

薄層界面クラックによる散乱問題の解析

ULTRASONIC SCATTERING FROM CRACK BETWEEN THIN SURFACE LAYER AND MATRIX

北原道弘*, 印 建華**

Michihiro KITAHARA and Jian-hua YIN

* 工博 東海大学教授 海洋学部海洋土木工学科 (〒424 静岡県清水市折戸 3-20-1)

** Ph.D. 南京大学助教授 声学研究所 (Nanjing 210093, P.R. China)

A numerical method is developed to characterize the interface crack between thin surface layer and host material. The method has three steps. The first step is to determine the free waves which propagate in the material with no crack. Here, all wave modes are determined from the reflection and transmission coefficients. The second step is to calculate the crack opening displacement which emit the scattered waves. Here, the boundary element method is adopted to determine the crack opening displacement. The last step is to estimate the scattered far-field. The Green's function for the layered material is formulated and utilized for the evaluation of the scattered far-field. The numerical examples show the possibility to characterize the crack in the low frequency range.

Key Words: thin surface layer, interface crack, Green's function, scattering

1. はじめに

超音波を利用してクラック長を推定する手法について精力的な研究が進められており、代表的な手法として、クラックによる散乱波の振幅を利用する方法、時間差 (time of flight) を利用する方法、回折波の干渉を利用する方法などが挙げられる¹⁾。このうち、回折波の干渉を利用する方法は平底穴の直径を精度よく推定する手法として主に実験的に開発され^{2), 3)}、固体中の波動場における幾何学的回折近似と組み合わせて円形及び楕円形クラックの大きさの定量化に応用されている^{4), 5)}。さらに、2層固体の界面上に存在するクラックの長さを推定するために、クラックによる散乱波の一般表現をもとに高周波の極限としてクラック長の推定式を導き⁶⁾、この近似推定式をもとに界面クラック長を推定したものに文献 7) がある。

文献 7) における散乱波の解析においては、対象とする2層固体の各々の厚さは比較的厚く、各層間の多重反射が界面上に存在するクラックによる散乱波の干渉に影響を与えないことが仮定されている。対象とするクラックの大きさと周波数によってこの厚さは決まるため一概には言えない面があるが、土木構造物の部材を対象とするとき、文献 7) による方法は数ミリから数センチと比較的厚い板の接合部に存在するクラック長の推定に適した方法と考えることができる。一方、普通鋼表面に薄い耐食性に富む鋼板を張り合わせた材料

のように、2層固体のうちの一方が薄い異種材料界面上に存在するクラックによる散乱波の特性についても吟味を進めておくことが必要と考える。このような薄い表層を有する材料の場合、表層部で生じる波動の多重反射の影響は無視できなくなり、これを考慮に入れた界面クラックによる散乱波動解析が必要となる。本論文では、薄い表層間の多重反射の影響を考慮に入れた界面クラックによる散乱波動解析法と一解析結果について述べる。非破壊評価的な観点からはクラック開口変位により生じた遠方散乱場が重要であり、この遠方散乱場を評価するために、表層間の多重反射を考慮した水/固体/固体中のグリーン関数を導出しこれを数値解析に活用することが解析手法上のポイントとなる。なお、単一固体中の表面付近に存在するクラックによる散乱波動場の特徴について議論したものに文献 8)、薄層剥離部からの散乱波動場の特性について指摘したものに文献 9) がある。

2. 問題の設定

解析対象とする界面クラックのモデル化を図-1に示す。異なる弾性特性を有する2つの領域 D と $\bar{D}$ が界面 B_1 に沿って接合されており、領域 D の上側は水 D_0 に浸されているものとする。水 D_0 と領域 D の界面 B_0 は $x_2 = d$ に、2つの弾性領域 D と $\bar{D}$ の界面 B_1 は $x_2 = 0$ に位置し、この界面 B_1 上に長さ $2a$ のクラック S が存在している。水中のセンサー T から

超音波を発信し、2層固体中の界面に存在するクラックから散乱された波動を水中のセンサーRで受信する。散乱波を生成したクラックと受信された散乱波形の間に存在する関係を明らかにすることにより、クラックの特性を評価したい。図-1は概略の説明図であり詳細は記していないが、固体D内には縦波、横波、クラックからの散乱波をはじめ多くの波動モードが存在する。本論文の次節以下では上層固体Dの厚さdが薄い場合を想定し、固体D内に存在する縦波、横波の多重反射モードの存在を考慮したクラックによる散乱波動場の表現式の導出が解析上の課題となる。

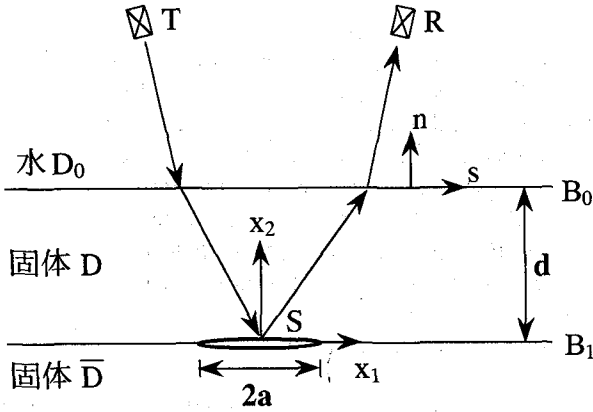


図-1 固体界面B₁上に存在するクラックS

2つの弾性領域DとD̄はクラック部分Sを除いて界面B₁で完全接合していると仮定する。接触面B₁が十分薄いとき、界面B₁の接合状態はバネモデルにより記述できる⁶⁾。バネモデルでは界面B₁(x₂ = 0)上の境界条件は次のように表現できる。

