

有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる円柱供試体の軸対称分岐解析

Axisymmetric Bifurcation Analysis in a Circular Cylinder of a Non-coaxial Cam-clay Model

志比利秀*, 矢富盟祥**

Toshihide SHIBI and Chikayoshi YATOMI

*金沢大学大学院博士課程 地球環境科学専攻 (〒920 金沢市小立野二丁目 40-20)

**Ph.D. 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野二丁目 40-20)

This paper examines the diffuse bifurcation mode of a circular cylinder specimen consisting of a non-coaxial Cam-clay model. The specimen undergoes an axisymmetric deformation by a prescribed velocity with no friction on the ends and a constant lateral hydrostatic pressure on the side. We obtain several bifurcation loads and examine the sites where the slip planes first occur from the maximum shear strain point of view.

Key Words : Bifurcation, Circular Cylinder, Non-coaxial Cam-clay Model

1. はじめに

円柱形正規圧密粘土の供試体を軸方向に低速度で圧縮すると、軸応力の小さいうちは一様に変形するが、最大応力に近づくにつれ、供試体の寸法比により上下対称バルジ型、上下非対称バルジ型、非対称座屈型、またはそれらの合成モードの変形などが現れる。最大応力近傍に達するとせん断ひずみの局所化が観測され、ついには一つのすべり面に発達すると、耐荷力を失い破壊にいたる。また、丁寧に一様な供試体を作成し、偏心がかからぬように注意深く圧縮すると、表面に網目状すべり面群が観察される場合もある。

そこで本報告では、有限変形非共軸 Cam-clay モデル¹⁾を用いた円柱供試体に側方水圧一定条件の下で圧縮および伸張した場合の軸対称変形における、一様な変位場から非一様な変位場への分岐荷重(詳細な定義は後述する)の解析解を誘導し分岐モードと非共軸性との関係や、最大せん断ひずみ分布図より、すべり面の初期発生位置について考察を行なった。

なお、側水圧一定な円柱供試体の軸対称変形の分岐解析に Cheng et al.²⁾と Chau³⁾の報告があるが、Cheng et al.の報告は弾塑性体の場合の分岐条件式に多くの誤りがあり、得られた式の物理的考察は、供試体寸法比などの極限の場合を除いて何も議論されていない。また、Chauの報告では、岩石を意図した非関連流動則、横等方性を含む非常に一般的な構成式の場合で、圧縮変形する場合の分岐条件式が、応力速度ポテンシャルを用いて得られている。しかし、構成式における物質係数が、具体的な関数関係が与えられていない一般的なものであるため、分岐荷重と分岐モードの関係を議論する際、分岐荷重とし

て、軸応力を(弾塑性体では応力の関数である)縦せん断係数(45度せん断係数)で無次元化したものを採用し、更に(一般には応力の関数である)縦せん断係数と単純せん断係数の比を定数とみなし、その値を変えた結果に基づいて考察を行なっている。したがって、分岐荷重と分岐モードの関係として、物理的な意味が不明瞭なものになっている。

本研究の目的は、通常行われている三軸圧縮・伸張試験によって求められた構成式の有効性の検討、さらに大きなスケールでは地層の褶曲から、活断層への遷移過程を定性的かつ定量的に把握せんとするものである。また、本報告で得られた解は厳密解であるため、有限変形弾塑性理論による分岐解析のみならず、厳密解を得るのが難しいひずみの局所化、すべり面の発生に関する大変形有限要素法数値解析の精度の検証や、結果の考察などを行なう上でも非常に有益である。

2. 試験条件

円柱供試体の均一変形状態から非均一変形状態への分岐現象を考え、分岐の生じる瞬間 $t=t^*$ で、図-1のように半径 R 、高さ $2H$ の円柱供試体になったと考える。原点は円柱供試体の中心にあり、 z 軸はその対称軸に一致するような円柱座標 (r, θ, z) を採用する。供試体は、圧縮および伸張試験に対応して、軸方向はそれぞれ変位制御で圧縮あるいは伸張し、側方荷重は水圧一定条件とする。Cauchy 応力 T_{ij} ($i, j=r, \theta, z$)等は引張を正、圧縮を負とするが、ギリシャ文字の全応力 σ_i ($i=r, \theta, z$)、間隙水圧 u 等は土質力学の慣例に従い圧縮を正とする。

まず、Cauchy 応力 T 、有効 Cauchy 応力 T' と間隙水

圧 u の間に有効応力原理が次式で与えられる。

$$T' = T + uI \quad (1)$$

ここで、 I は単位テンソルである。また、前述したように、均一変形状態から非均一変形状態への分岐を対象とするため、分岐の生じる瞬間 $t=t$ までは均一状態が保たれているとし、分岐の瞬間までは有効応力および間隙水圧は均一であるとする。ゆえに、均一軸対称状態の場合、時刻 $t=t$ での全応力は、

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & T_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma'_b & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma'_b & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma'_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u & 0 & 0 \\ 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & -u \end{bmatrix} \quad (2)$$

となる。ここで、 σ'_a ($\sigma'_i|_{z=\pm H}$) は軸方向の有効応力、 σ'_b ($\sigma'_i|_{r=R}$) は側面上の有効応力である。平均有効応力 p' 、応力差 q は次のように定義される。

$$p' = -\frac{1}{3} \text{tr} T' = \frac{2\sigma'_b + \sigma'_a}{3}, \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} S \cdot S} = |\sigma'_a - \sigma'_b| \quad (3)$$

ここに、 S は Cauchy 応力 T の偏差応力である。

なお、本報告では、分岐時における応力差 q と平均有効応力 p' の比 q/p' をもって「分岐荷重」と呼ぶ。粘土、砂質土においては、平均有効応力が大きい程、せん断強度が大きいので、本報告のような均一多軸状態における分岐荷重は軸応力 σ_a や応力差 q でなく、 q/p' が物理的には最も合理的な分岐荷重の定義であると考えている。

