となることから，上記第2項は$\boldsymbol{o}$となる．上記の作用素$\boldsymbol{D}_{\xi}$は作用素$\boldsymbol{\nabla}$に物性値を乗じて得られると仮定した．この仮定は基礎方程式が線形となる必要条件であり，逆に上記の乗数が物性値ではなく$\boldsymbol{p}$を含んだ物理量であれば非線形方程式となってしまう．

$$\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} c\boldsymbol{\phi}^{T}\boldsymbol{\nabla}^{T}\boldsymbol{D}_{\xi}\boldsymbol{\phi}dV \quad (22)$$

単相問題は，多相問題を簡便化して取り扱っている場合もあり，その場合，単相領域Ωばかりでなく，単相化によって相として扱われない領域$\overline{\Omega}$に対しても，考察空間系外からの物理作用が及ぼされ得る．この作用の記述があまりに抽象的であるので，具体的な話で理解の補助とする．具体的には，四方を水の浸みにくい山に囲まれた湖に地表水が貯まっていく様子について，頭上から平面的に観察している例を想定すればよい．具体例では，水が流動する相と，水が山の表面を不連続に貯水域へ流れる相の二相が存在し，各相を上から見ると，それぞれ貯水域(Ω)と非貯留域($\overline{\Omega}$)になる．当例では，水の連続流動のみを単一物理モデルとして扱う．両領域にまたがって雨が降る(考察空間系外からの物理作用)とすると，降雨は貯留域ばかりでなく，非貯留域の流動にも作用する．この最後の作用が上記の抽象的説明である．ところで，考察空間系外から$\overline{\Omega}$への物理作用の結果，$\overline{\Omega}$で何らかの物理現象が生じて，領域Ωにも物理的影響を与え得るということが本来の多相現象である．しかし，多相問題を単相化しようとする場合，そのΩへの物理的影響を単相界面上の結合条件として表し得るモデルが必要となる．先の具体例で言えば，雨が非貯水域に降った結果，山の表面を伝って

貯水域へ不連続な流れで流れ込んで来るのが非貯留域の本来の現象であるが，水の連続流動モデルで捉える場合に，山からの水流入を，湖の渚線 (単相の界面) 上の流量 (単相界面上の結合条件) として表し得るモデルが要るということである．そこで，領域$\overline{\Omega}$に対する$\boldsymbol{\eta}$または$\boldsymbol{\eta}_{t+\theta}$の関連項すなわち式(20)または式(21)の右辺第3項に着目する．この関連項を修正変形し，考察空間系外から$\overline{\Omega}$への物理作用の結果として生じた，領域Ωへの物理的影響量を式表示する．先の例では，山からの水の流入量を式表記するということである．この式に表されるモデルは，「$\overline{\Omega}$への物理作用の影響が，途中ロスしながらも，最終的にはΩの界面へ到達するもの」とした．先の具体例においては，山に降った雨が，山を伝って流れる間にロスしながらも，最終的に湖の渚線 (貯水域の界面) から貯水域に流入するということである．ここで，$\overline{\Omega}$での物理的影響量の総量に対する最終的なΩへの総到達量の比をℓとし，「影響到達比」と呼ぶことにする．また，考察空間系外から$\overline{\Omega}$への物理作用量の単位値を入力値として，ℓを単位出力値に持つ離散化単位インパルス応答関数 (ℓの単位図) を考える．ここにインパルス応答関数とは，或る入力値に対して応答する出力値の時間的分布 (遅れ時間を変数にした出力値の関数) のことである．入力直後の時刻を0として，その応答が時刻tで終了するとおく．このとき，時刻τ $(0 \leq \tau \leq t)$における上記の応答関数値をg_{tau}で与えるものとする．このg_τに入力値を乗じれば，界面への到達量の時間的分布が求まる．ところで，過去に$\overline{\Omega}$に入力された物理作用量に対して，現時刻になってやっと応答してきた，つまり，現時刻になって初めて界面位置へ到達してきた量がいくつかある．これらを重ね合わせてやれば，現時刻の界面到達量が求まると言える．特に，定常時において，考察空間系外から$\overline{\Omega}$への物理作用量が一定の入力値であるため，上記の重ね合わせを行うと，g_τは一定値ℓとなる．それ故，定常時の単位インパルス関数値をg_0とおく．以上の考え方を用いると，界面上の物理作用量$\boldsymbol{\zeta}$または$\boldsymbol{\zeta}_{t+\theta}$は，