$$\mathbf{t} = -\bar{\mathbf{t}} \quad (1)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{K}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{t}$ は領域D側の界面上の変位と表面力である。また、上付きのバーは領域D̄側の物理量を示す。Kはバネ定数を表すマトリックスであり次のように書ける。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_t & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 K_t と K_n は界面B₁上に分布する接線方向と法線方向のバネ定数である。界面B₁が完全接合している場合は、 $K_t, K_n \rightarrow \infty$ に対応し、クラック（完全剥離）は、 $K_t, K_n = 0$ に対応する。また、水D₀と上側領域Dの間の界面B₀(x₂ = d)上の境界条件は次のように書ける。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = (\rho_F \omega^2)^{-1} \mathbf{n} \cdot \nabla p \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = -p \quad (5)$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (6)$$

ここで、 p は水中の圧力、 ρ_F は水の密度、 ω は角振動数、 $\mathbf{n}$ と $\mathbf{s}$ は界面B₀上の単位法線ベクトルと接線ベクトルである。

水中D₀において、圧力 p は次の運動方程式を満足する。

$$c_F^2 \nabla^2 p + \omega^2 p = 0 \quad (7)$$

また、弾性領域Dにおける変位場 $\mathbf{u}$ は次の運動方程式を満足する。

$$(c_L^2 - c_T^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (8)$$

ここで、 c_F は水中圧力波の伝播速度、 c_L と c_T は領域D内の縦波と横波の波速である。領域D̄における変位場 $\bar{\mathbf{u}}$ は式(8)において $c_{L,T}$ を $\bar{c}_{L,T}$ に置き換えたものを満たす。

3. 自由場の解析

図-1における発信側センサーTが水と固体の界面B₀からある程度離れている場合、水中センサーTにより発信された超音波は固体近傍では平面波として近似できる。このとき、自由場は界面クラックが存在しない直線境界による平面波の反射と透過の問題を考えることにより決定できる。図-2は、水/固体/固体からなる3つの領域中の自由場の分布を示している。固体表面の法線から角度 θ_0 をなして入射する超音波（縦波）に対して、水中には1つの反射縦波、領域D内には下方と上方に向かう縦波と横波からなる計4つの波動モード、そして領域D̄内には縦波と横波の2つの透過波が存在する。これらの自由場は次のように書ける。

$$p^{free} = p_0 e^{ik_F \mathbf{p}^{-F} \cdot \mathbf{x}} + p_0 R^{FF} e^{ik_F \mathbf{p}^{+F} \cdot \mathbf{x}} \text{ in } D_0 \quad (9)$$

$$u_i^{free} = p_0 \sum_{\beta=L,T} R^{-F\beta} d_i^{-\beta} e^{ik_\beta \mathbf{p}^{-\beta} \cdot \mathbf{x}} + p_0 \sum_{\beta=L,T} R^{+F\beta} d_i^{+\beta} e^{ik_\beta \mathbf{p}^{+\beta} \cdot \mathbf{x}} \text{ in } D \quad (10)$$

$$\bar{u}_i^{free} = p_0 \sum_{\beta=\bar{L},\bar{T}} R^{-F\beta} d_i^{-\beta} e^{ik_\beta \mathbf{p}^{-\beta} \cdot \mathbf{x}} \text{ in } \bar{D} \quad (11)$$

ここで、 p_0 は入射超音波の振幅であり、 R^{FF} は水中超音波の水中D₀への反射率、 $R^{-F\beta}$ ($\beta = L, T, \bar{L}, \bar{T}$)は水から固体、および固体から固体内への縦波と横波の透過率、 $R^{+F\beta}$ ($\beta = L, T$)は固体内の反射率である。また、 $k_\beta = \omega/c_\beta$ ($\beta = F, L, T$, 又は $\bar{L}, \bar{T}$)は各波動モードに対応する波数。c_βは波速である。p^{±β}とd^{±β}はそれぞれ波動の進行方向を表す伝播ベクトルと変位の振動方向を表す偏向ベクトルであり、次のように定義されている。

$$\mathbf{p}^{\pm\beta} = (\sin \theta_\beta, \pm \nu^\beta)$$

$$\nu^\beta = [1 - (\sin \theta_\beta)^2]^{1/2}, \quad \Im(\nu^\beta) > 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{d}^{\pm\beta} = \begin{cases} \mathbf{p}^{\pm\beta} & \text{for } \beta = F, L \text{ and } \bar{L} \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{p}^{\pm\beta} & \text{for } \beta = T \text{ and } \bar{T} \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 θ_β は屈折角である。

