

改良粒状要素法による粒状体の弾塑性挙動の研究

STUDY ON ELASTOPLASTIC BEHAVIOR OF GRANULAR MODEL
BY MEANS OF IMPROVED GRANULAR ELEMENT METHOD

武 建勲*, 岸野佑次**, 京谷孝史***

Jianxun WU, Yuji KISHINO, Takasi KYOYA and Hideo ASANUMA

*工修 東北大学大学院 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**工博 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

***工博 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (同 上)

The purpose of this paper is to propose an improved simulation method for granular model analyses and to present its application to the study on elasto-plastic behavior of granular materials. The algorithm of the new method proposed in this paper includes a simplified inversion method of global stiffness matrix and a Newton-Raphson scheme to save the computational time. A series of probe tests which enables us to differentiate between elastic and plastic incremental strains were performed on intermediate data obtained from several bi-axial simulation tests. The obtained results suggest within a certain limit that the validity of assumptions made in the plasticity analyses of the granular materials; the superposition of elastic and plastic strain increments, the non-associated flow rule, the hardening rule and the induced anisotropy. Further, it is found that the sudden large deformations occur at critical points whose stress ratio have a common value for various loading directions. As shown in this paper, the proposed method is especially effective to achieve stress-controlled tests of granular models in comparison with other conventional methods.

Key words : granular materials, granular element method, probe test, elastoplasticity

1. はじめに

地盤材料の合理的な構成則はマイクロメカニックス的なアプローチにより得られると考えられるが、実際の材料についてこのようなアプローチを実施することは非常に困難なことである。そこで、まず粒状体モデルのように単純化されたモデルによって構成則の定式化を行う方法が考えられる。例えば、Newland & Alley¹⁾ や Rowe²⁾らのモデルは限定された条件下においては有用なモデルとなっている。しかし、より一般的な力学特性を抽出するためには、数値シミュレーションによるモデル実験を行うことが有効であると考えられる。

Cundall³⁾によって提案された個別要素法 (DEM) をこのような目的に用いることは従来より種々行われてきた。Bardet⁴⁾は種々の構成則理論の粒状体への適応性の検討を個別要素法シミュレーションを用いて行い、弾塑性理論以外の理論の適用が必要となる証拠を見出すことはできなかったという一応の結論を得た。しかし、Bardetの行ったシミュレーション解析においては応力制御が必ずしも十分な精度をもって行われていないため、流動則にばらつきが見られ、より精度の高い検証が望まれるところである。

一方、粒状要素法^{5,6,7)} (GEM) は著者の一人が主として粒状体の静的な性質を調べるために提案した数値シミュ

レーション法であり、剛体円粒子や粒子間バネなどを用いる点は DEM と同様である。DEM と GEM の主な相違は、前者が差分法により粒子の運動を追跡するのに対して、GEM は粒子集合の境界に与えるひずみ増分および各粒子の変位および回転の増分を未知量とする接線剛性行列をもとに粒状体の変形増分を求める点にある。本文においては、粒状体の弾塑性挙動を詳細に調べるために、改良した粒状要素法を用いている。

粒状要素法を粒子数の多い粒子集合体に適用する際に問題となるのは次数の多い行列の逆行列を求めることが困難になることと、粒子間すべりや粒子の接触離反に起因する高次の非線形性を解析するための逐次解析に膨大なメモリー領域と解析時間を要することにある。そこで、本文においては、逆行列を求める代わりに簡易な柔性行列を算定し、かつこの柔性行列の逐次計算における改訂を最小限に止める Newton-Raphson 法の応用について述べる。この新しい方法を用いて Bardet の行った検討と同様の検討を精度良く行い、弾塑性挙動について考察する。