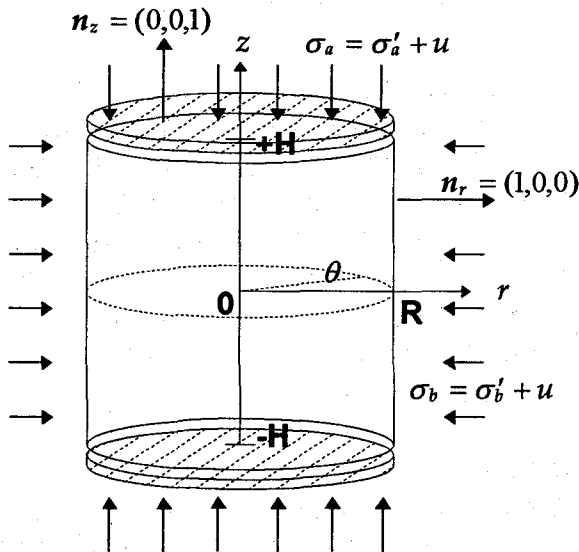


図-1 分岐直前の円柱供試体概形図

3. 有限変形 Cam-clay モデル

有限変形 Cam-clay モデルの構成式を参考文献¹⁾ にならい次式で与える。

$$\begin{aligned} \dot{T}_{ij} = & \left\{ \left(\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \tilde{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\tilde{G} + \tilde{h}} \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{\tau}} S_{ij} - \tilde{K} \tilde{\beta} \delta_{ij} \right) \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{\tau}} S_{kl} - \tilde{K} \tilde{\beta} \delta_{kl} \right) \right\} D_{kl} \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{\beta} = \beta/\sqrt{3}$ 、 $\tilde{\tau} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}/2$ である。 $\dot{T}_{ij}$ は有効 Cauchy 応力の Jaumann rate で、 $\dot{T}' = \dot{T}' - W T' + T' W$ で定義される。また、 D_{ij} は変形速度、 W_{ij} はスピン、 δ_{ij} は Kronecker の記号である。

せん断係数 $\tilde{G}$ および体積弾性係数 $\tilde{K}$ は、ポアソン比 ν 、間隙比 e および膨潤指数 κ を用いて、

$$\tilde{G} = G_0 p', \quad G_0 = \frac{3(1+e)(1-2\nu)}{2\kappa(1+\nu)}$$

$$\tilde{K} = K_0 p', \quad K_0 = \frac{1+e}{\kappa}$$

で与えられ、 β は限界パラメータ M ⁴⁾ と応力比 q/p' を用いて、

$$\beta = M - q/p'$$

で与えられる。 $\tilde{h}$ は、

$$\tilde{h} = \tilde{K} \tilde{\beta}^2 + h$$

で、 h は硬化係数でダイレイタンシー係数 D ⁵⁾ を用いて、

$$h = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{3} D} p'$$

で与えられる。

透水係数を k 、水の密度 $\gamma_w = 1$ とし、位置水頭が無視でき、水圧水頭 u/γ_w のみとすると、間隙水の連続式は、

$$\text{tr}(D) = k \Delta u \quad (5)$$

となる。ここで Δ は微分演算子でラプラシアンである。

均一変形状態から非均一変形状態への分岐問題を対象とするため、分岐の生じる瞬間までは排水条件が存在してもかまわないが、均一状態が保たれているとし、有効応力および間隙水圧は均一に保たれていると考え、 $\Delta u = 0$ となるので式(5)は、

$$\text{tr}(D) = 0 \quad (6)$$

となる。式(6)を考慮すると式(4)は次式となる。

$$\dot{T}_{ij} = 2\tilde{G} D_{ij} - \frac{1}{\tilde{G} + \tilde{h}} \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{\tau}} S_{ik} D_{kl} \right) \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{\tau}} S_{ij} - \tilde{K} \tilde{\beta} \delta_{ij} \right) \quad (7)$$

本報告では、軸対称変形に限定しているため、 $\dot{T}'_{r\theta}$ 、 $\dot{T}'_{z\theta}$ は零であることから、式(6)、(7)は次のように変形できる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}'_{zz} - (\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta})/2 &= 2\mu^* \{ D_{zz} - (D_{rr} + D_{\theta\theta})/2 \} \\ \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu (D_{rr} - D_{\theta\theta}) \\ \dot{T}'_{rz} &= 2\mu D_{rz} \\ D_{rr} + D_{\theta\theta} + D_{zz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 μ^* 、 μ はそれぞれ 45 度せん断におけるせん断係数、単純せん断係数で、次式で与えられる。

$$\mu^* = \frac{\tilde{h} \tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \frac{h_1 \tilde{G}}{h_1 + \tilde{G}} \quad (9)$$

ここで h_1 は第2硬化係数と呼ばれ、非共軸パラメータ A 、平均有効主応力 p' 、さらに $\bar{p}$ を用いて次式で仮定される。

$$h_1 = \frac{\bar{p}}{\sqrt{3}A} p' \quad (>0)$$

ここで、 $A=0$ で共軸モデル、 $A>0$ で非共軸モデルを表す。

現在まで、非共軸性を詳細に検討した定量的実験は、ほとんど見られない。しかし、中空円柱ねじり試験によるその存在、また、存在の必要性を示した研究は、最近精力的に行なわれている^{1) 3)}。なお、本論文でも上記 h_1 は、参考文献¹⁾の表現をそのまま用いるが、後述の解析解には h_1 の具体形は不要である。

結局、均一軸対称変形から分岐瞬間時の有限変形 Cam-clay モデルの構成関係は式(8)、(9)で与えられる。

4. 支配方程式

円柱供試体は、分岐の生じる直前まで均一に変形し、さらにそれ以降の均一変形も次の軸方向変形の増大においても可能な解の一つである。分岐は、もし次の軸方向変形の増大において均一変形とは異なった解、つまり、非均一な変形を示す解が存在するときに生じるとする。

なお、分岐が実際に生じるためには、その時の均一解が不安定となる必要がある。弾性体では、解の唯一性がなくなる時、その均一解は不安定となるが、弾塑性体では、その場合でも均一解が依然安定であることもある。

弾塑性体の場合、この安定性を吟味するためには、負荷、除荷領域を考慮したあらゆる仮想速度場を想定した増分解が必要となる。梁構造などのように、変形が比較的単純な場合は、そのような安定性を吟味することは可能であるが、本報告のような連続体の場合、仮想速度場を特殊なものに限定せず、一般的な仮想速度場を想定した場合の安定性の吟味は非常に難しく、著者らの知る限り、それに関する報告は皆無である。

したがって、本報告での分岐解も、その分岐解へ移行する可能性の範囲内での議論である。しかしながら、現実の物質では、注意深く均一な供試体を作成しても、何らかの初期不整（試験機、偏心荷重や両端摩擦などの不整を含む）が存在するから、均一変形は、不安定的であり、初期不整の性質にもよるが、通常、最小分岐荷重で分岐すると考えることができる。