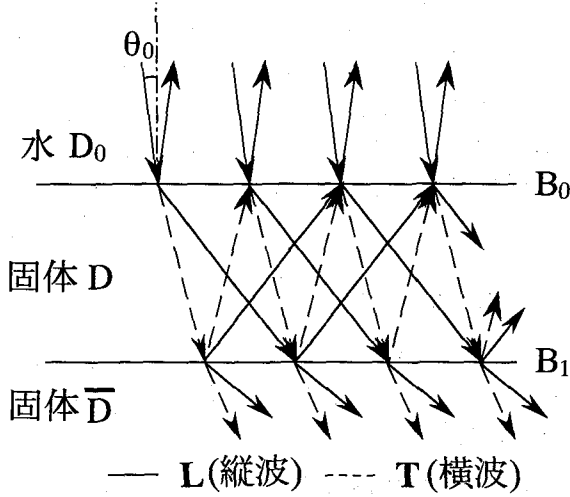


図-2 自由場

屈折角 θ_β と入射角 θ_0 は Snell の法則により関係しており、 $\sin \theta_\beta / c_\beta = \sin \theta_0 / c_F$ である。また、 $\zeta = \sin \theta_0$ とおくと、 $\sin \theta_\beta = c_\beta \sin \theta_0 / c_F = c_\beta \zeta / c_F$ より、式 (12) と (13) は次のように書き直すことができる。

$$\mathbf{p}^{\pm\beta}(\zeta) = (c_\beta \zeta / c_F, \pm \nu^\beta(\zeta)) \quad (14)$$

$$\nu^\beta(\zeta) = [1 - (c_\beta \zeta / c_F)^2]^{1/2}, \quad \Im(\nu^\beta) > 0$$

$$\mathbf{d}^{\pm\beta}(\zeta) = \begin{cases} \mathbf{p}^{\pm\beta}(\zeta) & \text{for } \beta = F, L \text{ and } \bar{L} \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{p}^{\pm\beta}(\zeta) & \text{for } \beta = T \text{ and } \bar{T} \end{cases} \quad (15)$$

反射率 R^{FF} 、透過率 $R^{-F\beta} (\beta = L, T, \bar{L}, \bar{T})$ 及び反射率 $R^{+F\beta} (\beta = L, T)$ は、式 (9), (10) を式 (4)~(6) で与えられる界面 B_0 上の境界条件に代入し、さらに式 (10), (11) を式 (1), (2) で与えられる界面 B_1 上の境界条件に代入することにより、計 7 つの未知量に対する 7 つの方程式を代数的に解くことにより決定できる。これらの反射率と透過率を再び式 (9)~(11) に代入して自由場が決定できる。

4. 近傍場の解析

領域 D 内における全波動場 u_i は、自由場 u_i^{free} と界面クラックによる散乱場 u_i^{sc} の和として表される。領域 D_0 と $\bar{D}$ における全波動場 p と $\bar{u}_i$ についても同様である。

$$p = p^{free} + p^{sc} \quad \text{in } D_0 \quad (16)$$

$$u_i = u_i^{free} + u_i^{sc} \quad \text{in } D \quad (17)$$

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i^{free} + \bar{u}_i^{sc} \quad \text{in } \bar{D} \quad (18)$$

ここで、 p^{sc} 、 u_i^{sc} と $\bar{u}_i^{sc}$ は、それぞれ領域 D_0 、 D 、 $\bar{D}$ 内における散乱波である。それぞれの領域における散

乱波に対する境界積分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p^{sc}(\mathbf{x}) = & - \int_{B_0} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} p^{sc}(\mathbf{y}) \} ds_{\mathbf{y}} \\ & + p.v. \int_{B_0} \{ \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \} p^{sc}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}, \\ & \mathbf{x} \in B_0 \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i^{sc}(\mathbf{x}) = & \int_{B_0+B_1+S} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j^{sc}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \\ & - p.v. \int_{B_0+B_1+S} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j^{sc}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}, \\ & \mathbf{x} \in B_0 \cup B_1 \cup S \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{u}_i^{sc}(\mathbf{x}) = & \int_{B_1+S} \bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{t}_j^{sc}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \\ & - p.v. \int_{B_1+S} \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{u}_j^{sc}(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}, \\ & \mathbf{x} \in B_1 \cup S \quad (21) \end{aligned}$$

ここで、 $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は水領域 D_0 と固体領域 D における基本解 (全空間におけるグリーン関数) であり、次のように与えられる。

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_F r) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{i}{4\mu} [H_0^{(1)}(k_T r) \delta_{ij} \\ & + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \{ H_0^{(1)}(k_T r) - H_0^{(1)}(k_L r) \}] \end{aligned} \quad (23)$$

上式において、 $H_0^{(1)}$ は第 1 種 0 次の Hankel 関数、また、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ である。さらに式 (20) の T_{ij} は基本解 U_{ij} による応力 $T_{jk}^n(\partial_{\mathbf{y}}) U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を意味する 2 重層核である。

散乱場に対する積分方程式 (19)~(21) に式 (16)~(18) の散乱場を代入し、境界条件 (1), (2) 及び (4)~(6) を用いると、次のような全波動場に対する境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} n_j(\mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) + \int_{B_0} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{ \rho_F \omega^2 n_j(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) \} ds_{\mathbf{y}} \\ + p.v. \int_{B_0} \{ \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \} n_j(\mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \\ = q^{free}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in B_0 \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}) - \int_{B_0} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \\ - \int_{B_1+S} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) K_{jk} \{ \bar{u}_k(\mathbf{y}) - u_k(\mathbf{y}) \} ds_{\mathbf{y}} \\ + p.v. \int_{B_0+B_1+S} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} = g_i^{free}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in B_0 \cup B_1 \cup S \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{u}_i(\mathbf{x}) - \int_{B_1+S} \bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) K_{jk} \{u_k(\mathbf{y}) - \bar{u}_k(\mathbf{y})\} ds_y \\ + p.v. \int_{B_1+S} \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{u}_j(\mathbf{y}) ds_y = \bar{g}_i^{free}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in B_1 \cup S \quad (26) \end{aligned}$$

