

分岐点探査法と材料・構造系への適用

BIFURCATION POINT SEARCH TECHNIQUE AND ITS APPLICATION TO MATERIALS AND STRUCTURES

山川 優樹*, 池田 清宏*, 柳澤 栄司*, 米原 久人**

Yuki YAMAKAWA, Kiyohiro IKEDA, Eiji YANAGISAWA and Hisato YONEHARA

*東北大学工学部土木工学科 (〒 980-77 仙台市青葉区)

** 島根県

A bifurcation point search technique is developed so as to determine the location of bifurcation points with reference to force versus displacement curves of materials and structures. This technique serves as an extension of the elastic bifurcation theory that describes the asymptotic influence of initial imperfections on systems undergoing bifurcation. The validity of the technique is assessed through the application to the computational force versus displacement curves of a hexagonal truss dome. Furthermore, it is applied to the stress versus strain curves of sand specimens subject to the triaxial-compression-test to detect the presence of bifurcation points that trigger the softening.

Key Words : bifurcation, material softening, asymptotic law

1. まえがき

材料の軟化は、材料中の欠損や滑りが荷重の増加とともに拡大・進展することにより生じていることが実験等を通じて検証されている^{1),2)}。一方、金属材料の塑性縞の発生が塑性分岐により引き起こされる³⁾ように、分岐も材料の軟化の初期段階に大いに関与している。

分岐は、材料・構造系の強度や変形に関わる一般的な性質であり、弾性分岐と塑性分岐とに大別される。弾性分岐の理論は構造力学において、はりの Euler 座屈やシェルの座屈等に関する幅広い研究がなされ、体系化されている^{4),5),6),7)}。塑性分岐の理論は金属材料の塑性縞の発生のメカニズムの解明のために開発され^{3),8)}、砂や粘土等のすべり線形成解析等による破壊シミュレーションへと発展している^{9),10),11),12),13)}。

一方、著者等は弾性分岐理論に基づく漸近理論による土・コンクリート等の土木材料の軟化挙動の説明を試みており、これらの材料の試験毎の変動が、その初期不整(個体差)の変動によるという仮定に基づき、荷重-変位曲線を近似する分岐方程式や曲線の変動を記述する漸近則等を誘導している^{14),15),16)}。

本論文は分岐が材料の荷重-変位曲線の軟化に関与するメカニズムの一検証法として、材料・構造系の荷重-変位(応力-ひずみ)関係図上の分岐点の位置を決定する「分岐点探査法」を提案するものである。この手法は、荷重-変位関係図上で前述の漸近則が最も成り立つ点として分岐点の位置を特定するものである。この手法を正六角形トラスドームの有限変位解析結果に適用し、その妥当性を検証する。さらに、豊浦標準砂の三軸圧縮

試験により得た応力-ひずみ関係図上の分岐点の位置を特定することにより、分岐がこの応力-ひずみ曲線の軟化の一因となっていることを検証する。

2. 漸近近似法

この章では論文¹⁵⁾を再構成することにより漸近的分岐理論の成果を紹介する。ここでの理論展開は、単純対称分岐点に限定して行いが、後に本論文の適用例でも取り上げる軸対称性がある系の2重分岐点にも拡張・適用可能である¹⁷⁾。

十分滑らかな非線形の釣合式を

$$F(P, u, \epsilon) = 0 \tag{1}$$

と表す。ここに P は荷重パラメータ、 $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ は n 次元の変位ベクトル、 ϵ は初期不整変数である。

完全系 ($\epsilon = 0$) の安定な主径路上の最初の単純対称分岐点 (P_c^0, u_c^0) を考える。ここに、上付添字 (0) は完全系、下付添字 (c) は特異点での値を表す。この系の接線剛性行列 $J_c^0 = (\partial F / \partial u)_c^0$ に対する固有ベクトル $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{in})^T$ を用いて、不完全系の釣合点 (P, u) と完全系の分岐点 (P_c^0, u_c^0) の間の増分量 ($\delta P, \delta u$) を、

$$\delta P = P - P_c^0, \quad \delta u = u - u_c^0 = \sum_{i=1}^n \xi_i w_i \tag{2}$$

と定義する。ここに、 w_i ($i = 1, \dots, n$) は固有ベクトル方向の増分変位を表す。また ξ_1 が J_c^0 のゼロ固有値に対する固有ベクトルであると仮定する ($J_c^0 \xi_1 = 0$)。

完全系の分岐点 (P_c^0, u_c^0) と不完全系の釣合点 (P, u)

の2点について式(1)の差を取ると、増分釣合式

$$G_i(w, \delta P, \epsilon) = \lambda_{ic} w_i + a_i \delta P + b_i \epsilon + c_i w^2 + \text{h.o.t.} = 0, \quad i = 2, \dots, n \quad (3)$$

が得られる。ここで、 λ_{ic} は J_c^0 の第 i 番目の固有値であり、 a_i, b_i, c_i は定数であり、 $w \equiv w_1$ である。式(3)から w_i ($i = 2, \dots, n$) を消去すると、分岐(特異)モードに対応する増分変位 w で表した分岐方程式が、

$$\bar{G}(w, \delta P, \epsilon) = A_{110} w \delta P + A_{300} w^3 + A_{001} \epsilon + \text{h.o.t.} = 0 \quad (4)$$

と求まる。ここに、 $A_{110}, A_{300}, A_{001}$ は分岐方程式の展開係数である。この方程式の性質は幅ひろく研究され、明らかにされている⁶⁾。

ところが、実験で一般に計測されるのは、 $P-w$ 曲線ではなく、 $P-u$ 曲線である ($u \equiv u_i$)。式(4)をこのような計測される変位に対応する表現にするため、式(3)より δu を w と δP を用いて表わすと、

$$\delta u \equiv u_i - u_c^0 = \xi_{i1} w + r \delta P + s w^2 + \text{h.o.t.}, \quad (5)$$