4.1 増分釣合式

準静的で物体力のない場合を考えると、増分釣合式は次式のようになる。

$$\text{div } \dot{S}_i = 0 \quad (10)$$

ここで、 $\dot{S}_i$ は全公称応力速度であり、Cauchy 応力 T 、速度勾配 L 、変形速度 D を用いて次式で定義される。

$$\dot{S}_i = \dot{T} + T(\text{tr } D) - TL^T \quad (11)$$

ここで、式(1)の有効応力原理を式(11)に代入すると、

$$\dot{S}_i = \dot{T}' + T'(\text{tr } D) - TL'^T - \dot{u}I - u \text{tr}(D) + uL^T \quad (12)$$

となる。分岐の生じる瞬間 $t=t$ までは有効応力および間隙水圧は均一であるとするので、式(6)を用いると、

$$\dot{S}_i = \dot{T}' - TL'^T - \dot{u}I + uL^T \quad (13)$$

となる。増分釣合式は式(13)を $\text{div } L^T = \text{grad}(\text{tr } D) = 0$ 、また有効応力が分岐の瞬間まで均一であることを考慮して、式(10)に代入すると次式となる。

$$\text{div } \dot{T}' - \text{grad } \dot{u} = 0 \quad (14)$$

結局、円柱供試体の軸対称問題の場合、円柱座標 (r, θ, z) を用いると、増分釣合式(14)は、次式のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}'_{rr,r} + \dot{T}'_{zz,z} + (\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta})/r - \dot{u}_{,r} &= 0 \\ \dot{T}'_{rz,r} + \dot{T}'_{zz,z} + \dot{T}'_{rz}/r - \dot{u}_{,z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

4.2 境界条件

図-1 のように境界条件は、円柱供試体の上下端部 ($z = \pm H$) では、摩擦なしで、かつ一定速度 $w_0 (>0)$ による変位制御圧縮あるいは伸張、側面 ($r = R$) では側方水圧一定条件とすると、

$$\left. \begin{aligned} v_z = \mp w_0, (\dot{S}_i)_r &= 0 & : (z = \pm H) \\ (\dot{S}_i)_r = \sigma_b L_{rr}, (\dot{S}_i)_z &= \sigma_b L_{rz} & : (r = R) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

となる。ここで、 $\sigma_b (= \sigma_b + u)$ は側水圧（全応力）である。なお、間隙水の境界条件の内、排水境界条件は式(6)の直前に述べた理由により、非排水境界条件と同様な条件となり、結局、間隙水の境界条件は不要となる。また、 $\dot{S}_i ((\dot{S}_i)_i, i = r, \theta, z)$ は全公称表面力速度であり、全公称応力速度 $\dot{S}_i$ 、各々の面の単位法線ベクトル n を用いて次式で定義される。

$$\dot{S}_i = \dot{S}_i n \quad (17)$$

なお、伸張試験の場合、 v_z は次式で与えられる。

$$v_z = \pm w_0 : (z = \pm H)$$

構成式(8)を増分釣合式(15)に代入したものは、速度勾配に関して線形になっているので、供試体の変形を均一変形と非均一変形から構成されるものと考え、増分境界値問題の解は次のように、均一境界条件と非均一境界条件の解の和となる。

a) 均一境界条件

$$\left. \begin{aligned} v_z = \mp w_0, \dot{T}'_{zz} &= 0 : (z = \pm H) \\ \dot{T}'_{rr} = 0, \dot{T}'_{rz} &= 0 : (r = R) \end{aligned} \right\}$$

b)非均一境界条件

$$\left. \begin{aligned} v_z = 0, \dot{T}_{zz} = 0 & \quad (z = \pm H) \\ \dot{T}_{rr} = \dot{u}, \dot{T}_{rz} = -qv_{rz} & \quad (r = R) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

なお、伸張試験の場合、 $\dot{T}_{rz}$ は次式で与えられる。

$$\dot{T}_{rz} = qv_{rz} \quad (r = R)$$

このとき、均一な変形は増分釣合式、境界条件を自動的に満足するため、求めるべき分岐条件式は増分釣合式(15)と非均一変形に寄与する境界条件より求められる。以下、非均一境界条件をもって境界条件と呼ぶ。以上より分岐の支配方程式は次のようになる。

増分釣合式

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{rr,r} + \dot{T}_{rz,z} + (\dot{T}_{rr} - \dot{T}_{\theta\theta})/r - \dot{u}_{,r} &= 0 \\ \dot{T}_{rz,r} + \dot{T}_{zz,z} + \dot{T}_{rz}/r - \dot{u}_{,z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

境界条件

$$\left. \begin{aligned} v_z = 0, \dot{T}_{zz} = 0 & \quad (z = \pm H) \\ \dot{T}_{rr} = \dot{u}, \dot{T}_{rz} = \mp qv_{rz} & \quad (r = R, - : \text{圧縮}, + : \text{伸張}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

5. 特性方程式による支配方程式の分類

増分釣合式(15)から $\dot{u}$ を消去して式(8)を用いると速度成分の未知関数 v_r, v_z を用いて次式のように変形できる。以下、圧縮試験の場合の式のみを記すが、伸張試験の場合は、 q の代わりに $-q$ と置き換えればよい。

$$\begin{aligned} (2\mu + q) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right\} \right] \\ + 6(\mu^* - \mu) \frac{\partial^3 v_z}{\partial r \partial z^2} + (2\mu - q) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \quad (20) \end{aligned}$$

上下端($z = \pm H$)の境界条件から未知関数 v_r, v_z を次のようにおく。

$$v_r = V_r(r) \sin(kz), v_z = V_z(r) \cos(kz) : k = m\pi/2H \quad (21)$$

(以後、 k は透水係数ではなく、式(21)の第3式の意味で用いることに注意。)また、変形モードを示す整数 m が偶数のとき、 z 座標の原点を H/m だけ移動させる必要がある。また、 $V_r(r), V_z(r)$ は未知関数である。式(8)の第4式を用いて V_z を消去すると、支配方程式は次式のようになる。

$$(aL_4 + 2bk^2 L_2 + ck^4) V_r(r) = 0 \quad (22)$$

ここで、

$$L_2(\cdot) = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r(\cdot)) \right\}, \quad L_4(\cdot) = L_2(L_2(\cdot))$$