2. 粒状要素法の概要とその改良

ここで本研究で用いる解析方法の概要について示す。

2.1 境界粒子

図-1 に示すように粒状体モデルは 2 次元円粒子集合体

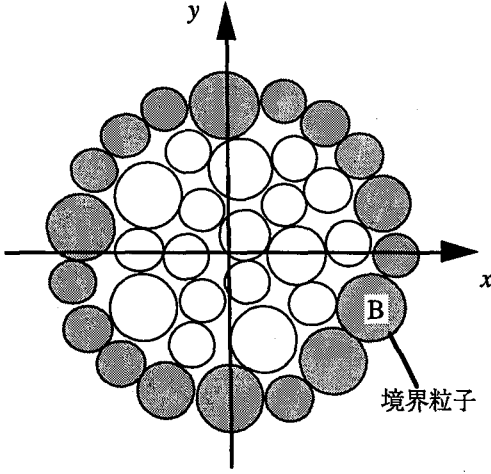


図-1 要素試験概念図

とし、図に網掛で示した円が境界粒子で、網掛のない円が内部粒子である。

境界粒子はモデルの応力やひずみを制御するために必要となり、体積（平面モデルの面積）の計算などを行うためにも用いられる。境界粒子の回転は拘束し、境界粒子同士の力学的な相互作用は考慮しないこととする。

粒状体モデルに対称な変位勾配を与える場合、各境界粒子は次式で定められる位置に移動することになる。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (1)$$

ここに、

B：境界粒子

X_0, Y_0 ：境界粒子の初期状態の中心の座標

X, Y ：境界粒子の変形後の中心の座標

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ：モデルに与える変位勾配

である。

モデルの応力は各境界粒子に内部粒子から作用する接触力を基に次式で定義される⁹⁾。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{A_0} \sum_B \begin{bmatrix} p_x X_0 & p_x Y_0 \\ p_y X_0 & p_y Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (2)$$

ここに、

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ ：第1 Piola-Kirchhoff 応力

p_x, p_y ：境界粒子と内部粒子の間の接触力

A_0 ：境界粒子に囲まれた面積

であり、 $\sum_B$ は全ての境界粒子に内部粒子から作用する全ての接触力について和をとることを意味する。

式(1)、(2)は粒子集合体が理想的に一樣な応力状態および一樣な変形状態にあると想定して定めた式である。

2.2 要素剛性行列

DEMと同様に粒子は剛体円粒子とし、粒子間には重なりを許すこととする。図-2において、着目する粒子Gとこれに接する別の粒子G'との接触点をCとし、両粒子の重心間距離の変化を相対変位と呼ぶ。相対変位の法線および接線方向成分を u_n および u_t 、G 粒子に作用する接

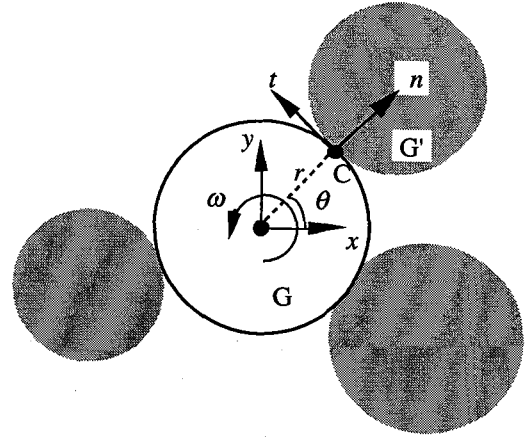


図-2 粒子接触点における局所座標系

触力の法線および接線方向成分を p_n および p_t とおくと、相対変位増分ベクトル $\Delta U_C = (\Delta u_n, \Delta u_t)_C^t$ および接触力増分ベクトル $\Delta P_C = (\Delta p_n, \Delta p_t)_C^t$ の間には次式が成立すると仮定する。