($i = 1, \dots, n$) となる。ここに、

$$r = - \sum_{j=2}^n \frac{\xi_{ij} a_j}{\lambda_{jc}}, \quad s = - \sum_{j=2}^n \frac{\xi_{ij} c_j}{\lambda_{jc}} \quad (6)$$

は定数である。式(5)で w の項の係数 ξ_{i1} が消失するか否かによって δu を以下のように分類できる。

$$\begin{cases} \xi_{i1} = 0 & (\delta u \text{ は } w^2 \text{ のオーダー}) \\ \xi_{i1} \neq 0 & (\delta u \text{ は } w \text{ と同じオーダー}) \end{cases} \quad (7)$$

前者は、変位 δu が

$$w \rightarrow -w \quad (\text{または、} \xi_1 \rightarrow -\xi_1) \quad (8)$$

という変換に対して不変である場合に対応する。以下、各々の場合について、一般に計測される変位 u に対する漸近式を誘導する。

2.1 $\xi_{i1} = 0$ (δu が w^2 のオーダー) の場合

$\xi_{i1} = 0$ 、すなわち δu が w^2 のオーダーの場合には、式(4)と(5)より、分岐点の近傍における解曲線は、分岐方程式

$$\left| \delta u - \frac{\delta P}{E} \right|^{1/2} \delta P + p \left| \delta u - \frac{\delta P}{E} \right|^{3/2} + q \epsilon + \text{h.o.t.} = 0 \quad (9)$$

となる。ここに、 p と q は分岐方程式(4)の展開係数をスケールした定数であり、 $E = 1/r$ は完全系の主経路の傾きを表す定数である。これらの定数の定義の詳細については、文献¹⁹⁾を参照。

ところで、分岐する系の初期不整による強度の低下量 δP_c に関する Koiter の 2/3 乗則は⁵⁾、

$$\delta P_c \equiv P_c - P_c^0 \sim - \frac{3p^{1/3} q^{2/3}}{2^{2/3}} \epsilon^{2/3} \quad (10)$$

により与えられる。Koiter 則を一般化するため、直線

$$\delta P + h \delta u = 0 \quad (11)$$

を考える (h は定数である)。式(11)を式(9)に代入すると、変位に関する初期不整の 2/3 乗則

$$\delta u|_{\delta P+h\delta u=0} \sim \eta \epsilon^{2/3} \quad (12)$$

が求まる。ここに、

$$\eta = \frac{\text{sign}(\delta u) q^{2/3}}{\left(\text{sign}(\delta u) h \left| 1 + \frac{h}{E} \right|^{1/2} - p \left| 1 + \frac{h}{E} \right|^{3/2} \right)^{2/3}} \quad (13)$$

であり、 $\delta u|_{\delta P+h\delta u=0}$ は、直線と解曲線との交点における変位と分岐点の変位との差を表し、 $\text{sign}(\delta u)$ は、その符号である。式(10)と(12)から ϵ を消去すると、

$$\delta P_c \sim -\eta^* \delta u|_{\delta P+h\delta u=0} \quad (14)$$

という変位と荷重という2つの物理量の間漸近則が求まる。ここに η^* は定数であり、

$$\eta^* = \frac{-3 \text{sign}(\delta u) p^{1/3}}{2^{2/3}} \times \left(\text{sign}(\delta u) h \left| 1 + \frac{h}{E} \right|^{1/2} - p \left| 1 + \frac{h}{E} \right|^{3/2} \right)^{2/3} \quad (15)$$

により与えられる。実験で得られた荷重-変位曲線について、式(14)が表わす比例関係の成否を確かめることにより、分岐の介在の有無を検証できる。

2.2 $\xi_{i1} \neq 0$ (δu が w と同じオーダー) の場合

$\xi_{i1} \neq 0$ 、すなわち δu が w と同じオーダーの場合には、式(4)と(5)より、分岐方程式は、

$$\left(\delta u - \frac{\delta P}{E} \right) \delta P + p^* \left(\delta u - \frac{\delta P}{E} \right)^3 + q^* \epsilon + \text{h.o.t.} = 0 \quad (16)$$

となる。ここに、 p^*, q^*, E はある定数である。

Koiter 則を一般化するため、放物線

$$\delta P + g \delta u^2 = 0 \quad (17)$$

を考える (g は定数である)。式(17)を式(16)に代入すると、変位に関する初期不整の 1/3 乗則

$$\delta u|_{\delta P+g\delta u^2=0} \sim \left(\frac{q^*}{g-p^*} \right)^{1/3} \epsilon^{1/3} \quad (18)$$

が求まる。ここで、 $\delta u|_{\delta P+g\delta u^2=0}$ は、放物線と解曲線との交点における変位と分岐点の変位との差を表す。式(10)と(18)から ϵ を消去すると、

$$\delta P_c \sim - \frac{3(p^*)^{1/3} (g-p^*)^{2/3}}{2^{2/3}} \left(\delta u|_{\delta P+g\delta u^2=0} \right)^2 \quad (19)$$

という漸近則が求まる。

3. 分岐点探査法

式(14)または(19)の漸近則を実験曲線に適用する際、分岐点 (P_c^0, u_c^0) の位置を決める必要がある。従来は、同一条件下での実験で得られた荷重-変位曲線(少なくとも10ケース程度)に対し、漸近則(14)または

(19) が最も良く成り立つ点をランダムサーチすることにより、分岐点の位置を定めていた¹⁵⁾。しかし、この方法は荷重-変位曲線が数本しか与えられない場合や、供試体毎に分岐点(分岐モード)が異なる場合には適応できない。そこで本章では、1本の荷重-変位曲線から分岐点の位置を決定する方法を誘導する。

3.1 タイプ A (δu が w^2 のオーダーの場合)