とされている。また、

$$a = 2\mu + q, b = -(3\mu^* - \mu), c = 2\mu - q \quad (23)$$

である。

上下端の境界条件は式(21)のようにおけば自動的に満足されるので、以下、側面の境界条件について考える。まず、増分釣合式(15)の第2式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \dot{T}_{zz} + \frac{1}{2} (\dot{T}_{rr} - \dot{T}_{\theta\theta}) - \dot{u} \right\} = \\ - \frac{\partial}{\partial r} \dot{T}_{rz} - \frac{1}{r} \dot{T}_{rz} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\dot{T}_{rr} - \dot{T}_{\theta\theta}) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、式(24)の右辺に式(8)の第2式、第3式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \dot{T}_{zz} + \frac{1}{2} (\dot{T}_{rr} - \dot{T}_{\theta\theta}) - \dot{u} \right\} = -(\mu - \frac{q}{2}) (v_{r,rz} + \frac{1}{r} v_{r,z}) \\ - (\mu + \frac{q}{2}) (v_{z,rr} + \frac{1}{r} v_{z,r}) + \mu (v_{r,rz} - \frac{1}{r} v_{r,z}) \end{aligned} \quad (25)$$

一方、式(8)の第1式および第4式を用いて、

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \dot{T}_{zz} - \frac{1}{2} (\dot{T}_{rr} + \dot{T}_{\theta\theta}) \right\} = 3\mu^* v_{z,zz} \quad (26)$$

であるから、式(25)、(26)より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (\dot{T}_{rr} - \dot{u}) = \mu (v_{r,rz} - \frac{1}{r} v_{r,z}) - 3\mu^* v_{z,zz} \\ - (\mu - \frac{q}{2}) (v_{r,rz} + \frac{1}{r} v_{r,z}) - (\mu + \frac{q}{2}) (v_{z,rr} + \frac{1}{r} v_{z,r}) \end{aligned} \quad (27)$$

となる。よって、側面の境界条件($\dot{T}_{rr} - \dot{u} = 0$)は、次式となる。

$$\begin{aligned} \mu (v_{r,rz} - \frac{1}{r} v_{r,z}) - 3\mu^* v_{z,zz} \\ - (\mu - \frac{q}{2}) (v_{r,rz} + \frac{1}{r} v_{r,z}) - (\mu + \frac{q}{2}) (v_{z,rr} + \frac{1}{r} v_{z,r}) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

また、もう一方の側面の境界条件($\dot{T}_{rz} = -qv_{rz}$)は式(8)の第3式を用いて、 $a \neq 0$ のとき、次式となる

$$v_{r,z} + v_{z,r} = 0 \quad (29)$$

さらに式(8)の第4式、式(21)を用いれば、側面の境界条件式(28)、式(29)は、それぞれ次式のように変形される。

$$\left. \begin{aligned} (2b - a)k^2 \frac{d}{dr} (r V_r) + 4\mu k^2 V_r + a \frac{d}{dr} (r L_2 V_r) = 0 \\ (L_2 + k^2) V_r = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

また、支配方程式(22)は次のように変形できる。

$$(L_2 + k^2 \rho^2)(L_2 + k^2 \bar{\rho}^2) V_r = 0 \quad (31)$$

ここで、 $\rho, \bar{\rho}$ は次式で与えられる。

$$\rho^2, \bar{\rho}^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (32)$$

これは次式のような4次方程式の根である。

$$a\rho^4 - 2b\rho^2 + c = 0 \quad (33)$$

ここで a , b , c は式(23)と同様である。

ゆえに供試体内の応力状態の変化にともない式(33)の実数解の存在個数が異なり、実数解の存在個数が 0, 2 および 4 個に対応して支配方程式(22)はそれぞれ楕円型(E), 放物型(P)および双曲型(H)に分類される。なお、それぞれの領域の判別条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} b^2 - ac > 0, b/a < 0, 2\mu > |q| & \text{EI 領域} \\ b^2 - ac < 0 & \text{EC 領域} \\ b^2 - ac > 0, b/a > 0, 2\mu > |q| & \text{H 領域} \\ 2\mu < |q| & \text{P 領域} \end{aligned}$$

また、支配方程式の分類に基づき、式(22)と v_r すなわち $V_r(r)$ が $r=0$ で有限であることから V_r の一般解は次式のようにになる。

$$V_r = C_1 J_1(\rho kr) + C_2 J_1(\bar{\rho} kr) \quad (34)$$

ここで、 C_1 , C_2 は未定定数で以下 $J_n (n=0,1)$ は第 n 次の第 1 種ベッセル関数を示す。

6. 分岐条件式

分岐条件式は各々の領域で決まる ρ を用いた V_r の一般解を側面境界条件に代入し、非自明な解 $V_r \neq 0$ が存在する条件として得られる。

EC 領域の分岐条件式

式(33)で与えられる 4 つの複素数解 ρ は共役な複素数であり、 ρ を $\rho, \bar{\rho} = P \pm iQ$ とおくと P と Q の間には次の関係式が得られる。

$$P^2 + Q^2 = \sqrt{c/a}, \quad P^2 - Q^2 = b/a \quad (35)$$

また、 V_r は次式のようにになる。

$$V_r = C J_1(\rho kr) + \bar{C} J_1(\bar{\rho} kr) \quad (36)$$

ここで、 C , $\bar{C}$ は共役な複素数の未定定数でそれぞれ $\alpha \pm i\gamma$ とおくと、非自明な解 $\alpha \neq 0$ かつ $\gamma \neq 0$ が存在する条件として、分岐条件式は次式のようにになる (Appendix A)。

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b)\Re[J_1(\rho kr)] + \sqrt{ac-b^2} \Im[J_1(\rho kr)]}{(a-b)\Im[J_1(\rho kr)] - \sqrt{ac-b^2} \Re[J_1(\rho kr)]} \\ & = \frac{a^- Pkr \Re[J_0(\rho kr)] - a^+ Qkr \Im[J_0(\rho kr)] - 4\mu \Re[J_1(\rho kr)]}{a^- Pkr \Im[J_0(\rho kr)] + a^+ Qkr \Re[J_0(\rho kr)] - 4\mu \Im[J_1(\rho kr)]} \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、 $\Re[\dots]$ は $[\dots]$ の実数部分で、 $\Im[\dots]$ は $[\dots]$ の虚数部分である。また、 $a^+ = a + \sqrt{ac}$, $a^- = a - \sqrt{ac}$ である。