ここで, q^{free} , g_i^{free} と $\bar{g}_i^{free}$ は自由場の積分からなる次のような既知量である.

$$\begin{aligned} q^{free}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}p^{free}(\mathbf{x}) \\ + \int_{B_0} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y p^{free}(\mathbf{y})\} ds_y \\ - p.v. \int_{B_0} \{\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y P(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} p^{free}(\mathbf{y}) ds_y \\ \mathbf{x} \in B_0 \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_i^{free}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}u_i^{free}(\mathbf{x}) - \int_{B_0+B_1+S} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j^{free}(\mathbf{y}) ds_y \\ + p.v. \int_{B_0+B_1+S} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j^{free}(\mathbf{y}) ds_y \\ \mathbf{x} \in B_0 \cup B_1 \cup S \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_i^{free}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\bar{u}_i^{free}(\mathbf{x}) \\ - \int_{B_1+S} \bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{t}_j^{free}(\mathbf{y}) ds_y \\ + p.v. \int_{B_1+S} \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{u}_j^{free}(\mathbf{y}) ds_y \\ \mathbf{x} \in B_1 \cup S \quad (29) \end{aligned}$$

上式において, 自由場の流体圧 p^{free} , 自由場の変位 u_i^{free} と $\bar{u}_i^{free}$ は式(9)~(11)に与えられている. 表面力 t_i^{free} は $t_i^{free}(\mathbf{y}) = T_{ij}^n(\partial_y) u_j^{free}(\mathbf{y})$ と計算できる.

境界積分方程式(24)~(26)は無限に続く界面 B_1 と B_0 上の積分を含むため, 実際の数値計算においては有限長の積分で打ち切ることになる. このとき界面クラック S 上の変位場 u_i と $\bar{u}_i$ が打ち切り誤差の影響を受けない程度にクラック S から十分遠くまでの界面 B_1 と B_0 を積分長として考慮する必要がある. 境界 B_0 上の境界(束縛)条件式(6)を考慮して積分方程式(24)~(26)を離散化して各要素上で数値積分を実行すれば, 境界上の未知量 $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$ と $\bar{\mathbf{u}}$ に対する次のような代数方程式を得る.

$$\begin{bmatrix} \rho_F \omega^2 P \mathbf{n} & (Q - \frac{1}{2}) \mathbf{n} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \mathbf{1} + \mathbf{T} & -\mathbf{U} & \mathbf{T} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{K} \\ \mathbf{T} & -\mathbf{U} & \frac{1}{2} \mathbf{1} + \mathbf{T} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{K} \\ 0 & 0 & -\mathbf{U} \cdot \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{1} + \mathbf{T} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \mathbf{u} |_{\mathbf{y} \in B_0} \\ \mathbf{t} |_{\mathbf{y} \in B_0} \\ \mathbf{u} |_{\mathbf{y} \in B_1 \cup S} \\ \bar{\mathbf{u}} |_{\mathbf{y} \in B_1 \cup S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q^{free} |_{\mathbf{x} \in B_0} \\ 0 \\ \mathbf{g}^{free} |_{\mathbf{x} \in B_0} \\ \mathbf{g}^{free} |_{\mathbf{x} \in B_1 \cup S} \\ \bar{\mathbf{g}}^{free} |_{\mathbf{x} \in B_1 \cup S} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

ここで, $\mathbf{1}$ は単位テンソル, $Q = \mathbf{n} \cdot \nabla_y P$ である. この代数方程式を解くことにより, 界面クラック S 上の開口変位を次のように決めることができる.

$$[u_j] = u_j - \bar{u}_j \quad (31)$$

5. 遠方散乱場の解析

界面 B_1 上に存在するクラック S の開口変位 $[u_j] = u_j - \bar{u}_j$ により生じた水中 D_0 の散乱圧力場 p^{sc} は次のように表現できる.

$$p^{sc}(\mathbf{x}) = \int_S G_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \{u_j(\mathbf{y}) - \bar{u}_j(\mathbf{y})\} ds_y \quad (32)$$

ここで, G_j はグリーン関数であり, 界面クラック S 上の点 $\mathbf{y}$ で生じた x_j 方向の単位の変位の食い違いによる水 D_0 内の点 $\mathbf{x}$ における散乱圧力場を表している. このグリーン関数は, 次のような散乱波に対する境界条件から導くことができる.

$x_2 = 0$ 上で:

$$G_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \bar{G}_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(x_1 - y_1) \delta_{ij} \quad (33)$$

$$T_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \bar{T}_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (34)$$

$x_2 = d$ 上で:

$$n_i G_{ij}^* = (\rho_F \omega^2)^{-1} n_i G_{j,i} \quad (35)$$

$$n_i T_{ij}^* = -G_j \quad (36)$$

$$s_i T_{ij}^* = 0 \quad (37)$$

ここで, G_j は水中圧力であり, G_{ij}^* は x_j 方向の単位の変位の食い違いにより生じた x_i 方向の変位である. さらに, $T_{ij}^* = T_{jk}^n(\partial_x) G_{ik}^*$, また $(\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)$ であり, $\mathbf{y} = (y_1, 0)$ は界面 B_1 上に存在する変位の食い違い量の位置である(図-3参照).