漸近則(14)は、分岐点近傍では、直線(11)の任意の勾配 h 、つまり h_i ($i = 1, 2, \dots$) についても成り立つ。例えば、勾配 h_i と h_j の2本の直線を下ろした場合、式(14)と(15)より、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta u|_{\delta P+h_i \delta u=0}}{\delta u|_{\delta P+h_j \delta u=0}} \right| &= \left| \frac{\eta_j^*}{\eta_i^*} \right| \\ &= \frac{\left(\text{sign}(\delta u) h_j \left| 1 + \frac{h_j}{E} \right|^{1/2} - p \left| 1 + \frac{h_j}{E} \right|^{3/2} \right)^{2/3}}{\left(\text{sign}(\delta u) h_i \left| 1 + \frac{h_i}{E} \right|^{1/2} - p \left| 1 + \frac{h_i}{E} \right|^{3/2} \right)^{2/3}} \quad (20) \end{aligned}$$

が導かれる。3本の直線を下ろせば、それぞれに対する $\delta u|_{\delta P+h \delta u=0}$ から、式(12)と(20)により、定数 p と E 、及びスケールされた初期不整 $q\epsilon$ の値が求まる。

このように h の取り方に任意性があることに着目することにより分岐点 (P_c^0, u_c^0) を決めることを考える。その決定法は一意的ではないが、本論文ではその一例として、4本の直線を用いる方法を提案する。4本の内3本の直線を選ぶ4通りの組み合わせ (h_1, h_2, h_3), (h_2, h_3, h_4), (h_3, h_4, h_1), (h_4, h_1, h_2) それぞれに対して定数 p ($p_i | i = 1, \dots, 4$) の値が求まるが、これらの値は分岐点に対しては理論的には一致するはずである。そこでこれらの値 ($p_i | i = 1, \dots, 4$) の分散が極小となる点として分岐点の位置を定める。

3.2 タイプ B (δu が w と同じオーダーの場合)

定数 g_i と g_j の2本の放物線を下ろした場合、漸近則(19)より、

$$\frac{\delta u|_{\delta P+g_i \delta u^2=0}}{\delta u|_{\delta P+g_j \delta u^2=0}} = \left(\frac{g_j - p^*}{g_i - p^*} \right)^{1/3} \quad (21)$$

が導かれ、式(18)と(21)から、定数 p^* とスケールされた初期不整変数 $q^*\epsilon$ の値が得られる。

ここではタイプ A での方法に準じ、3本の放物線から2本を選ぶ3通りの組み合わせ (g_1, g_2), (g_2, g_3), (g_3, g_1) それぞれに対して得られる定数 p^* ($p_i^* | i = 1, 2, 3$) の分散が極小となる点を分岐点とする方法を用いる。

4. 正六角形状トラスドームへの適用

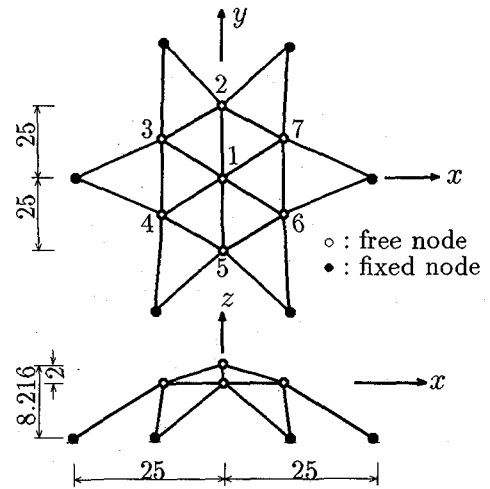


図-1 正六角形状トラスドーム (単位: cm)

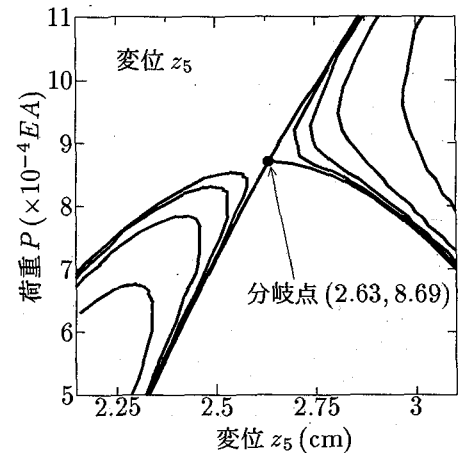
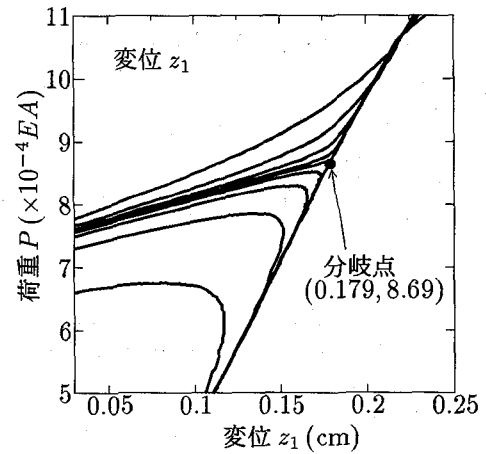


図-2 様々な値の初期不整 ϵ を与えた時の正六角形状トラスドームの荷重-変位曲線

4.1 解析結果

第3章で誘導した分岐点探索法を、図-1に示す正六角形状トラスドームの分岐解析結果に適用する。ドームの各部材は全て同一の弾性定数 E と断面積 A を持つものとする。このドームの中央点1に鉛直 (z 方向) 荷重