H 領域の分岐条件式

式(33)で与えられる 4 つの実数解 ρ について、その正の解を P , Q とおくと、その間には、

$$P^2 + Q^2 = 2b/a, \quad P^2 - Q^2 = 2\sqrt{b^2 - ac}/a \quad (38)$$

の関係式が得られ、 V_r は次式のようにになる。

$$V_r = C_1 J_1(Pkr) + C_2 J_1(Qkr) \quad (39)$$

ここで、 C_1 , C_2 は実数の未定定数で、非自明な解 $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ が存在する条件として、分岐条件式は次式のようにになる。(以下、分岐条件式は EC 領域と同様な方法で得られるので、証明は省略する。)

$$\frac{(1-P^2)J_1(Pkr)}{(1-Q^2)J_1(Qkr)} = \frac{Pkr\{(1+P^2)a-2b\}J_0(Pkr)-4\mu J_1(Pkr)}{Qkr\{(1+Q^2)a-2b\}J_0(Qkr)-4\mu J_1(Qkr)} \quad (40)$$

P 領域の分岐条件式

式(33)で与えられる実数解および虚数解 ρ について、それぞれ P , iQ (P , Q はともに正)とおくと、その間には、次の関係式が得られる。

$$P^2 + Q^2 = 2\sqrt{b^2 - ac}/a, \quad P^2 - Q^2 = 2b/a \quad (41)$$

ただし、伸張試験の場合は次式となる。

$$P^2 + Q^2 = -2\sqrt{b^2 - ac}/a, \quad P^2 - Q^2 = -2b/a$$

また、 V_r は次式のようにになる。

$$V_r = C_1 I_1(Pkr) + C_2 I_1(Qkr) \quad (42)$$

ここで、以下 $I_n (n=1,2)$ は第 n 次の修正ベッセル関数で C_1 , C_2 は実数の未定定数である。上記と同様にして、分岐条件式は次式のようにになる。

$$\frac{(1-P^2)J_1(Pkr)}{(1+Q^2)I_1(Qkr)} = \frac{Pkr\{(1+P^2)a-2b\}J_0(Pkr)-4\mu J_1(Pkr)}{Qkr\{(1-Q^2)a-2b\}I_0(Qkr)-4\mu I_1(Qkr)} \quad (43)$$

EI 領域の分岐条件式

式(33)で与えられる 4 つの虚数解 ρ について、 iP , iQ (P , Q はともに正)とおくと、その間には、

$$P^2 + Q^2 = -2b/a, \quad P^2 - Q^2 = 2\sqrt{b^2 - ac}/a \quad (44)$$

の関係式が得られ、 V_r は次式のようにになる。

$$V_r = C_1 I_1(Pkr) + C_2 I_1(Qkr) \quad (45)$$

ここで、 C_1 , C_2 は実数の未定定数で、上記と同様にして、分岐条件式は次式のようにになる。

$$\frac{(1+P^2)I_1(Pkr)}{(1+Q^2)I_1(Qkr)} = \frac{Pkr\{(1-P^2)a-2b\}I_0(Pkr)-4\mu I_1(Pkr)}{Qkr\{(1-Q^2)a-2b\}I_0(Qkr)-4\mu I_1(Qkr)} \quad (46)$$

7. 分岐荷重の解析結果および考察

本報告においては、梅田層粘土の土質パラメータの値 $\nu = 0.333$, $\kappa = 0.042$, $e = 1.5$, $D = 0.053$, $M = 1.43$ を用

いる⁶⁾。また、非共軸パラメータ A の値に関しては参考文献¹⁾ の考察にならない $A=0.01$ を用いる。したがって、 $A=0.01$ とする本報告は、試行的なものであるが、いずれにしても非共軸項がない共軸モデルでは、実際現象を説明できない実例が多々あることが分かってきている。本報告でも、その例を後で示す。

式(37), (40), (43), (46)の分岐条件式を解析することにより、円柱供試体の軸対称変形における各変形モードにおける分岐荷重について考察する。分岐条件式は分岐荷重 q/p' 、分岐時の供試体寸法比 R/H 、変形モード m 、非共軸パラメータ A の陰関数で与えられるので、変形モードと非共軸パラメータを与えることにより、分岐条件式から「分岐荷重」と「分岐時の供試体寸法比」の関係を求めることができる。ただし、得られた関係は各供試体寸法比に対して、EC, H, P の全ての領域から最も低い分岐荷重を採用している。

図-2 に圧縮試験における非共軸 Cam-clay モデルの軸対称型 1,2,4,10 次変形モードにおける「分岐荷重」と「分岐時の供試体寸法比」の関係を示す。

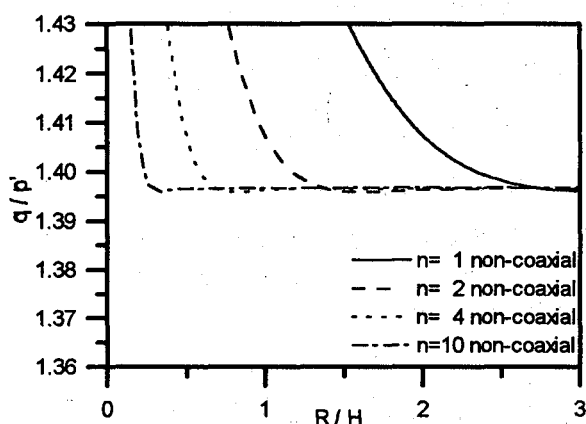


図-2 分岐荷重とモードおよび寸法比の関係 (圧縮試験)

弾性体梁の座屈問題では、普通、高次の分岐荷重が低次の分岐荷重より大きいですが、ここでは低次のモードの分岐荷重が高次のモードのそれより必ずしも小さくないことが分かる。また、各モードの分岐荷重は供試体の R/H が大きくなるにしたがって、ほぼ一定値 $q/p' \approx 1.397$ となることがわかる。このことから、様々な分岐モードが、ほぼ同一な分岐荷重で生じることや、モードの移り変わり、重ね合わせが生じる可能性を説明できる。また、実際現象において、円柱供試体の圧縮試験では、 $m=2$ である軸対称のバルジのような変形がしばしば見られるが、本解析解においては、共軸モデルでは、いかなる供試体寸法比においても分岐荷重が存在しなかった。このことは、共軸モデルは、主応力方向の急激な変化に変形速度の応答が鈍感である特性を反映しており、共軸モデルの非現実性を示している。金属における弾塑性座屈でも共軸モデルによる座屈荷重が実験値より、はるかに大きく