$$\Delta P_C = S_C \Delta U_C \quad (3)$$

ここに、

$$S_C = \begin{bmatrix} c_n & 0 \\ 0 & c_t \end{bmatrix} \quad (4)$$

はC点における接触剛性行列である。

また、2粒子間にはCoulombの摩擦則

$$|p_t| \leq p_n \tan \phi \quad (5)$$

(ϕ は粒子間摩擦角)が成り立つと仮定する。さらに、粒子間力は接触している場合にのみ働くものとし、圧縮を正として次式を仮定する。

$$p_n \geq 0 \quad (6)$$

以上のような粒子間力学特性、およびG粒子に働く接触力の符号を模式的に示せば、図-3のようになる。

図-2の2粒子について、もしG'粒子を固定してG粒子のみを移動させるとき、G粒子の重心の並行移動増分 $\Delta u_x, \Delta u_y$ と粒子回転増分 $\Delta \omega$ よりなる変位増分ベクトル ΔU_G と、G粒子に加える力とモーメントよりなる付加力ベクトル ΔF_{GG}^C の間には次式が成立する。

$$\Delta F_{GG}^C = S_{GG}^C \Delta U_G \quad (7)$$

ここに、

$$S_{GG}^C = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}_{GG}^C \quad (8)$$

$$s_{11} = c_n \cos^2 \theta + c_t \sin^2 \theta$$

$$s_{22} = c_n \sin^2 \theta + c_t \cos^2 \theta$$

$$s_{33} = c_t$$

$$s_{12} = (c_n - c_t) \sin \theta \cos \theta$$

$$s_{13} = -c_t \sin \theta$$

$$s_{23} = c_t \cos \theta$$

(9)

であり、 S_{GG}^C を主要素剛性行列と称する。

同様に、G'粒子に対する付加力ベクトルは

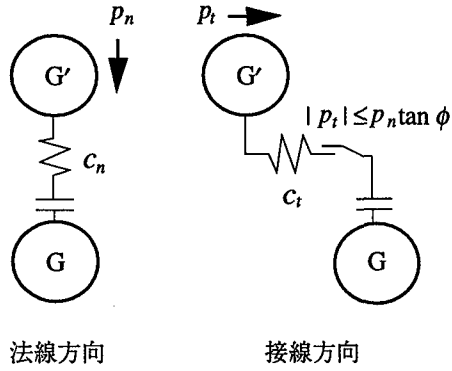


図-3 粒子間構成モデルと接触力の符号

$$\Delta F_{G'G}^C = S_{G'G}^C \Delta U_G \quad (10)$$

と与えられる。ここに $S_{G'G}^C$ を従要素剛性行列と称する。

逆に、もし G 粒子を固定して G' 粒子に変位増分ベクトル $\Delta U_{G'}$ を与えると、 G 粒子および G 粒子の付加力ベクトルは、主要素剛性行列 $S_{G'G}^C$ および従要素剛性行列 $S_{GG'}^C$ を用いて、

$$\Delta F_{G'G'}^C = S_{G'G'}^C \Delta U_{G'} \quad (11)$$

$$\Delta F_{GG'}^C = S_{GG'}^C \Delta U_{G'} \quad (12)$$

と表わされる。

2.3 全体剛性行列

粒状集合体内の全ての粒子の全ての接触点に関して、前節に述べた主従の要素剛性行列 $S_{GG}^C, S_{G'G}^C, S_{GG'}^C, S_{G'G'}^C$ を重ね合わせると全体剛性行列が得られる。この全体剛性行列を用いて剛性方程式が次式のように与えられる。

$$\Delta F' = S' \Delta U' \quad (13)$$

が得られる。ここに、

$\Delta F'$: 全付加力・モーメントのベクトル

$\Delta U'$: 全粒子変位・回転増分のベクトル

S' : 全体剛性行列

である。

内部粒子 および境界粒子の数を、それぞれ、 n 、 n_B とおくと、 $\Delta F'$ および $\Delta U'$ は $3(n+n_B)$ 次のベクトル、 S' は $3(n+n_B) \times 3(n+n_B)$ の行列である。