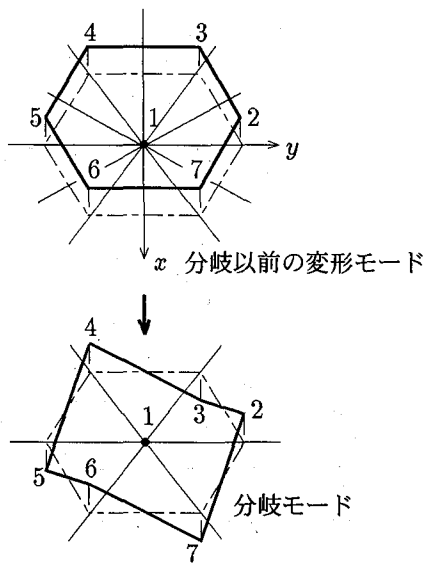


図-3 トラスドームの分岐モードの z 方向成分の模式図

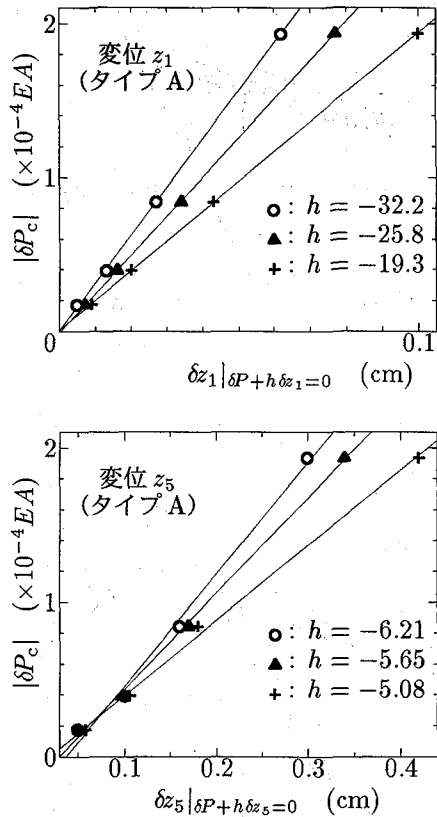


図-4 $\delta z_i |_{\delta P+h\delta z_i=0}$ ($i=1,5$) と $|\delta P_c|$ の相関図

0.5P を、その他の各自由節点に鉛直荷重 P を作用させる場合の有限変位・分岐解析を、文献¹⁸⁾のプログラムを用いて行った。

初期不整として、節点 2, 4, 6 を初期位置から z 方向に高さ $\epsilon = \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.03, \pm 0.1, \pm 0.3$ だけずらした場合に対し解析により得られた荷重-変位曲線を図-2 に