なり種々の非共軸モデルが提案されている⁷⁾。

また、非共軸モデルにおいても、細長い供試体の分岐荷重は存在しないが、細長い場合は、非軸対称の分岐荷重が最低値になると考えるのが自然である。非軸対称の分岐解析の結果は別に報告する⁸⁾。

次に図-3 に伸張試験における共軸モデルの軸対称型 1,2 次変形モードと非共軸モデルの軸対称型 1,2,10 次変形モードにおける「分岐荷重」と「分岐時の供試体寸法比」の関係を示す。

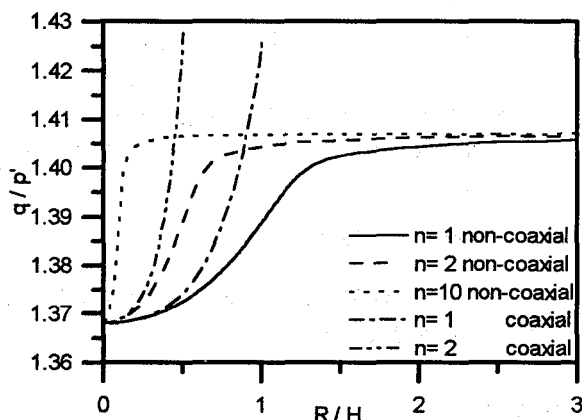


図-3 分岐荷重とモードおよび寸法比の関係 (伸張試験)

圧縮試験の場合、共軸モデルでは、いかなる供試体寸法比においても分岐荷重が存在しなかったが、伸張試験の場合は R/H の単調増加関数となる分岐荷重が存在している。しかし、同一モードの分岐荷重は、共軸モデルの場合より、非共軸モデル場合の分岐荷重が低い。このことから非共軸項の存在は分岐の促進をもたらすことがわかる。

また細長い供試体の伸張試験の場合は、圧縮試験の場合と異なり、非軸対称モードにはならず、ほとんどの場合、初期の非均一変形として、一部がくびれる「低次の軸対称モード」が観察される。伸張 (図-3) の場合は圧縮 (図-2) の場合と異なり、細長い場合は低次のモードの分岐荷重が小さいことから、本解析結果は、この現象をうまく説明している。

8. 最大せん断ひずみ

初期において長さ ℓ_0 の部分が分岐直前には ℓ になり分岐直後には $\ell + \Delta\ell$ になったとする。ただし、 $\Delta\ell$ の大きさは不定であり、物体各点においては相対的な大きさの比較のみに意味があることに注意。 D_{rr} 等も同様である (Appendix B)。

分岐後の主対数ひずみは、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \ln \frac{\ell + \Delta\ell}{\ell_0} \\ &= \ln \frac{\ell}{\ell_0} + \ln \left(1 + \frac{\Delta\ell}{\ell} \right) \end{aligned}$$

となる．上式は， $x \ll 1$ なら $\ln(1+x) \approx x$ であるから， $\Delta\ell/\ell \ll 1$ のとき， ε は次式で近似できるので，

$$\varepsilon \approx \ln \frac{\ell}{\ell_0} + \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad (47)$$

となる．式(47)より，分岐直前の一様ひずみ $(\varepsilon)_t$ と変形速度を用いて表すと，

$$\varepsilon_{ii} \approx (\varepsilon_{ii})_t + D_{ii} \Delta t \quad (i: \text{no sum}) \quad (48)$$

また，分岐直前のせん断ひずみが零であることより，

$$\varepsilon_{ij} \approx D_{ij} \Delta t \quad (i \neq j) \quad (49)$$

となる．ここで， ε_{ij} の主値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$) とおき，最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ を次式のように定義する．

$$\Gamma_{\max} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} \quad (50)$$

9. 最大せん断ひずみの解析結果および考察

圧縮試験における非共軸 Cam-clay モデル円柱供試体の軸対称変形場における最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の分布を式(50)より求め，各変形モードにおけるすべり面の発生位置について考察する．通常，粘土のすべり面は，破壊力学の用語で言えばモードⅡ型またはモードⅢ型（せん断型）の進行性破壊であるので，ここでは，上記の最大せん断ひずみが最大となる点がすべり面が最も発生しやすい位置と仮定して議論する．軸対称変形を考えているので， θ が一定で切り取られる面を考えている．図-4 から図-6 は，横軸に半径方向 r ($0 \leq r \leq R$)，縦軸に供試体高さ方向 z ($-H \leq z \leq H$) をとる．また，各々の供試体は $H=1$ とした．(a) は最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の分布図で，色の濃い部分で最大せん断ひずみが大きく，薄い部分で小さいことを示している．(b) は分岐時の変形図である．なお変形図は分岐時の非均一解による変形のみを表しており，実際の変形図は，すべての領域で負荷となる自明な均一解の変形を加える必要がある．

図-4 は $m=1, R/H=2$ の場合である．変形モード概形は図-4(b)に示すような上端が細くなり下端が太くなるような1次モードを考える．分岐荷重 q/p' は分岐方程式(37)より $q/p' \approx 1.407$ となる．これらを用いて最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の分布，図-4(a)を求めた．

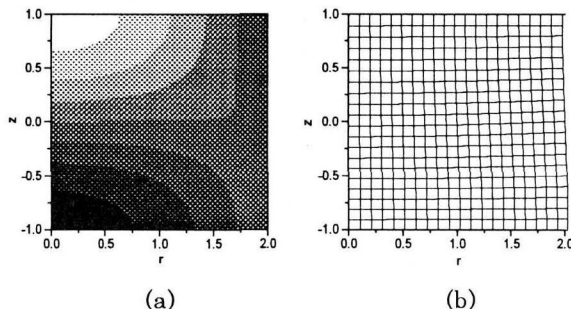


図-4 最大せん断ひずみ図および分岐時変形図

図-4(a)より，図-4(b)のような上端が細くなり下端が太くなるような1次の変形モードの場合，最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ は下端の中央において最大となることがわかる．ゆえにこのような供試体寸法比，変形モードの場合，下端の中央から最もすべり面が発生しやすいと考えられる．

図-5 は $m=2, R/H=2$ の場合である．変形モード概形は図-5(b)に示すような一般にバルジと呼ばれるような中央部が膨らむ2次モードを考える．分岐荷重 q/p' は分岐方程式(37)より $q/p' \approx 1.396$ となる．これらを用いて最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の分布，図-5(a)を求めた．