(定常)

$$\boldsymbol{\zeta} = \int_{S_f} \boldsymbol{\phi}^T \hat{\boldsymbol{r}}_0 dS \tag{23}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}_0 = g_0 \int_{\overline{\Omega}} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\eta} dV \tag{24}$$

$$(0 \leq g_0 \leq 1, \quad g_0 = \ell) \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\omega}' = \int_{S_n} \boldsymbol{\phi}^T \hat{\boldsymbol{r}} dS + \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\eta} dV \tag{26}$$

(非定常)

$$\boldsymbol{\zeta}_{t+\theta} = \int_{S_t} \boldsymbol{\phi}^T \hat{\boldsymbol{r}}_{t+\theta} dS \tag{27}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}_t = \sum_{n \geq 0} g_{t-n} \int_{\overline{\Omega}} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\eta}_{t+\theta} dV \tag{28}$$

$$\left(0 \leq g_\tau \leq 1, \quad \sum_{\tau \leq t} g_\tau = \ell \right) \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\omega}'_{t+\theta} = \int_{S_n} \boldsymbol{\phi}^T \hat{\boldsymbol{r}} dS + \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\eta}_{t+\theta} dV \tag{30}$$

という自然境界条件と同次元の量で表される．式(28)でのnに関する総和は，先程述べたように，過去にあった$\overline{\Omega}$への入力物理作用量に対して，現時刻になって初めて界面位置へ到達してきた量の重ね合わせを示している．先の具体例でも，非貯水域に一度降った雨が山に沿って時間をかけながら徐々に湖へ流入していくことは，容易に想像がつくところである．そこに断続的な雨が降るとき，湖の界面への流入量は過去の雨による影響も加味して重ね合わせて求めるといったことも簡単に納得できると思われる．式(23)または式(27)が，多相を簡略化することで単相として扱った場合の，界面上の相結合条件式に相当する (2.2節の式(6),(7)参照)．このような非物理モデル領域を「背域モデル」と呼ぶものとする．以上をまとめれば，有限要素方程式(14)または(15)は，

(定常)

$$\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{p}}^* = \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\zeta} \tag{31}$$

(非定常)

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{p}}^*{}_{t+1} = \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{p}}^*{}_t + \boldsymbol{\omega}'_{t+\theta} + \boldsymbol{\zeta}_{t+\theta} \tag{32}$$

となる．いま未知量解を求める上で，$\tilde{\boldsymbol{p}}^*$および$\tilde{\boldsymbol{p}}^*{}_t$や$\tilde{\boldsymbol{p}}^*{}_{t+1}$の成分を，領域$\overline{\Omega}$に関わる量 (添字$E$) と領域$\Omega$に関わる量 (添字$F$) に分割して考察する．

$$\tilde{\boldsymbol{p}}^*{}_t = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\boldsymbol{p}}^{*F}_t \\ \tilde{\boldsymbol{p}}^{*E}_t \end{array} \right\}, \qquad \tilde{\boldsymbol{p}}^*{}_{t+1} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\boldsymbol{p}}^{*F}_{t+1} \\ \tilde{\boldsymbol{p}}^{*E}_{t+1} \end{array} \right\} \tag{33}$$