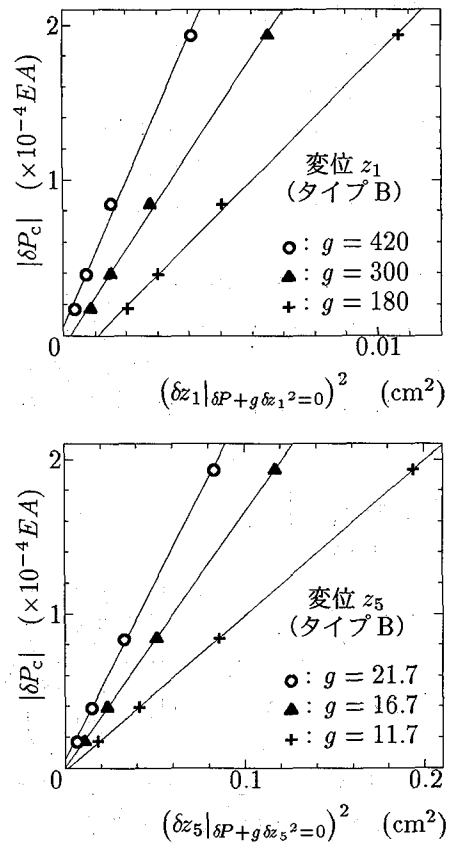


図-5 $(\delta z_i |_{\delta P+g\delta z_i=0})^2$ ($i=1,5$) と $|\delta P_c|$ の相関図

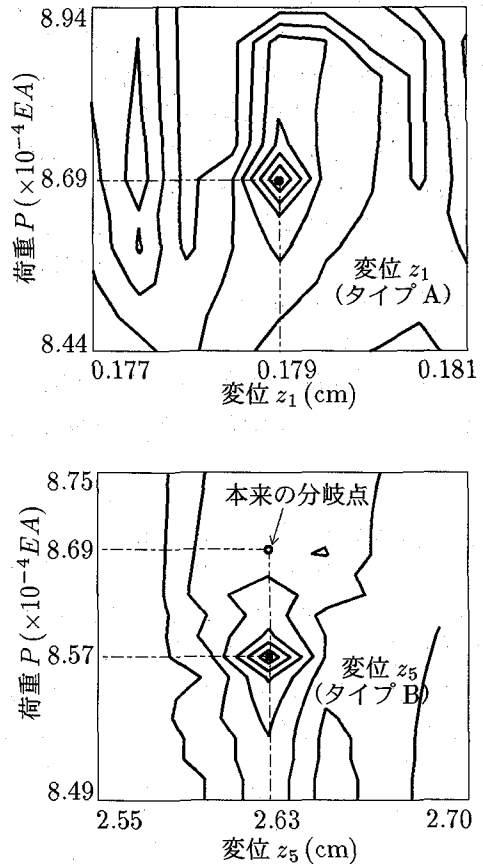


図-6 定数 p の分散 $\text{Var}[p]$ の分布図

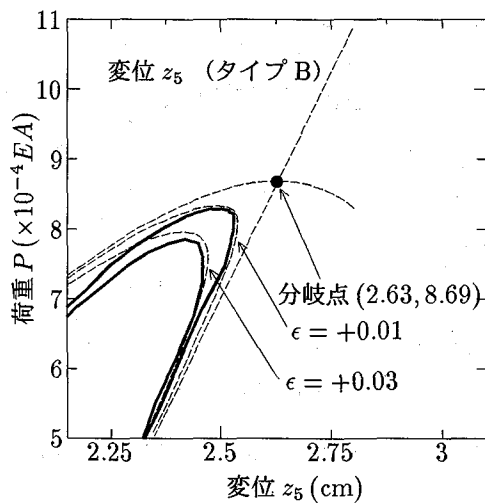
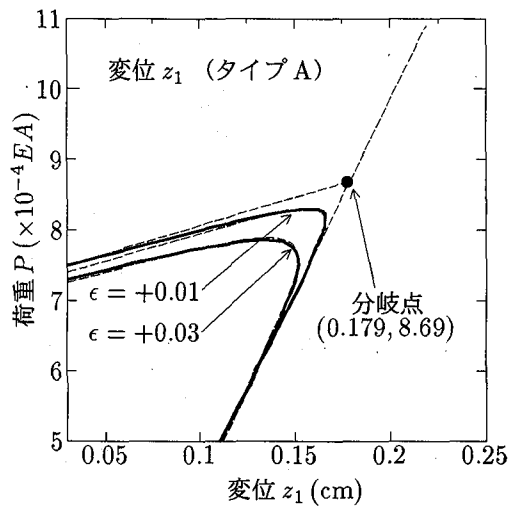


図-7 漸近近似式による解析曲線の近似

示す。図-2の上図は $P-z_1$ 関係、下図は $P-z_5$ 関係である。図中、点(●)は単純対称分岐点の位置を示す。このトラスドームの分岐モード ξ_1 の鉛直方向成分の模式図を図-3に示す。式(8)の変換 $\xi_1 \rightarrow -\xi_1$ に対し、 ξ_1 の z_1 方向成分はゼロであるので不変性を持ち、その他の成分 $z_2 \sim z_7$ はゼロでないので不変性を持たない。このことから、変位 z_1 は第3章での分類のうちタイプAであり、一方変位 z_5 はタイプBであることが分かる。

4.2 漸近則の適用

最初に、式(14)に示すタイプAの漸近則を適用する。図-2の荷重-変位曲線に対して、既知の分岐点から、勾配 h の値を様々に変えて直線 $\delta P + h\delta z_i = 0$ ($i = 1, 5$) を下ろし、その交点での変位 $z_i |_{\delta P + h\delta z_i = 0}$ を求めた。この変位と分岐点での変位 $(z_i)_c^0$ との差

$$\delta z_i |_{\delta P + h\delta z_i = 0} \equiv z_i |_{\delta P + h\delta z_i = 0} - (z_i)_c^0, \quad i = 1, 5$$

と、荷重の極大値 P_c と分岐荷重 P_c^0 との差の絶対値

$$|\delta P_c| \equiv |P_c - P_c^0|$$

との関係を図-4に示す。図中の直線は、原点を通る比例関係を表す、式(14)の漸近則に対応する。

次に、式(19)に示すタイプBの漸近則を適用する。荷重-変位曲線に対して分岐点から、定数 g の値を様々に変えて放物線 $\delta P + g\delta z_i^2 = 0$ ($i = 1, 5$) を下ろし、その交点での変位 $z_i |_{\delta P + g\delta z_i^2 = 0}$ を求めた。この変位と分岐点での変位 $(z_i)_c^0$ との差

$$\delta z_i |_{\delta P + g\delta z_i^2 = 0} \equiv z_i |_{\delta P + g\delta z_i^2 = 0} - (z_i)_c^0, \quad i = 1, 5$$

の2乗と、 $|\delta P_c|$ との関係を図-5に示す。図中の直線は、式(19)のタイプBの漸近則に対応する。

漸近則への適合度(原点を通る直線関係)を比較してみると、変位 z_1 については、タイプAの方が適合が良く、変位 z_5 については、タイプBの方が適合が良いことが分かる。このことは、4.1節で分岐モードの対称性から判断したタイプの判別と合致している。理論的には原点を通るべきであるが、高次項を無視した漸近近似による誤差により、両者とも原点からわずかにずれており、そのずれ量はタイプBの方が大きくなっている。

4.3 分岐点探査法の適用

図-2の荷重-変位曲線に対し、第3章で述べた分岐点探査法を適用し、更に、この曲線を式(9)あるいは、式(16)の漸近近似式により近似する。

4.1節と4.2節で述べた理由により、変位 z_1 の荷重-変位曲線ではタイプAを、変位 z_5 の荷重-変位曲線ではタイプBの方法を用いた。分岐点の位置は既知であるので、探査領域はその近傍とし、 $\epsilon = 0.01$ の曲線について、各点で複数得られた定数 p ($p_i | i = 1, 2, \dots$) の分散 $\text{Var}[p]$ の分布を図-6に示す。上図のタイプAの変位 z_1 については、既知の分岐点で $\text{Var}[p]$ が最小になっている。下図のタイプBの変位 z_5 については、分岐点からややずれた位置で $\text{Var}[p]$ が最小になっている。

探査により得られた各定数は、変位 z_1 については、 $p = 9.62$ 、 $E = 55.3$ 、 $q\epsilon = 0.030$ であった。変位 z_5 については、 $p^* = 9.61$ と $q^*\epsilon = -0.026$ であった。変位 z_5 に対しては E の値は求まらないので、近似曲線の主径路の傾きが解析結果と一致するように、 $E = 13.0$ と定めた。この値を、タイプAの変位 z_1 については式(9)の、タイプBの変位 z_5 については式(16)の漸近近似式に代入し、解析曲線を近似したものが図-7である。ここで、実線は解析曲線を、破線は近似曲線を示す。上図のタイプAについては両曲線は広範囲で非常に良く一致しており、下図のタイプBでも分岐点近傍では良い近似を与えている。このことは、このようにして得られた各定数の値、さらに本手法の妥当性を示すものである。