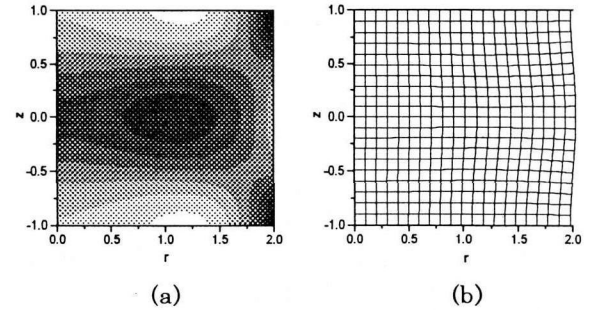


図-5 最大せん断ひずみ図および分岐時変形図

図-5(a)では，最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の最大は側面の上下端近傍となっている．したがって，図-5(b)のような供試体寸法比 $R/H=2$ のときの2次の軸対称のバルジの変形モードの場合，側面の上下端から最もすべり面が発生しやすいと考えられる．

図-6 は $m=2, R/H=1$ の場合である．変形モード概形は図-6(b)に示すような2次モードを考える．分岐荷重 q/p' は分岐方程式(37)より $q/p' \approx 1.407$ となる．これらを用いて最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ の分布図-6(a)を求めた．

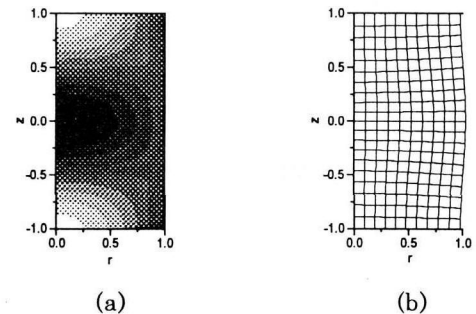


図-6 最大せん断ひずみ図および分岐時変形図

図-6(a)より，図-6(b)のような供試体寸法比 $R/H=1$ のときの2次の軸対称のバルジの変形モードの場合，最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ は供試体中央において最大となることがわかる．ゆえにこのような供試体寸法比，変形モードの場合，供試体中央から最もすべり面が発生しやすいと考えられる．

これらの結果より最大せん断ひずみ $\Gamma_{\max}$ が最大になる位置は，変形モードおよび供試体寸法比等の違いにより異なっていることが分かる．

ただし，実際には，はじめに述べたように，すべり面

は、何らかの非均一（分岐モード）変形後、「非軸対称」的に進行するのが普通であるから、以上の議論は、仮に初期に「軸対称・拡散分岐モード（Diffuse bifurcation mode）」の出現した場合に限って、速度勾配により定義した「最大せん断ひずみ」の概念を使って、初期すべり面の発生源となる可能性の高い位置を考察したものである。例えば、本解析解で高次のモードの分岐荷重が低次のそれと、ほとんど変わらない結果が得られたが、はじめに述べた網目状のすべり面群の発生を説明するには、非軸対称のせん断ひずみ分布が得られる「非軸対称分岐モード」の解析が必要となる。

なお、すべり面発生の考察として、双曲型または放物型における速度勾配の不連続面で定義される「せん断帯モード（Shear band mode）」発生の必要条件に基づいた議論も、数多く行なわれているが、その条件では、せん断帯モードとしてのすべり面の発生する応力状態やその方向は議論できるが、境界条件に無関係な局所的な理論であるため、本分岐解のように、特定の供試体形状におけるすべり面の発生位置までは議論できない。

10. おわりに

本報告では、円柱供試体の変形を軸対称変形に限定し、有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる分岐解析を行うことにより、まず、分岐条件式の解析解を求め、分岐荷重と変形モードとの関係を議論した。次に最大せん断ひずみの分布を求めることにより、すべり面の発生位置について考察した。なお、これらの結論は円柱供試体の変形を軸対称に限定した結果によるものである。実際のすべり面の発生形態は非軸対称変形の考察も重要となるので、それについては別に報告する⁸⁾。

Appendix A

式(37)を誘導する。

EC領域の速度場の一般解は式(36)である。

$$V_r = C J_1(\rho k r) + \bar{C} J_1(\bar{\rho} k r) \quad (36)$$

ただし、 $\rho, \bar{\rho} = P \pm iQ$ で与えられる。ここで、 P と Q の間には、式(35)の関係がある。式(36)より、

$$\begin{aligned} L_2 V_r &= C L_2 \{J_1(\rho k r)\} + \bar{C} L_2 \{J_1(\bar{\rho} k r)\} \\ &= -\rho^2 k^2 C J_1(\rho k r) - \bar{\rho}^2 k^2 \bar{C} J_1(\bar{\rho} k r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r V_r) &= C \frac{d}{dr} \{r J_1(\rho k r)\} + \bar{C} \frac{d}{dr} \{r J_1(\bar{\rho} k r)\} \\ &= C \rho k r J_0(\rho k r) + \bar{C} \bar{\rho} k r J_0(\bar{\rho} k r), \end{aligned}$$

であることを考慮に入れて式(30)の第1式に代入すると、

$$\begin{aligned} (2b - a(1 + \rho^2)) C \rho k r J_0(\rho k r) + (2b - a(1 + \bar{\rho}^2)) \bar{C} \bar{\rho} k r J_0(\bar{\rho} k r) \\ + 4\mu \{C J_1(\rho k r) + \bar{C} J_1(\bar{\rho} k r)\} = 0 \end{aligned} \quad (a-1)$$

となる。また式(30)の第2式は、

$$(1 - \rho^2) C J_1(\rho k r) + (1 - \bar{\rho}^2) \bar{C} J_1(\bar{\rho} k r) = 0 \quad (a-2)$$

となる。

複素数の未定定数 $C, \bar{C}$ を $C, \bar{C} = \alpha \pm i\gamma$ (α, γ は実数の定数) とおき、式(a-1)(a-2)は境界 $r = R$ で成り立つことから、式(a-1)は、

$$\begin{aligned} &[(a - 2b + a\rho^2) \rho k R J_0(\rho k R) + (a - 2b + a\bar{\rho}^2) \bar{\rho} k R J_0(\bar{\rho} k R) \\ &\quad - 4\mu \{J_1(\rho k R) + J_1(\bar{\rho} k R)\}] \alpha \\ &+ [(a - 2b + a\rho^2) \rho k R J_0(\rho k R) - (a - 2b + a\bar{\rho}^2) \bar{\rho} k R J_0(\bar{\rho} k R) \\ &\quad - 4\mu \{J_1(\rho k R) - J_1(\bar{\rho} k R)\}] i\gamma = 0 \end{aligned}$$