しかし、式(1)より各境界粒子の移動はひずみ3成分によって定められる。したがって、 S' のランクは $3(n+1)$ になる。一方、全ての境界粒子に作用する付加力をもとに応力3成分を算定することができるので、この算定式を利用すれば、境界粒子変位ベクトルの代わりにひずみ、境界粒子付加力の代わりに応力を未知量として剛性方程式を表すことができる。すなわち、式(1)、(2)の関係を利用して、式(13)は次式のように表すことができる。

$$\Delta F = S \Delta U \quad (14)$$

ここに

$$\Delta F = (\Delta \sigma^t, \Delta F_1^t)^t$$

$$\Delta U = (\Delta \epsilon^t, \Delta U_1^t)^t$$

$$\Delta \sigma = (\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy})^t$$

$$\Delta \epsilon = (\Delta \epsilon_x, \Delta \epsilon_y, \Delta \gamma_{xy})^t$$

$$S = \begin{bmatrix} D & S_e \\ S_e^t & S_l \end{bmatrix} \quad (15)$$

であり、 ΔF_1 と ΔU_1 は、それぞれ、内部粒子付加力ベクトルと内部粒子変位増分ベクトル、 S_l 、 D 、 S_e は、それぞれ、次数 $3n \times 3n$ 、 3×3 、 $3 \times 3n$ の小行列である。 D は応力とひずみに対応する部分の小行列であり、仮想的に全ての内部粒子を固定して境界粒子だけを移動させた場合には、応力ひずみ関係を与える剛性行列とみなすことができる。式(1)、(2)により D は次式で与えられる。

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここに、

$$d_{11} = \sum_B s_{11} X_0^2 / A_0$$

$$d_{22} = \sum_B s_{22} Y_0^2 / A_0$$

$$d_{12} = \sum_B s_{12} X_0 Y_0 / A_0$$

$$d_{13} = \sum_B (s_{11} X_0 Y_0 + s_{12} X_0^2) / 2A_0$$

$$d_{23} = \sum_B (s_{12} Y_0^2 + s_{22} X_0 Y_0) / 2A_0$$

$$d_{33} = \sum_B (s_{11} Y_0^2 + 2s_{12} X_0 Y_0 + s_{22} X_0^2) / 4A_0$$

である。また、 $\sum_B$ は境界粒子と内部粒子との間の全ての接触点について和をとることを意味する。

なお、以上のように定めた全体剛性行列は、粒状集合体の変形に伴って接続状況が変化すると変化することになるので、実際の解析においては時々刻々改訂する必要が生じる。

2.4 Newton-Raphson反復法の適用

粒状集合体の変形に伴い粒子の接触関係が変わり、全体剛性行列が変化するので反復法で計算する必要が生じる。以下、応力制御の場合を例として、Newton-Raphson法⁸⁾を応用した反復計算法について説明する。

いま、応力制御を与える初期状態において、各粒子の全ての接触力の合力として不釣り合い量を求め、これを ΔF^0 とおく。この不釣り合い量を解消するためには、付加力ベクトル

$$\Delta F = -\Delta F^0$$

を加えればよい。また、初期の全体剛性行列を S^0 とおく。このとき、式(14)によって

$$\Delta U^1 = -(S^0)^{-1} \Delta F^0$$

のように内部粒子の変位増分を計算することができる。

この変位増分ベクトルを与えた後、もし内部粒子の接続関係が変化しなければ、新しい付加力は零になるはずである。しかし変位増分ベクトルによって接続関係が変化する場合、新たな不平衡力 ΔF^1 が発生することになる。同時に、全体剛性行列も S^0 から S^1 に改訂する要が生じる。このような過程の繰り返し計算における一般的な反復計算式は第 $i+1$ ステップの計算に対して次式とな