また、両タイプの近似を比較すると、図-4上図、図-5下図、図-6、図-7と一貫してタイプAの方が精度良

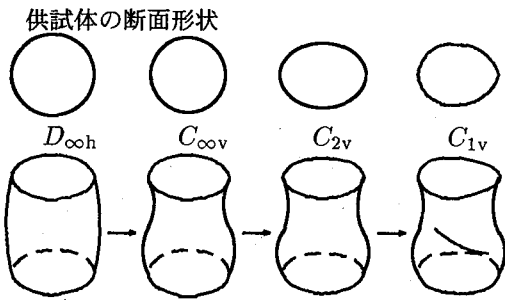


図-8 供試体の変形プロセス

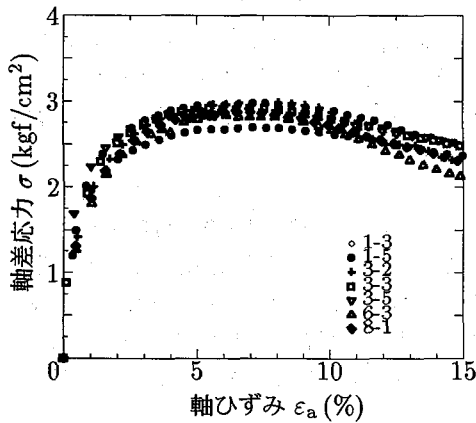


図-9 軸ひずみ-軸差応力曲線 (7ケース)

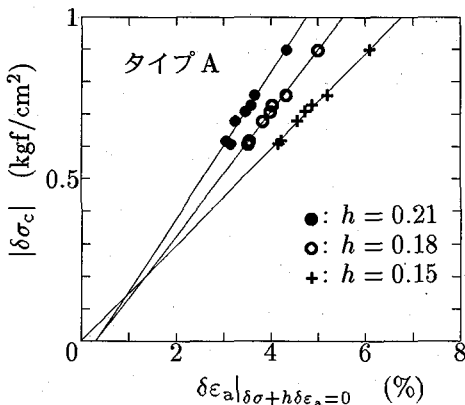


図-10 $\delta\epsilon_a|_{\delta\sigma+h\delta\epsilon_a=0}$ と $|\delta\sigma_c|$ の相関図

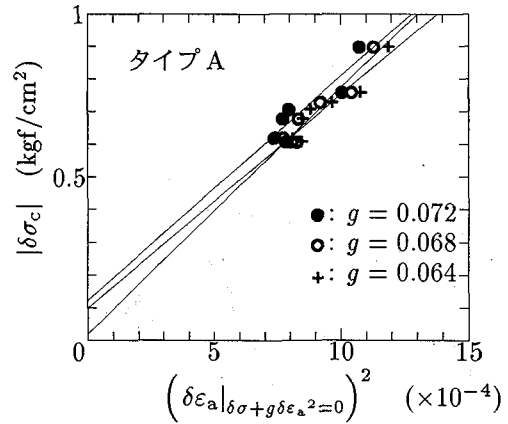


図-11 $(\delta\epsilon_a|_{\delta\sigma+g\delta\epsilon_a^2=0})^2$ と $|\delta\sigma_c|$ の相関図

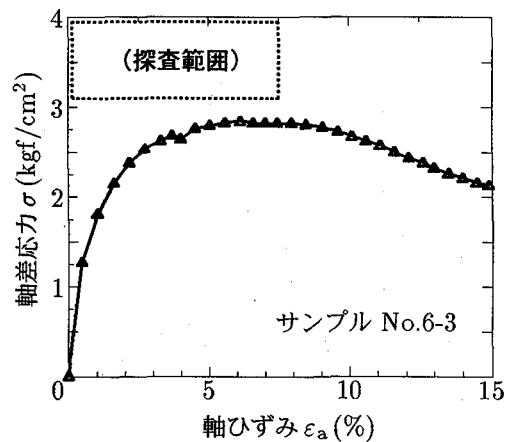


図-12 サンプル No.6-3 の応力-ひずみ曲線と探索領域

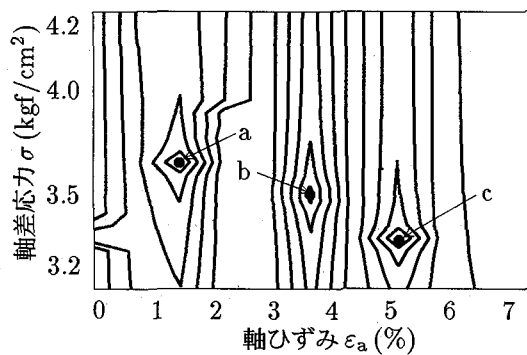


図-13 探索領域内での $\text{Var}[p]$ の分布と分岐点

い近似を与えている。これは、4.2節での考察と同様の傾向であり、対称性があるタイプ A の変位 z_1 の方が精度良く測定できることを示唆するものではないかと思われる。その証明は今後の検討課題である。このように、解析例に対する適用でも誤差が出るのは、本手法で用いる式 (9) と (16) が、初期不整が微小、かつ分岐点の十分な近傍で成り立つ漸近式だからである。

5. 砂の三軸圧縮試験への適用

豊浦標準砂の圧密排水三軸圧縮試験により得られた軸差応力-軸ひずみ曲線に対し、本手法を適用する。第4

章の解析結果と本質的に異なる点は、分岐点の位置が不明であることである。また、位置が不明であるからこそ分岐点探索法がその力を発揮するのである。

砂の供試体のような粒子集合体における大局的な分岐とは、供試体全体の形状の変化等と関わるものである。これは例えば、円柱供試体の場合では、図-8に示すように、供試体がシェルのような座屈を起こすことに対応する (シェルアナロジー)。この種の分岐の理論的な詳細については、文献^{19),20)}を参照。