他の行列項やベクトル項も同様に

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{M}^F & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}^E \end{array} \right], \quad \boldsymbol{S} = \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{S}^F & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{array} \right] \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\omega}' = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}'^F \\ \boldsymbol{o} \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\zeta}^F \\ \boldsymbol{o} \end{array} \right\} \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\omega}'_{t+\theta} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}'^F_{t+\theta} \\ \boldsymbol{o} \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{\zeta}_{t+\theta} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\zeta}^F_{t+\theta} \\ \boldsymbol{o} \end{array} \right\} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{A}^F & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^E \end{array} \right], \quad \boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{B}^F & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^E \end{array} \right] \tag{37}$$

となる．式(34)の$\boldsymbol{M}$について，式(18)の第一項は$\boldsymbol{M}_F$成分のみ，式(18)の第二項は$\boldsymbol{M}_E$成分のみ有する行列を各々表す．なお，式(37)の各成分行列はそれぞれ，

$$\boldsymbol{A}^F = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F + \theta \boldsymbol{S}^F, \qquad \boldsymbol{A}^E = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^E \tag{38}$$

$$\boldsymbol{B}^F = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^F + (1-\theta)\boldsymbol{S}^F, \quad \boldsymbol{B}^E = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M}^E \tag{39}$$

である．以上より，

(定常)

$$\boldsymbol{S}^F \tilde{\boldsymbol{p}}^{*F} = \boldsymbol{\omega}'^F + \boldsymbol{\zeta}^F \tag{40}$$

(非定常)

$$\boldsymbol{A}^F \tilde{\boldsymbol{p}}^{*F}_{t+1} = \boldsymbol{B}^F \tilde{\boldsymbol{p}}^{*F}_{t} + \boldsymbol{\omega}'^F_{t+\theta} + \boldsymbol{\zeta}^F_{t+\theta} \quad (41)$$

$$\boldsymbol{A}^E \tilde{\boldsymbol{p}}^{*E}_{t+1} = \boldsymbol{B}^E \tilde{\boldsymbol{p}}^{*E}_{t} \quad (42)$$

となる．式(40)および式(41)から，領域Ωでは従来通りの有限要素方程式を解けば良いことがわかる．一方式(42)から，領域Ωでは$\boldsymbol{A}^E = \boldsymbol{B}^E\ (= \boldsymbol{M}^E)$であることに留意すれば，

$$\tilde{\boldsymbol{p}}^{*E}_{t+1} = \tilde{\boldsymbol{p}}^{*E}_{t}\ (= \boldsymbol{p}_m{}^*) \quad (43)$$

が求まる．式(43)は有限要素法による連立方程式は逐次解く必要がなく，簡略に扱えるという特長を示している．次に，定常時について考える．単相*Stefan*問題の界面は式(40)の定常解$\tilde{\boldsymbol{p}}^{*F}$より定まる．また，定常解$\tilde{\boldsymbol{p}}^{*E}$は不定解であるが，$\tilde{\boldsymbol{p}}^{*E}$は$\tilde{\boldsymbol{p}}$の定義式(9)を用いて求める．よって，得られる解は$\tilde{\boldsymbol{p}}^{*E} = \tilde{\boldsymbol{p}}^{*}_{m}{}^{E}$である．