る。

$$\Delta U^{i+1} = -(S^i)^{-1} \Delta F^i \quad (i=1, 2, \dots) \quad (18)$$

また、総変位増量は次式で与えられる。

$$U = \sum_i \Delta U^i \quad (19)$$

最終的に計算が終了する時点においては、

$$\Delta F^i \approx (0, 0, \dots, 0)^t \quad (20)$$

となることが期待されるが、実際には打ち切り精度を定めて次の載荷段階に移ることになる。

ここで、応力制御の式(14)を例として、Newton-Raphson 法について検討する。 F は変位 U の履歴によって変化するので、 U の汎関数であり、変位ベクトルと付加力ベクトルの関係は一般的に

$$F = \Phi[U] \quad (21)$$

と表すことができる。式(14)は式(21)の区分線形近似式と考えられる。ところで、式(18)の S^i は一般に $\Phi[U]$ の勾配に一致するとは限らないが、粒子同士の接続関係が変化しない場合には、外力が多少変化しても変化は微小であり、 ΔF^i が改訂される場合においても S^i を改訂することなく収束計算を続行することができる。ただし、粒子同士の接続関係が変化する場合には、この方法では大きな誤差が生じる可能性がある。そこで、以下に示すように大きな変位増分を抑える方法を併用することとする。

連続体に対する Newton-Raphson 法の適用においては式(18)で計算される ΔU を式(19)に直接用いばよい。しかし、接続関係が変化する離散体の場合には ΔU の絶対値の大きさによって剛性行列が大きく変化し、大きな誤差が累積する可能性がある。そこで、ここでは粒状集合体内部における急激な接続関係の変化を避け、また、区分線形近似の誤差を少なくするために、 ΔU の絶対値を小さく抑えて計算経路を実際の載荷経路に近づけつつ Newton-Raphson 法を応用する方法を提案する。

具体的なアルゴリズムは、式(18)によって得られる変位増分ベクトル ΔU に絶対値を修正するためのスカラー量 $\alpha < 1$ を掛けて、 $\alpha \Delta U$ を実際に与える変位増分とすればよい。とくに、各逐次計算ステップにおける変位増分ベクトルのノルムを一定に保ちたい場合には変位増分ベクトルとして $\alpha \Delta U$ の代わりに

$$\alpha \Delta U / |\Delta U| \quad (22)$$

を用いばよい。後に示す応用においては後者の方法を用いている。

2.5 柔性対角小行列を用いた簡易計算法

式(18)によって剛性行列 S の逆行列の計算が必要である。逆行列計算の計算時間は行列の階数の3乗に比例するので、これは粒子数の増加に対してはクリティカルな制約である。ここで、2.4 に提案した反復法を有効に用いるために、全体剛性行列の逆行列の計算を必要としない柔性対角小行列を用いる方法を提案する。

この方法は全体剛性行列 S を構成する小行列の中、従要素剛性行列を除去して、主要素剛性行列だけを残す簡易計算を行う。すなわち、 S を式(15)の代わりに

$$S = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

とする。このとき、 S の逆行列は

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_n^{-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

となる。ここに S_i ($i=1, 2, \dots, n$) は 3×3 の主対角小行列であって、その逆行列は陽形で求めることができる。たとえば、式(16)で定義された 3×3 の行列 D の逆行列を d_{ij} の余因子 G_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) を用いて

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{bmatrix} \quad (25)$$

のように求めておけば、柔性行列 S^{-1} は陽に与えられ、計算時間を大幅に節約することが可能となる。

式(15)の S を用いて式(18)で求まるひずみ増分は全ての粒子を同時に移動する通常の方法であるのに対して、式(23)の S を用いて求まるひずみ増分は周囲の粒子を固定して着目粒子のみを移動する方法に相当する。したがって、この方法は2.4に述べたような変位ベクトル増分を制御してはじめて有効となる方法である。

3. 弾塑性挙動の解析例

3.1 2次元粒状体モデル

解析に用いた粒状体モデルを図-4に示す。領域全体の形状はほぼ円形で、この領域には395個の円形粒子がパッキングされている。これらの粒子の中の境界粒子の数は72個である。粒子の半径の分布は0.5cmから1.0cmまでの一様分布とした。また、接触点における法線および接線方向のバネ定数は、それぞれ、 $c_n=1000\text{kgf/cm}$ および $c_t=700\text{kgf/cm}$ 、摩擦角は $\phi=25^\circ$ とした。