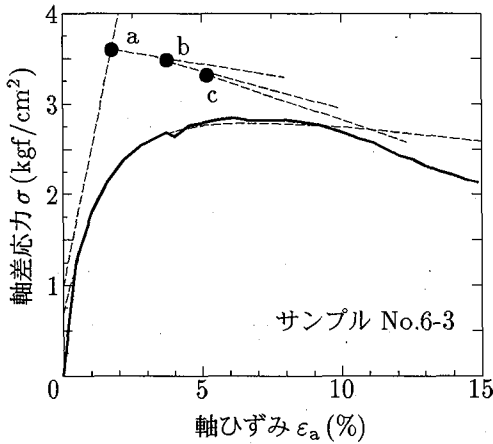


図-14 漸近近似式による実験曲線の近似

5.1 実験結果

供試体作製時に試料を空中落下法により詰め、数層に分けて突固めた。この層の導入は、人為的な初期不整により様々な形態の分岐モードを誘発し、モードによる応力-ひずみ関係の違いを多段階の分岐による形態変化の発現という視点により調べようとしたものである。ただし、この視点は本論文の主旨とは直接関係ないので、その詳細は文献¹⁹⁾に譲ることとする。

供試体寸法は、直径 10 cm、高さ 7 cm であり、間隙比を 0.66 前後になるように管理した。载荷条件はひずみ制御 (ひずみ速度 1.0%/min.) とし、側圧 $\sigma_3 = 1 \text{ kgf/cm}^2$ とした。実験中、供試体の形態変化の過程を注意深く観察し、それを群論的分岐理論による円筒系の低周波変形モードに基づいて分類した²⁰⁾。

本論文ではこのうち、図-8に示すような変形モードの階層的な変化を示した、7ケースの実験結果に着目する。図中の $D_{\infty h}$ 等は対称性を表す群であり、

$$\begin{aligned} D_{\infty h} : & \text{軸対称上下対称} & C_{\infty v} : & \text{軸対称} \\ C_{2v} : & \text{2面対称} & C_{1v} : & \text{1面対称} \end{aligned}$$

という対称性を表す (群の数学的な定義については、文献²⁰⁾を参照)。ここに、 n 面対称とは、鉛直な n 個の面の鏡映に関する不変性と中心軸回りの $2\pi/n$ の回転についての不変性を示す。図-8中の矢印が分岐の発生を表しており、この場合、合計 3 回の分岐を繰返している。図-9に応力-ひずみ曲線を示す。

5.2 漸近則の適用

この 7 ケースの応力-ひずみ曲線の軟化が分岐により発生していることを漸近則により検定する。ここでは、荷重パラメータ P を軸差応力 σ に、変位 u を軸ひずみ ε_a に置き換える。

最初に、タイプ A の漸近則を用いる。ある点を分岐点 $((\varepsilon_a)_c^0, \sigma_c^0)$ と仮定し、その点から図-9の応力-ひずみ曲線に対し、直線 $\delta\sigma + h\delta\varepsilon_a = 0$ を下ろし、その交点における増分ひずみ $\delta\varepsilon_a|_{\delta\sigma+h\delta\varepsilon_a=0}$ を求めた。この増分

ひずみと、応力の極大値に対応する増分応力 $\delta\sigma_c$ との関係性を調べた。この結果、これらの原点を通る直線関係の相関が最も良くなるのは、分岐点の位置が、 $((\varepsilon_a)_c^0, \sigma_c^0) = (2.26, 3.60)$ の時であった。この時の $\delta\varepsilon_a|_{\delta\sigma+h\delta\varepsilon_a=0}$ と $|\delta\sigma_c|$ との相関図を図-10に示す。

次に、タイプ B の漸近則を用いる。ある仮定した分岐点から、図-9の応力-ひずみ曲線に対し、放物線 $\delta\sigma + g\delta\varepsilon_a^2 = 0$ を下ろし、増分ひずみ $\delta\varepsilon_a|_{\delta\sigma+g\delta\varepsilon_a^2=0}$ の 2 乗と、増分応力 $\delta\sigma_c$ との相関を調べた結果、相関が最も良くなる分岐点の位置は、 $((\varepsilon_a)_c^0, \sigma_c^0) = (1.10, 3.40)$ であった。この場合の相関図を図-11に示す。

各タイプとも漸近則との対応は非常に良く、これらの 7 ケースの砂の供試体が分岐現象を起していることを検定できた。各タイプの漸近則への適合度 (原点を通る直線関係) を比較してみると、明らかにタイプ A の方が適合が良いため、砂のせん断試験において観測される変位は、タイプ A の変位であると判断できる。また、このことは、実験で計測される軸ひずみは対称性があるものであるという物理的な考察とも整合している。

5.3 分岐点探査法の適用

ここでは、応力-ひずみ曲線に対し、第 3 章で述べた分岐点探査法を適用し、さらに実験曲線を式 (9) で表される漸近近似式により近似する。

図-12に示すサンプル No.6-3 の応力-ひずみ曲線に対し、同図中の探査領域内で分岐点探査を行った。5.2節で述べたことから、タイプ A の方法を適用することとした。探査領域内の各点での定数 p の分散 $\text{Var}[p]$ の分布を、図-13に示す。同図中の点 (●) で示す 3 点 a, b, c において $\text{Var}[p]$ が極小となっており、これらは分岐点と認められる。各分岐点の位置は、a, b, c それぞれ、 $((\varepsilon_a)_c^0, \sigma_c^0) = (1.75, 3.60), (3.73, 3.50), (5.14, 3.30)$ であった。この 3 つの分岐点の存在は、それぞれ、図-8に示した 3 回の分岐

$$\begin{aligned} \text{分岐点 a: } & D_{\infty h} \rightarrow C_{\infty v} \text{ の分岐プロセス} \\ \text{分岐点 b: } & C_{\infty v} \rightarrow C_{2v} \text{ の分岐プロセス} \\ \text{分岐点 c: } & C_{2v} \rightarrow C_{1v} \text{ の分岐プロセス} \end{aligned}$$