3.4 固定要素網の移動境界

固定要素網を用いて解析を行う場合，界面が要素辺の上に存在するとは限らない．本論文では，工夫を凝らして界面位置を表現する様にしている．まず界面の存在形状を$\boldsymbol{p}_m$も基に或る程度予測しておいて，その取り得る形状に沿って固定要素網を定めることが必要である．これにより，要素網と界面が平行または垂直の関係を大まかに保てる．固定要素網の細かさは，界面位置の正確さに対する要求度によって定めれば良い．次に，界面位置を離散的に確定させるための基準を設けねばならない．先ず，着目地点がΩに含まれているための十分条件を考える．自由・移動条件(6),(7)の前半の式に用いられる$\boldsymbol{p}_m$は，$\boldsymbol{p}$値の取り得る物理モデルの限界値を示している．また$\boldsymbol{p}_m$は，空間的な広がりをもち，場所ごとに限界値が異なっていてもよいものと考える．$\boldsymbol{p}_m$は，3.3小節の具体例で言えば山間の地表面標高分布(空間分布)に匹敵し，また相を水のみとした氷の融解問題で言えば温度0°C(一様分布)に相当する．よって，$\boldsymbol{p}$値と$\boldsymbol{p}_m$との比較から，上記の十分条件は得られると思われる．いまの2例では，着目地点において，その位置の湖の水位が地表面標高よりも高かったり，温度が0°Cよりも高ければ，そこはΩ(各々，'貯水域'と'水になった領域'を指す)に必ず含まれていると言える．この事を踏まえると，$\boldsymbol{p}$値と$\boldsymbol{p}_m$の差$\boldsymbol{e}$(式(8)参照)についての空間分布から，$\boldsymbol{e}$の全成分が0以上となる位置をもってΩ領域や界面位置を定められる．自由境界位置は一度求めれば，それで十分であるが，移動境界位置は，その移動のための条件を定めねばならない．$\boldsymbol{p}$を離散的に考えたときの条件として，例えば，界面上の着目節点の$\tilde{\boldsymbol{p}}^{*}_{t+1}$から，

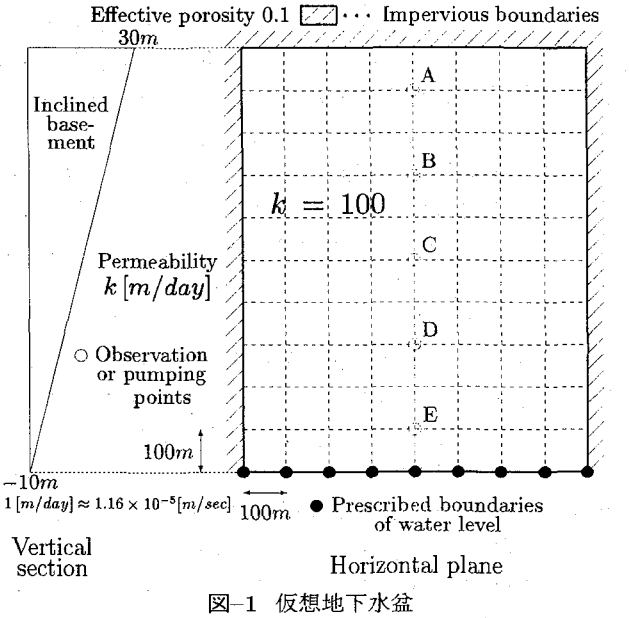
- Ω拡大：拡大方向に隣接する節点の$\boldsymbol{p}_m{}^*$を引いて得たベクトルの全成分が0以上であるとき，
- Ω縮小：着目節点での$\boldsymbol{p}_m{}^*$を引いて得たベクトルのいずれかの成分が負になるとき，

移動するとおく．なお，このΩ拡大条件は，界面が隣節点まで到達するための十分条件を表しているが，厳密な条件とは言えない．特に，同条件は，二相*Stefan*問題を単相で考える際に旨く設定しておく必要があると思われる．

単相*Stefan*問題であるにも関わらず，こうして固定要素網による解析手法をいる理由は，確率的な発想に基づく後述の逆解析手法に高い適応性を示すことにある．

4. 解析例

解析例には具体例をもって示す．代表的な移動境界問題として，湖沼凍結・融解問題や地下水盆貯留問題など考えられるが，本文では後者に当たる広域地下水盆における非定常の平面不圧地下水モデルを考え，解析を試みることにする[9]．