載荷試験は応力の主軸を x, y 方向に固定した応力制御により行った。図-5に主応力空間上の載荷経路を示す。原点は右上に置き、軸の値は圧縮を正として示した。図のA点は等方応力が 2kgf/cm^2 になるまで等方圧縮して得られた状態であり、これをA供試体と称する。また、 σ_1 を 2kgf/cm^2 に固定、 σ_2 を 3.2kgf/cm^2 になるまで増加させた状態をB供試体と称する。A点からさらに平均応力が 3.2kgf/cm^2 になるまで等方載荷したD点に達した後、 σ_2 を 2kgf/cm^2 になるまで減少させた状態をC供試体と称する。

以上の載荷経路はBardet の数値シミュレーション試験の載荷経路に倣ったものである。

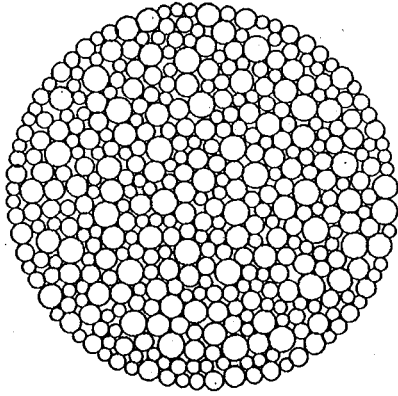


図-4 粒状供試体モデル

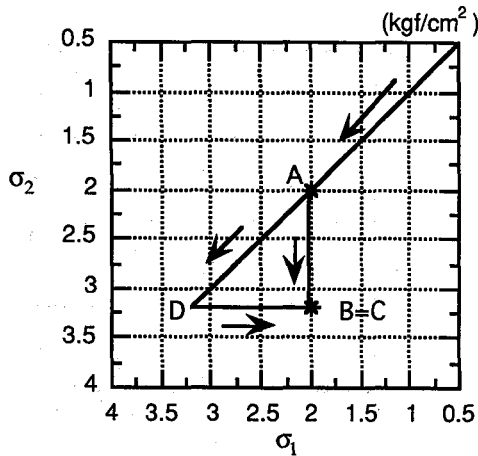


図-5 荷経路

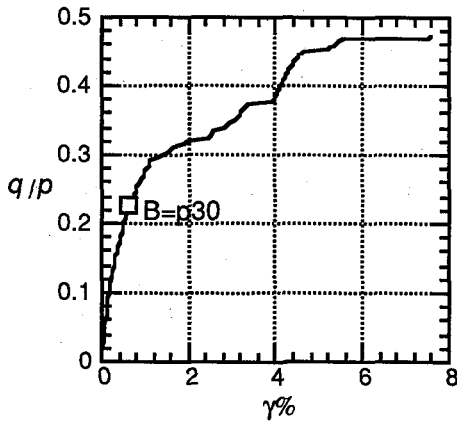


図-6 AB 経路上の応力ひずみ曲線

図-6 に AB 経路上の応力ひずみ曲線示す。縦軸と横軸には、つぎの応力比と最大せん断ひずみを用いた。

$$q/p = (\sigma_2 - \sigma_1) / (\sigma_2 + \sigma_1)$$

$$\gamma = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} / 4 = 2\sqrt{J_2'}$$