と、一対一に対応しており、この供試体が多段階の分岐を経て対称性を喪失するという実験中の物理的な観察と整合している。

また、各々の分岐点で得られた各定数は、点 a で、 $p = 0.048, q\varepsilon = 1.29, E = 1.50$ 、点 b で、 $p = 0.080, q\varepsilon = 0.76, E = 0.58$ 、点 c で、 $p = 0.087, q\varepsilon = 0.42, E = 0.58$ であった。以上のパラメータを用いると、式 (9) の漸近近似式により、図-14の様に実験曲線を近似できる。図中、実線は実験曲線を、破線は近似曲線を示す。分岐点 a については主径路と分岐径路と不完全系の径路を、分岐点 b, c については分岐径路を示した。両曲線は、分岐点 a の近くでは非常に良く一致しているが、

分岐点から離れるにつれて近似の精度が落ちている。これは、分岐点近傍で良い近似を与えるという、漸近近似式の性質の現れであるだけでなく、供試体の軟化が、分岐点 a から離れた時点では既にその他の分岐点 b, c により支配されていることを示唆するものである。

6. 結論

分岐により強度を支配される構造系の不完全系の荷重-変位曲線と、材料の軟化曲線とは、本質的に同種のものではないかというのが著者等の見解である。完全系の挙動が、構造系に対しては解析により明らかにされているのに対し、材料の軟化曲線については十分明らかになっていないことが、材料の軟化のメカニズムの解明を妨げている。

分岐点探査法を豊浦標準砂の三軸圧縮試験における応力-ひずみ曲線に適用することにより、分岐点の位置を特定した。この分岐点の近傍で、この応力-ひずみ曲線が分岐径路の方向に曲がることにより軟化が起こっている。こうした材料の軟化曲線はかなり広範に存在するが、これらの多くが分岐によるものであるというのが、著者らの仮説であり、このことは軟化挙動を微細な亀裂やすべりの進行により説明する現行の考え方に、

分岐 → 亀裂やすべりの進行 → 破壊

という、分岐が先行する形で材料の軟化や破壊が進行するという新しい考え方を導入することの必要性を訴えるものである。本手法は、材料・構造系の分岐現象の概況を得ようとするものであり、局所的挙動の解明については他の力学的モデルの助けを必要とする。本論文の最後あたり、分岐が引起こす大局的挙動と、破壊力学的な要因による局所的挙動という複数の視点が整合する形で今後の材料研究が展開されることを望む。

謝辞: 砂の三軸圧縮試験に対し、前田記念工学振興財団の御助成をいただきましたことを心から感謝致します。

参考文献

- 1) Poirier, J.-P. (1985): *Creep of Crystals: High-temperature deformation processes in metals, ceramics and minerals*, Cambridge University Press.
- 2) Bai, Y. and Dodd, B. (1992): *Adiabatic Shear Localization — Occurrence, Theories and Applications*. Pergamon.
- 3) Hill, R. and Hutchinson, J.W. (1975): Bifurcation phenomena in the plane tension test, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **23**, 239-264.
- 4) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1936): *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, Tokyo.

- 5) Koiter, W.T. (1945): On the stability of elastic equilibrium, *Ph. D. Dissertation*, Delft, Holland (English translation: NASA Tech. Trans. F10: 833, 1967).
- 6) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. (1973): *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley and Sons, London.
- 7) Bazant, Z.P. and Cedolin, L. (1991): *Stability of Structures*, Oxford.
- 8) Rudnicki, J.W. and Rice, J.R. (1975): Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids* **23**, 239-264.
- 9) Vermeer, P.A. (1982): A simple shear-band analysis using compliances, *IUTAM, Conference on Deformation and Failure of Granular Materials*, 493-499.
- 10) De Borst, R. (1988): Bifurcation in finite element models with non-associated flow law, *Int. J. Numerical Analytical Methods Geomechanics* **12**, 99-116.
- 11) Vardoulakis, I. (1986): Stability and bifurcation in geomaterials, *Numerical Methods in Geomechanics*, Swoboda ed., Balkema, 155-168.
- 12) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I. (1989): General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations* **29**, 41-53.
- 13) Chambon, R., Desrues, J. and Vardoulakis, I. (1993): Localization and bifurcation theory for soils and rocks, *Proceedings of the Third International Workshop on Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks*, Grenoble, France.
- 14) Ikeda, K. and Goto, S. (1993): Imperfection sensitivity for size effect of granular materials, *Soils and Foundations* **33**, 157-170.
- 15) Ikeda, K., Chida, T. and Yanagisawa, E. (1997): Imperfection sensitive strength variation of soil specimens, To appear in *J. Mech. Phys. Solids*.
- 16) Ikeda, K., Maruyama, K., Ishida, H. and Kagawa, S. (1996): Bifurcation in compressive behavior of concrete, To appear in *ACI Structural Journal*.
- 17) Ikeda, K. and Murota, K. (1997): Asymptotic method for bifurcation of symmetric systems, Preprint.
- 18) Nishino, F., Ikeda, K., Sakurai, T. and Hasegawa, A. (1984): A total Lagrangian nonlinear analysis of elastic trusses, *Proc. of JSCE*, No.344/I-1, 39-53.
- 19) Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y. and Yanagisawa, E. (1997): Mode switching and recursive bifurcation in granular materials, To appear in *J. Mech. Phys. Solids*.
- 20) Ikeda, K. and Murota, K. (1996): Recursive bifurcation as sources of complexity in soil shearing behavior, To appear in *Soils and Foundations*.

(1996年9月6日受付)