図−1 仮想地下水盆

4.1 順解析諸設定

解析に用いる仮想的な地下水盆は等方均質であるとする．基礎方程式(2)および境界条件式(3), (4), (7)において，$a = \lambda$, $\boldsymbol{D}_\xi = k\boldsymbol{\nabla}$, $c = d_0$, $\boldsymbol{p} \Rightarrow h$, $\boldsymbol{\eta} \Rightarrow \varepsilon$, $\widehat{\boldsymbol{p}} \Rightarrow \widehat{h}$, $\widehat{\boldsymbol{r}} \Rightarrow -\widehat{q}$, $\boldsymbol{p}_m \Rightarrow b$と置き換える．ただし基礎方程式は本来$d_0 = h - b$のため非線形であるが，広域地下水流動の計算では，許容計算誤差が比較的大きいことから要素毎に水深を一定として線形近似した下記のような線形化基礎方程式がよく用いられる．

(基礎方程式)

$$\lambda D_t h = k d_0 \nabla^2 h + \varepsilon \quad (44)$$

(境界条件)

$$h = \widehat{h} \qquad \text{on } S_h \quad (45)$$

$$k d_0 \boldsymbol{n} \cdot \nabla h = -\widehat{q} \qquad \text{on } S_q \quad (46)$$

$$h = b \ , \quad k d_0 \boldsymbol{n} \cdot \nabla h = -\widehat{q}_t \quad \text{on } S_t \quad (47)$$

となる．ここに，h：地下水位，h：代表地下水深 (考察時刻における要素毎の平均地下水深)，b：基盤層標高，λ：有効間隙率，k：透水係数，ε：涵養量，S_h：水位境界，S_q：流量境界，S_t：移動境界を示す．地下水問題では，Ωを貯留域，$\overline{\Omega}$を非貯留域と呼んでいる．

本例では，地下水位hを地下水深$h-b$で間接的に0–拡張し，

$$\tilde{h} = b + (h-b)\cdot u\{h-b\} \tag{48}$$

と定義する．$\tilde{h}$を擬似地下水位と呼ぶ．式の展開は前節と同様に行う．背域は，特に本例の場合「背水域」と呼ばれており，非貯留域がそれに該当している．地下水問題では，非貯留域に与えられた涵養量が急傾斜の基盤層に沿って貯留域の移動境界へと時間遅れを生じながら流入してくることを平面的に表したモデルが背水域モデルとなっているのである．

$h=\phi\boldsymbol{h}$で離散化し，時間展開した結果，最終的に有限要素方程式は，

$$\boldsymbol{A}^F\tilde{\boldsymbol{h}}^F_{t+1} = \boldsymbol{B}^F\tilde{\boldsymbol{h}}^F_t + \boldsymbol{\omega}'^F_{t+\theta} + \boldsymbol{\zeta}^F_{t+\theta} \tag{49}$$

$$\tilde{\boldsymbol{h}}^E_{t+1} = \tilde{\boldsymbol{h}}^E_t \tag{50}$$

となる．

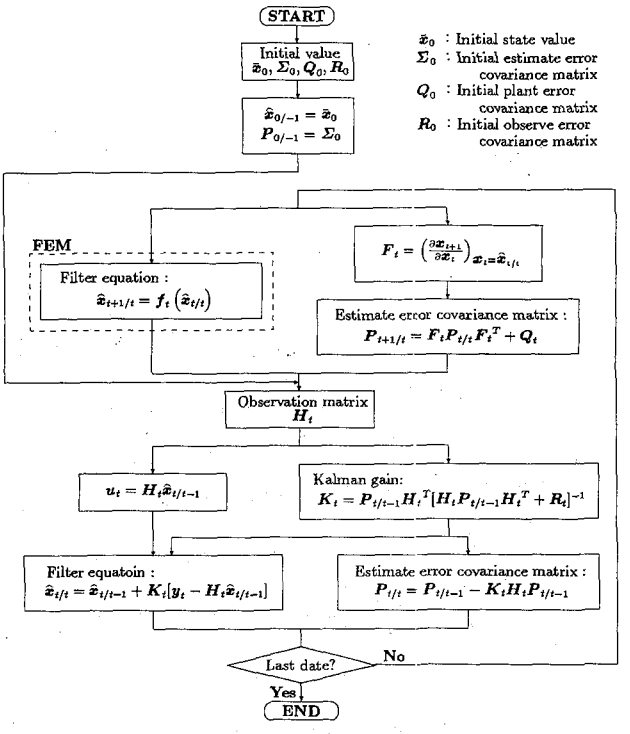
また，図–1に示す仮想地盤を解析対象とした．透水係数は$k=100(m/day)$とし，与地盤に対して模擬的な涵養を与え，1日を1ステップとした計2カ月分61ステップの数値計算を行った．また，背水域モデルにおける遅延流入は，遅延無しのものと仮定した．こうした設定の下，順解析を行い，模擬観測値を作成した．