上式を変形して、

$$\begin{aligned} &[(\xi + i\zeta)(P + iQ) k R J_0(\rho k R) + (\xi - i\zeta)(P - iQ) k R J_0(\bar{\rho} k R) \\ &\quad - 4\mu \{J_1(\rho k R) + J_1(\bar{\rho} k R)\}] \alpha \\ &+ [(\xi + i\zeta)(P + iQ) k R J_0(\rho k R) - (\xi - i\zeta)(P - iQ) k R J_0(\bar{\rho} k R) \\ &\quad - 4\mu \{J_1(\rho k R) - J_1(\bar{\rho} k R)\}] i\gamma = 0 \end{aligned}$$

ただし、

$$\xi = a(1 + P^2 - Q^2) - 2b(a - b), \quad \zeta = 2aPQ (= \sqrt{ac - b^2})$$

さらに式の簡略化のために文字を置き換えて、

$$\begin{aligned} &[C' k R J_0(\rho k R) + \bar{C}' k R J_0(\bar{\rho} k R) - 4\mu \{J_1(\rho k R) + J_1(\bar{\rho} k R)\}] \alpha \\ &+ [C' k R J_0(\rho k R) - \bar{C}' k R J_0(\bar{\rho} k R) - 4\mu \{J_1(\rho k R) - J_1(\bar{\rho} k R)\}] i\gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここで、

$$C' = P\xi - Q\zeta + i(P\zeta + Q\xi) (= a^- P + i a^+ Q)$$

$$\bar{C}' = P\xi - Q\zeta - i(P\zeta + Q\xi) (= a^- P - i a^+ Q)$$

$$a^+ = a + \sqrt{ac}, \quad a^- = a - \sqrt{ac}$$

$J_n(\rho k R), J_n(\bar{\rho} k R)$ は共役な複素数であるから、

$$J_n(\rho k R) + J_n(\bar{\rho} k R) = 2 \Re[J_n(\rho k R)]$$

$$J_n(\rho k R) - J_n(\bar{\rho} k R) = 2i \Im[J_n(\rho k R)]$$

となるので、

$$\begin{aligned} &[a^- P k R \Re[J_0(\rho k R)] - a^+ Q k R \Im[J_0(\rho k R)] - 4\mu \Re[J_1(\rho k R)]] \alpha \\ &- [a^- P k R \Im[J_0(\rho k R)] + a^+ Q k R \Re[J_0(\rho k R)] - 4\mu \Im[J_1(\rho k R)]] \gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (a-3)$$

となる。また式(a-2)は、

$$\begin{aligned} &[(1 - \rho^2) J_1(\rho k R) + (1 - \bar{\rho}^2) J_1(\bar{\rho} k R)] \alpha \\ &+ [(1 - \rho^2) J_1(\rho k R) - (1 - \bar{\rho}^2) J_1(\bar{\rho} k R)] i\gamma = 0 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} & \left[(1 - (P^2 - Q^2)) \Re[J_1(\rho k R)] + 2PQ \Im[J_1(\rho k R)] \right] \alpha \\ & - \left[(1 - (P^2 - Q^2)) \Im[J_1(\rho k R)] - 2PQ \Re[J_1(\rho k R)] \right] \gamma = 0 \end{aligned}$$

最終的には,

$$\begin{aligned} & \left[(a-b) \Re[J_1(\rho k R)] + \sqrt{ac-b^2} \Im[J_1(\rho k R)] \right] \alpha \\ & - \left[(a-b) \Im[J_1(\rho k R)] - \sqrt{ac-b^2} \Re[J_1(\rho k R)] \right] \gamma = 0 \quad (a-4) \end{aligned}$$

となる. 式(a-3),(a-4)より, 非自明な解($\alpha \neq 0$ かつ $\gamma \neq 0$)が存在するための条件として, EC領域の分岐条件式

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b) \Re[J_1(\rho k R)] + \sqrt{ac-b^2} \Im[J_1(\rho k R)]}{(a-b) \Im[J_1(\rho k R)] - \sqrt{ac-b^2} \Re[J_1(\rho k R)]} \\ & = \frac{a^- P k R \Re[J_0(\rho k R)] - a^+ Q k R \Im[J_0(\rho k R)] - 4\mu \Re[J_1(\rho k R)]}{a^- P k R \Im[J_0(\rho k R)] + a^+ Q k R \Re[J_0(\rho k R)] - 4\mu \Im[J_1(\rho k R)]} \quad (37) \end{aligned}$$

が得られる.

Appendix B

例えば, EC領域における速度場は式(36)のようにおける.

$$V_r = C J_1(\rho k r) + \bar{C} J_1(\bar{\rho} k r) \quad (36)$$

ここで, C , $\bar{C}$ は共役な複素数の未定定数でそれぞれ $\alpha \pm i\gamma$ とおける. 分岐条件式からは式(a-3),(a-4)から分かるように, 未定定数 α , γ の比しか求まらず値そのものは不定である. その結果, 速度場から求まる変形速度, ひいては Δl の値そのものは不定となる.

参考文献

- 1) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I. : General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, Soils and foundations, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 2) Cheng, S. Y., Ariaratnam, S. T., and Dubey, R. N. : Axisymmetric bifurcation in a Elastic-Plastic cylinder under axial load and lateral hydrostatic, Quart. Appl. Math., Vol.29, pp.41-51, 1971.
- 3) Chau, K. T. : Non-normality and bifurcation in a compressible pressure-sensitive circular cylinder under tension and compression, Int. J. Soils. Struct., Vol.29, pp. 801-824, 1992.
- 4) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A. : Yielding of clays in states wetter than critical, Geotechnique, Vol. 13, pp. 211-240, 1963.
- 5) Ohta, H. : Analysis of deformations of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankments, Doctor Engineering Thesis, Kyoto Univ., 1971.
- 6) Sekiguchi, H. : Rheological characteristics of clays, Proc. 9th ICSFME, Tokyo, Vol.1, pp.289-291, 1977.
- 7) 例えば, 北川 浩 : 弾・塑性力学—非線形解析のための基礎理論—, 裳華房, 1987.
- 8) 志比利秀・矢富盟祥 : 有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる円柱供試体の非軸対称分岐解析, 土木学会第51回年次学術講演会講演概要集 3-A, pp.492-493, 1996.

(1996年9月6日受付)