いま, フーリエ変換を次のように定義する.

$$\tilde{\phi}(k_1, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1, y_2) e^{-ik_1 y_1} dy_1 \quad (38)$$

このとき逆変換は次のように書ける.

$$\phi(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k_1, y_2) e^{ik_1 y_1} dk_1 \quad (39)$$

これより, 境界条件のフーリエ変換は次のようになる.

$x_2 = 0$ 上で:

$$\tilde{G}_{ij}^* - \bar{\tilde{G}}_{ij}^* = \delta_{ij} e^{-ik_1 x_1}, \quad \tilde{T}_{ij}^* - \bar{\tilde{T}}_{ij}^* = 0 \quad (40)$$

$x_2 = d$ 上で:

$$\begin{aligned} n_i \tilde{G}_{ij}^* &= (\rho_F \omega^2)^{-1} n_i \tilde{G}_{j,i}, \\ n_i \tilde{T}_{ij}^* &= -\tilde{G}_j, \quad s_i \tilde{T}_{ij}^* = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

図-3に水(D_0), 固体(D), 固体($\bar{D}$) からなる3層内に生じた散乱波を示している. 領域 D 内には4つ, 領域 $\bar{D}$ 内には2つ, 水中 D_0 には1つの散乱波の成分が存在する. これらの散乱波は次のように表現できる.

$$\tilde{G}_j = A_j^{+F} e^{-ik_F \tilde{\mathbf{p}}^{+F} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{in } D_0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ij}^* &= \sum_{\beta=L,T} A_j^{+\beta} \tilde{d}_i^{+\beta} e^{-ik_\beta \tilde{\mathbf{p}}^{+\beta} \cdot \mathbf{x}} \\ &+ \sum_{\beta=L,T} A_j^{-\beta} \tilde{d}_i^{-\beta} e^{-ik_\beta \tilde{\mathbf{p}}^{-\beta} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{in } D \end{aligned} \quad (43)$$

$$\tilde{G}_{ij}^* = \sum_{\beta=L,T} A_j^{-\beta} \tilde{d}_i^{-\beta} e^{-ik_\beta \tilde{\mathbf{p}}^{-\beta} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{in } \bar{D} \quad (44)$$

ここで, j は散乱波を生じさせた変位の食い違いの成分を示す. また, $A_j^{\pm\alpha}$ は散乱 α 波 ($\alpha = F, L, T$ または $\bar{L}, \bar{T}$) の振幅, $\tilde{\mathbf{p}}^{\pm\beta}$ と $\tilde{\mathbf{d}}^{\pm\beta}$ は散乱波の伝播方向と偏方向を表す単位ベクトルである. このうち $\tilde{p}_1^{\pm\beta}$ は波数ベクトルの第1座標成分 k_1 と Snell の法則により関係している. 即ち, 関係式 $k_1 = k_F \tilde{p}_1^{+F} = k_\beta \tilde{p}_1^{\pm\beta}$ が成立する. いま, $\zeta = \tilde{p}_1^{+F}$ とおくと, $\tilde{\mathbf{p}}^{\pm\beta}$ と $\tilde{\mathbf{d}}^{\pm\beta}$ は次のように表現できる.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}^{\pm\beta}(\zeta) &= (c_\beta \zeta / c_F, \pm \tilde{\nu}^\beta(\zeta)), \\ \tilde{\nu}^\beta(\zeta) &= -[1 - (c_\beta \zeta / c_F)^2]^{1/2}, \quad \Im(\tilde{\nu}^\beta) < 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}^{\pm\beta}(\zeta) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}^{\pm\beta}(\zeta) & , \beta = F, L \text{ and } \bar{L} \\ \mathbf{e}_3 \times \tilde{\mathbf{p}}^{\pm\beta}(\zeta) & , \beta = T \text{ and } \bar{T} \end{cases} \quad (46)$$

変位の食い違い成分 $j(=1, 2)$ 毎に成立する計7つの境界条件式(40)と(41)に, 散乱波の表現式(42)~(44)を代入することにより, 計7個の係数 A_j^α を決めることができる. これより, 界面クラック S 上の開口変位により生じる水中の散乱圧力波を表すグリーン関数は, 式(42)の逆フーリエ変換により次のように得られる.

$$\begin{aligned} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_j e^{ik_1 y_1} dk_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_j^{+F} e^{-ik_F \tilde{\mathbf{p}}^{+F} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 y_1)} dk_1 \\ &= \frac{k_F}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_j^{+F} e^{-ik_F \tilde{\mathbf{p}}^{+F} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 y_1)} d\zeta \end{aligned} \quad (47)$$

いま, $k_F |\mathbf{x}| \gg 1$ かつ $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$ ($\mathbf{y} \in S$) の意味における遠方場 $\mathbf{x}$ を考える. このとき, 式(47)に最急降下法¹⁰⁾を適用すると, グリーン関数 G_j の近似を次のように得る.

$$\begin{aligned} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\approx \sqrt{\frac{1}{2\pi k_F |\mathbf{x}|}} \\ &\times e^{i(k_F |\mathbf{x}| - \frac{\pi}{4})} k_F \tilde{\nu}^F A_j^{+F} e^{ik_F \tilde{\mathbf{p}}_1^{+F} y_1} \Big|_{\zeta = \sin \theta_x} \end{aligned} \quad (48)$$