4.2 逆解析諸設定

初期値設定は非定常問題にとって重要な問題である．逆問題の初期値は，順解析に用いた初期値を用いず，先験情報に基づいて作成する．その際，状態量を成す各変数の，極めて正確な初期分布を容易に作り上げることは相当難しく，初期値は低精度のものと考えておくのが妥当である．故に，本解析の初期値には，実問題でも扱える貯留域面積のみを先験情報として，順解析設定状態と比べて低精度(面積誤差：30,000m^2，移動境界位置誤差：最大300m)のものを作成して与え，透水係数の初期値は$200(m/day)$とおいた．観測点は節点A～Eの計5点において擬似地下水位$\tilde{h}$を計測するものとした．与条件下で，本モデル逆問題への適用性を検討する．

4.3 逆解析手法

本節では，境界の移動を伴う地下水挙動の観測による透水係数の同定および非定常な水位の推定に関する結果の精度について検討することを目的とする．本文の逆解析手法として，条件付き確率論に基づいて観測更新する拡張$Kalman$フィルタ有限要素法を用いる．図–2に，そのアルゴリズムを示す．



図–2 拡張Kalmanフィルタ FEM

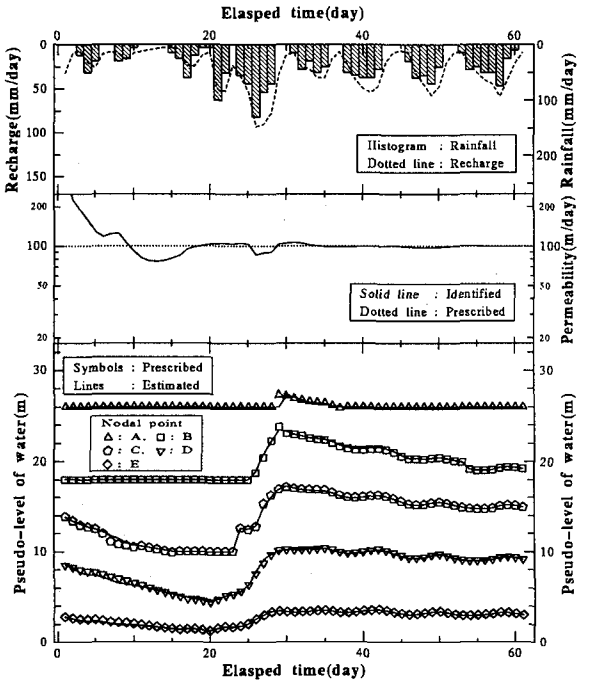
このアルゴリズムは，非適切性逆解析問題を取り扱う際に，先験情報を確率論的にうまく取り込み，最適解を求めに行くことが主な特徴である．ゆえに各解析節点の確率論的同定・推定誤差評価が用いられる．このことから，定位置での誤差評価を行うことが望ましい．本論文ではこの事を十分に考慮し，固定要素網を用いたまま移動境界問題を解析する手法を定式化することで，同問題の逆解析への適用を可能としている．

用いる状態量$\boldsymbol{x}_t$は，各節点または各要素の擬似地下水位$\tilde{\boldsymbol{h}}_t$と対数透水係数$\log k$で構成されている．