なお、ひずみの主軸は一般に x, y 方向に一致しない。

3.2 プローブ試験

同じ供試体について、様々な方向に応力増分を与えて、それに対応する応答としてひずみ増分を求める試験をプ

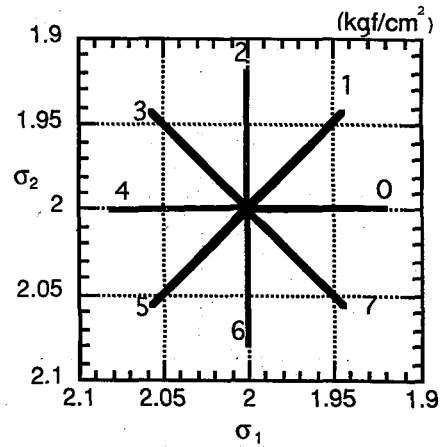


図-7 A 供試体のプローブ試験

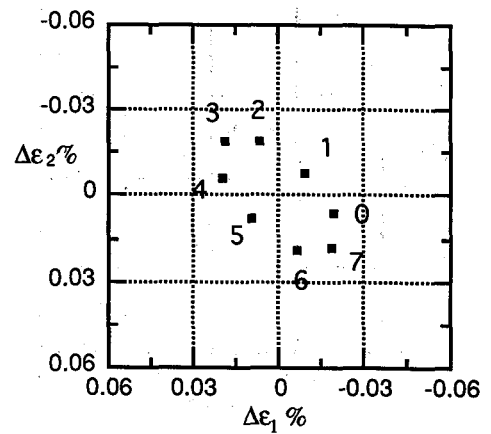


図-8 A 供試体プローブ試験の弾性ひずみ増分

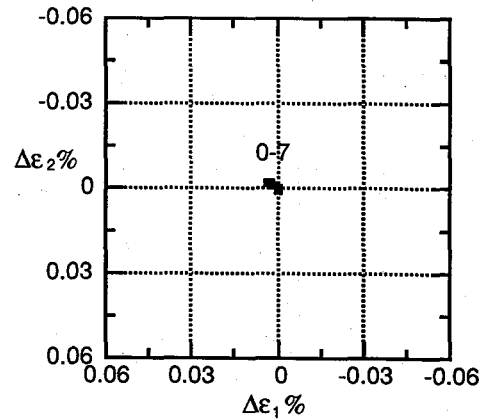


図-9 A 供試体プローブ試験の塑性ひずみ増分

ローブ試験と称する。Bardet⁴⁾は個別要素法で500の円粒子集合体のプローブ試験を行って、弾塑性応答の検討を行った。現実の粒状体について同じ供試体を作成することは極めて困難であるから、この種の検討はコンピュータシミュレーション以外に有効な方法はないと言えよう。本文においては、粒状要素法を用いてプローブ試験を行う。本文で用いた粒状体モデルの粒子の数は Bardet の試験における粒状体モデルの粒子の数より少ないが、得ら