ここで, $\theta_x = \arcsin(-x_1/|\mathbf{x}|)$ は観測角である. 式(32)に上式(48)を代入すると, 水中の遠方散乱圧力場は次のように表現できる.

$$\begin{aligned} p^{sc}(\mathbf{x}) &= \int_S G_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [u_j(\mathbf{y})] ds_y \\ &\approx \sqrt{\frac{1}{2\pi k_F |\mathbf{x}|}} e^{i(k_F |\mathbf{x}| - \frac{\pi}{4})} \\ &\times \int_S k_F \tilde{\nu}^F A_j^{+F} e^{ik_F \tilde{\mathbf{p}}_1^{+F} y_1} \Big|_{\zeta = \sin \theta_x} [u_j(\mathbf{y})] ds_y \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi k_F |\mathbf{x}|}} e^{i(k_F |\mathbf{x}| - \frac{\pi}{4})} \times \Omega_F(k_F, \theta_x) \end{aligned} \quad (49)$$

ここで, Ω_F は距離減衰と周波数減衰を除いた水中の遠方における散乱圧力場の振幅を表し, 次のように定義されている.

$$\Omega_F(k_F, \theta_x) = \int_S k_F \tilde{\nu}^F A_j^{+F} e^{ik_F \tilde{\mathbf{p}}_1^{+F} y_1} \Big|_{\zeta = \sin \theta_x} [u_j(\mathbf{y})] ds_y \quad (50)$$

以後, この Ω_F を散乱振幅と呼ぶ.

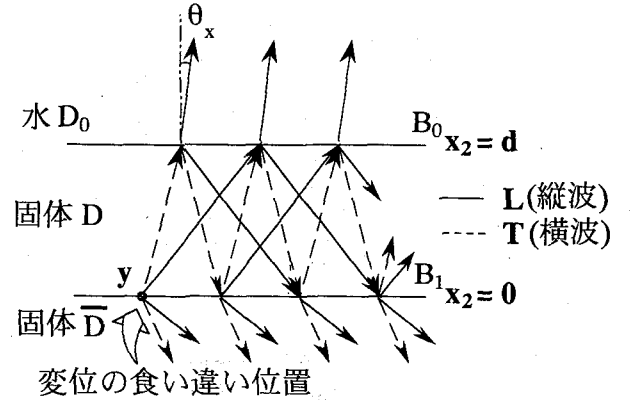


図-3 界面 B_1 上の変位の食い違いにより生じた波動成分

6. 数値解析結果

数値解析においては, 材料としてスチールとアルミを考えた. 固体界面 B_1 上に存在するクラック S の長さは $2a$, 上側の固体層 D の厚さは d である. クラック面以外の界面 B_1 が完全結合である条件を近似的に満足させるために, B_1 上のバネ定数 K_t と K_n をここでは $aK_t/\mu = aK_n/\mu = 1000$ と選んだ. ここで, μ は固体 D 内のせん断剛性である. また, 近傍場の数値解析においては, 界面 B_0 と B_1 としてクラック長の5倍の $10a$ を考慮した. 各材料の材料定数は次のように選んだ.

示したものが
上側固体 D の

steel : $c_L = 5900\text{m/s}$, $c_T = 3200\text{m/s}$
 $\rho = 7800\text{kg/m}^3$

aluminum : $c_L = 6420\text{m/s}$, $c_T = 3040\text{m/s}$
 $\rho = 2700\text{kg/m}^3$

まず、ここで定式化した3層体中の固体界面上に存在するクラックによる散乱問題に対する解析手法の精度を確認するために、上側固体 D と下側固体 $\bar{D}$ 両者の物性をスチールと一致するように選んだ。即ち、水と均質固体（スチール）からなる2層体の固体内に存在するクラックによる散乱問題を考える。この問題はすでに参考文献8)で解析されており、現手法による結果と比較でき、精度確認ができる。

固体表面に垂直に入射する入射波(入射角 $\theta_0 = 0^\circ$)に対して、入射波の入射方向(固体表面に垂直な方向)における散乱振幅をクラックの半分の長さ a で無次元

厚さであり、文献8)においては固体中のクラックの深さに対応する。この図では $d/a = 0.5, 1.0, 1.5$ に対する結果を実線で示しており、文献8)による結果を白丸で表している。本解析法において、上側固体と下側固体の材料定数を一致させると、均質固体中のクラックに対する結果と一致することがわかる。図-4(b)は上側固体の厚さ d が水中の散乱振幅に与える影響をより詳しく調べるために、7通りの d/a について散乱振幅を計算した結果である。クラック長を固定した場合、上側固体の厚さ d が小さくなるにつれて(クラックの位置が水と固体の境界に近づくにつれて)散乱振幅のピーク値は大きくなり、かつピークの位置は低周波数側にシフトすることがわかる。