4.4 逆解析結果

図–3に逆解析結果を示す．上図は模擬設定された降水量および涵養量を表す．中図は透水係数の同定結果を描いている．最後の下図が各観測井の擬似地下水位の観測値および推定値を示している．

考察の前に，まず模擬観測値から，順解析の水位変動を確認する．注目すべき事として，擬似地下水位変動から移動境界の挙動が読み取れることが挙げられる．基盤高と等しい擬似地下水位を指す地点は非貯留域に存在していて，基盤高よりも高い水位の地点であれば，貯留域内であることになる．擬似地下水位が基盤高に等しくなった時または基盤高より高くなった時に，移動境界がその地点を通過していることが分かる．非貯留域となっている顕著な例がA地点やB地点における水位変化曲線の水平部分である．このことを踏まえ，図–3を見れば，A, B, C各地点周辺では，23～30日目と46～50日目において，急激な水位上昇とともにS_tが上流



図–3 同定推定結果

へ移動していることがわかる．また，S_tの下流への移動による通過がA地点は34・55日目に，B地点は41日目に，C地点は15日目において認められる．よって，要素網を切り直しのない，固定要素網での移動境界問題解析が可能である．順解析でこのことを確認した後，逆解析に移っている．

本解析期間中，二度に渡って移動境界が急激に動き貯留域と非貯留域が縮小や拡大を急激に繰り返したにも関わらず，透水係数は約18日目頃にほぼ収束傾向が強く出始め，その後観測履歴が増すにつれて同定値の安定が大きくなり．最終的に高精度で収束に至っていることが見て取れる．これより，先験情報を旨く活用する事で，このように難解な移動境界問題も，本手法を用いて考えたモデルで，物性値の同定など一連の逆解析が可能であると言える．特筆すべきことに，本論の逆解析手法では，観測値において非貯留域であるという認識も観測データの一員として用いている．このことは従来では行われてなったことであり，観測値無しとして，逆に観測情報から外されていたが，今回移動境界を伴った問題のパラメータ同定・推定に寄与している．

5. 結論

本論文の考え方に基づく移動境界問題の解析手法は，多相*Stefan*問題を，相間の結合条件を単相界面における条件に当てはめることで，単相の簡便な解析として扱える点で有用性のある手法である．移動境界問題での焦点の1つである要素網問題に関しても，移動境界の予測挙動に沿って固定要素網を切っておけば，計算して切り直すことも無く精度のよい解析を行えるので，固定要素網による本手法でも十分である．また，具体的な解析例から，逆解析において，拡張*Kalman*フィルタ有限要素法に本手法を援用することによって，如何なく逆解析の効力を発揮し，同定・推定が問題なく行えることが分かった．

今回は基礎方程式が熱伝導方程式型の移動境界問題に言及しているが，その他の場合への適用も，今後の課題であると思われる．

参考文献

1) 河原田秀夫：自由境界問題　理論と数値解法, 東京大学出版会, 1989.
2) 齋藤武雄：移動境界伝熱学, 養賢堂. 1994.
3) 山口昌哉・野木達夫：ステファン問題, 産業図書, 1977.
4) 数値流体力学編集委員会　編：移動境界流れ解析, 東京大学出版会, 1995.
5) 庄司正弘：伝熱工学, 東京大学出版会, 1995.
6) Kamg, S. and N. Zabaras : Control of the freezing interface motion in two-dimensional solidification processes using the adjoint method, *Int. j. numer. methods eng.*, vol.38, pp.63–80, 1995.
7) 日野幹雄：スペクトル解析, 朝倉書店, 1977.
8) 長谷川高士・村上 章・浜口俊雄：拡張Kalmanフィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定, 土木学会論文集, No.505/III–29, 1994.
9) 浜口俊雄・村上 章・長谷川高士：不均質性を考慮した平面地下水流動における移動境界逆解析, 第51回年次学術講演会講演概要集共通セッション, pp.40–41, 1996.

(1996 年 9 月 6 日 受付)