図-5(a)は、水/スチール/アルミにおけるスチールとアルミの界面に存在するクラックによる散乱振幅を

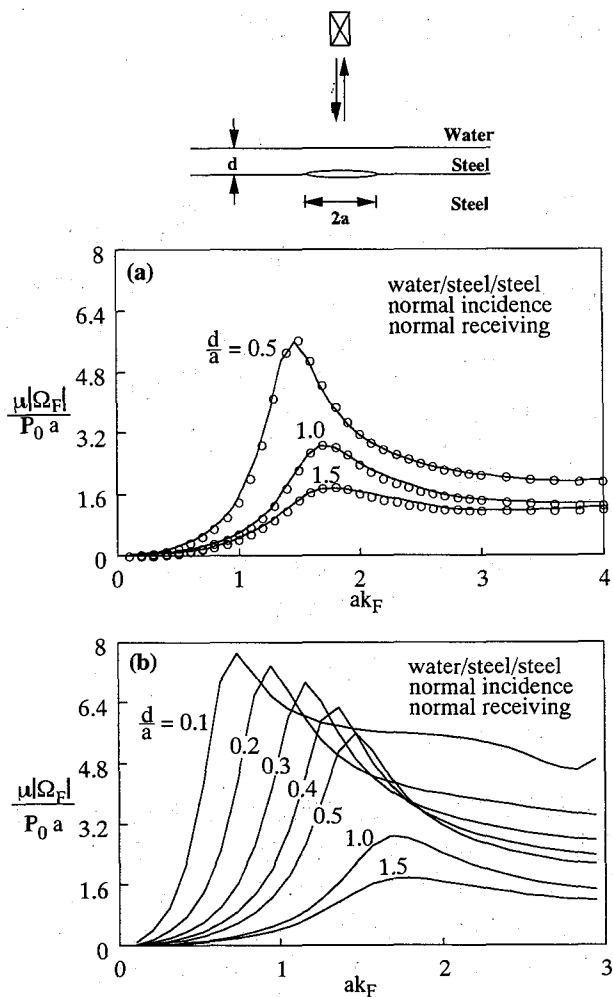


図-4 スチール中のクラックによる散乱振幅
丸印は文献8)の結果

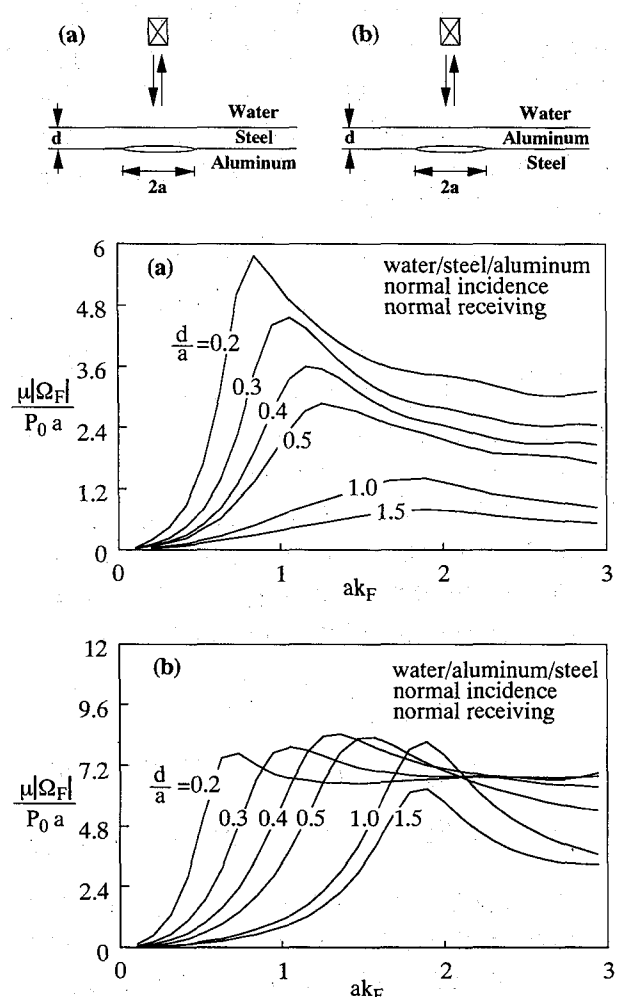


図-5 (a) スチール/アルミ, (b) アルミ/スチール
界面上のクラックによる散乱振幅

ak_F の関数として示したものであり、図-5(b)は、水/アルミ/スチールにおける固体界面クラックによる散乱振幅を示したものである。両図共にパラメータは d/a である。図-5(a)は先の図-4(b)とほぼ同じ傾向を示す。図-5(b)は d/a が変化しても散乱振幅のピーク値の大きさに顕著な変化は見られないが、ピーク位置は d/a が小さくなるにつれて低周波数側にシフトしていることがわかる。

図-6(a)は図-5(a)と同じ水/スチール/アルミに対する結果であるが表示の仕方を変えて、上層固体の厚さ d で無次元化した固体中の縦波の波数 dk_L に対して散乱振幅 $|\Omega_F|$ をプロットしたものである。この場合のパラメータは上層固体の厚さ d に対するクラックの半分の長さ a/d である。同じ厚さ d に対して、クラック長が長くなるにつれて散乱振幅のピーク値は増大しピーク位置は低周波側にシフトすることがわかる。

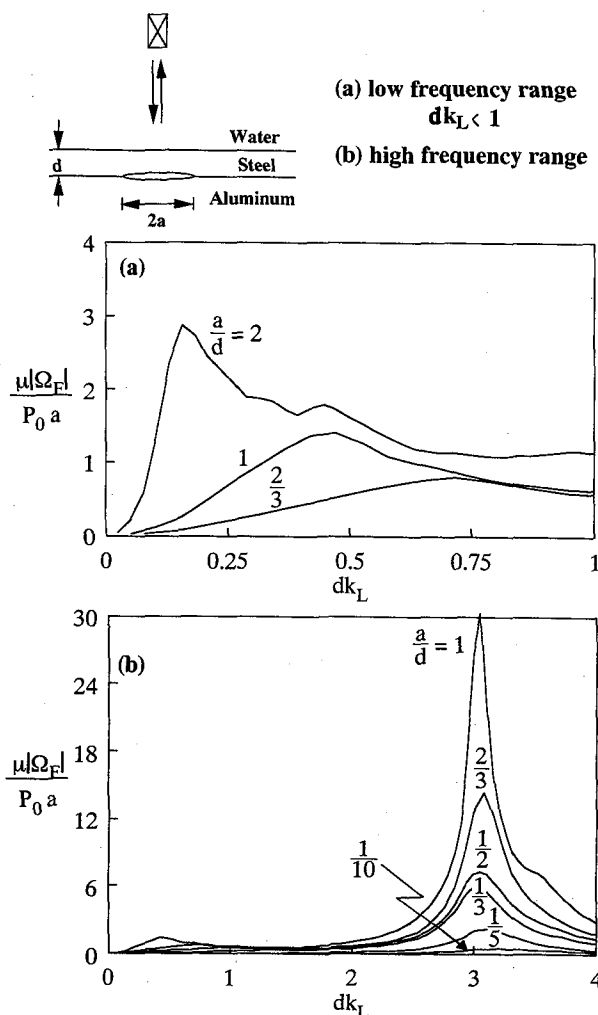


図-6 スチール/アルミ界面上のクラックによる散乱振幅

これまで図-4~図-6(a)に示した結果はすべて低周波数域($ak_L \approx ak_F/4 < 1$)における結果である。より高周波数域においては上側固体 D 内における弾性波の多重反射に起因する共振モードが存在する。より高周波数域における解析を水/スチール/アルミ中のスチールとアルミ界面に存在するクラックに対して実行した結果を示したものが図-6(b)である。この結果より次のことが言える。(1) 上層の部材厚に起因する共振モードは $dk_L = \pi$ で生じる。(2) この共振ピークの値は低周波数域に存在する図-4~図-6(a)に示したピークよりも、かなり大きい。(3) クラック長が長くなってもこの共振ピークの位置は変化しないが、ピークの値は大きくなる。

7. おわりに

固体を水に浸して固体内部の状態を調べる水浸法を想定して、2層固体の界面上に存在するクラックによる水中散乱波動場の表現を導いた。上層内に存在する多重反射モードの影響を考慮してあるため、ここで得た表現は上層の部材厚が薄くなり薄層内の多重モードをも考慮しながら界面クラックによる散乱効果を吟味したい場合に適した表現になっている。数値解析においては、上側の固体厚が薄くなった場合の水中散乱圧力場の特性に着目した解析を行った。数値解析結果の要点は、上層固体の部材厚に起因する共振による散乱振幅のピーク他、低周波数域にクラックと薄層の相互作用により生じた散乱振幅のピークが存在することである。このピークは部材厚に起因する共振ピークよりも振幅は小さいが、表層固体の厚さが薄くなるにつれてピーク位置が低周波数側にシフトする特徴を有している。薄層厚とクラック長の関係をより詳しく調べることにより、上層固体厚が薄い場合の界面クラックの定量化に役立てることが今後の課題として残っている。また、ここで実行した数値解析は固体表面に対して垂直な後方散乱振幅のみについてであり、斜め入射に対する散乱振幅特性について吟味することも課題として残っている。

参考文献

- 1) Rehbein, D.K., Thompson, R.B., and Buck, O.: Crack length determination by ultrasonic methods, Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol.12, pp.2159-2165, 1993.
- 2) Gericke, O.R.: Determination of the geometry of hidden defects by ultrasonic pulse analysis testing, J. Acoust. Soc. Am., Vol.35, pp.364-368, 1963.
- 3) Adler, L. and Whaley, H.L.: Interference effect in a multifrequency ultrasonic pulse echo and its ap-

- plication to flaw characterization, J. Acoust. Soc. Am., Vol.51, pp.881-887, 1972.
- 4) Achenbach, J. D., Adler, L., Lewis, D. K. and McMaken, H. : Diffraction of ultrasonic waves by penny - shaped cracks in metals: Theory and experiment, J. Acoust. Soc. Am., Vol.66, pp.1848-1856, 1979.
 - 5) Adler, L. and Achenbach, J.D.: Elastic wave diffraction by elliptical cracks: Theory and experiment, J. of Nondestructive Evaluation, Vol.1, pp.87-99, 1980.
 - 6) Hirose, S. and Kitahara, M.: Scattering of elastic waves by interface cracks between dissimilar materials, Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol.12, pp.1467-1474, 1993.
 - 7) 北原道弘, 印 建華 : 超音波による界面クラック長の一推定, 構造工学論文集, Vol.42A, pp.357-364, 1996.
 - 8) 廣瀬壮一, 北原道弘 : 液体-固体の境界近傍における欠陥による散乱, 境界要素法論文集, 第8巻, pp.63-68, 1991.
 - 9) Kitahara, M. and Yin, J.-H.: Elastic wave scattering by an interface crack in layered materials, Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol.15, pp.105-112, 1996.
 - 10) Achenbach, J.D., Gantesen, A.K. and McMaken, H.: Ray Methods for Waves in Elastic Solids, Pitman Books Limited, 1982.

(1996年9月6日受付)