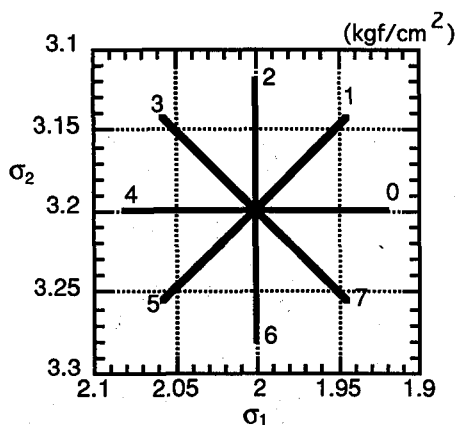


図-10 B, C供試体のプローブ試験

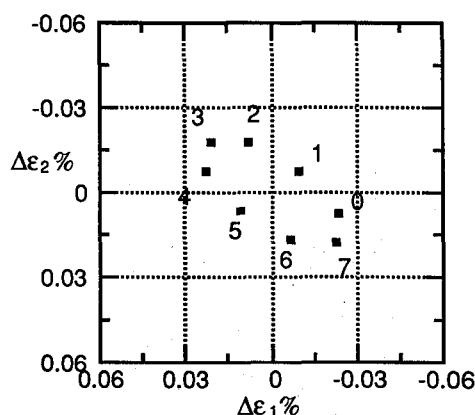


図-13 C供試体プローブ試験の弾性ひずみ増分

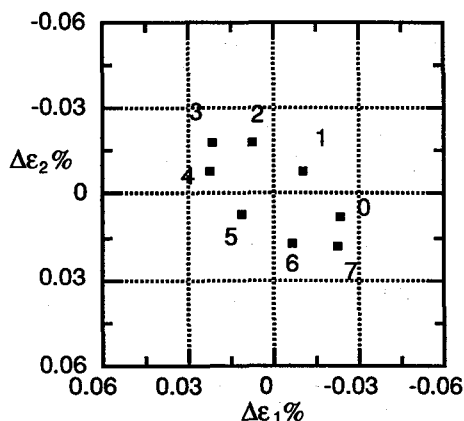


図-11 B供試体プローブ試験の弾性ひずみ増分

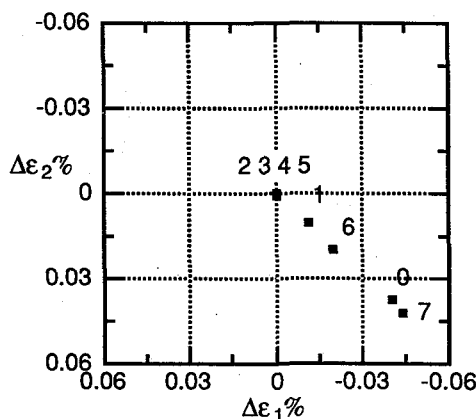


図-14 C供試体プローブ試験の塑性ひずみ増分

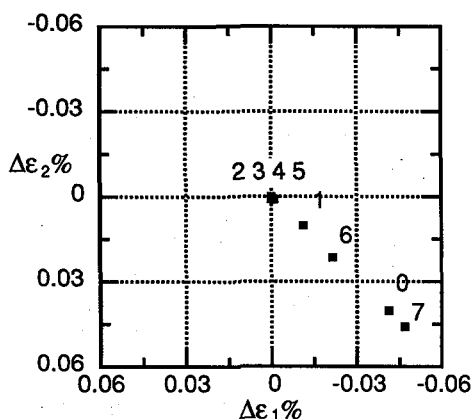


図-12 B供試体プローブ試験の塑性ひずみ増分

れた結果は、後に述べるように、Bardetの結果に較べてより精度の高いものとなっている。

プローブ試験は、A, B, C 供試体から出発して、以下に示すような45° 間隔の8方向の載荷・除荷試験を行う。載荷後のひずみ増分を弾性部分と塑性部分に分けて、

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e + \Delta\epsilon^p$$

と表わす。ここに、

$\Delta\epsilon$: 載荷によって発生した全ひずみ増分

$\Delta\epsilon^e, \Delta\epsilon^p$: 弾性および塑性ひずみ増分

である。除荷時には弾性ひずみ部分は回復するので、塑性ひずみ増分 $\Delta\epsilon^p$ が残留部分として求まり、弾性ひずみ増分は次式で与えられる。

$$\Delta\epsilon^e = \Delta\epsilon - \Delta\epsilon^p$$

図-7 は A 供試体、図-10 は B, C 供試体に対して行った8つのプローブ試験の載荷方向を示し、0-7の数字を付して区別することとする。その際、各方向の応力増分の大きさ $\Delta\sigma \equiv \sqrt{\Delta\sigma_1^2 + \Delta\sigma_2^2}$ は一定値 0.08 kgf/cm^2 とした。

図-8, 11, 13 はそれぞれ A, B, C 供試体のプローブ試験から得られた弾性ひずみ増分を示す。これらの図よりわかるように、弾性ひずみ増分は楕円形状に分布し、各供試体ともに楕円の大きさはほぼ等しい。

図-9, 12, 14 には対応する塑性ひずみ増分を示す。A 供試体の塑性ひずみ増分はほぼ零で、B, C 供試体では除荷方向 (2, 3, 4, 5) の塑性ひずみ増分は零、載荷方向の塑性ひずみ増分は約45° の方向に並んでいることがわかる。

Bardet は個別要素法を用いて、以上とほぼ同一のプローブ試験を行った⁴⁾。図-15 は Bardet の B 供試体のプローブ試験経路であるが、載荷除荷の応力制御が正確には行われていないことがわかる。Bardet の行ったのプローブ試験により得られた弾性ひずみ増分および塑性ひずみ増

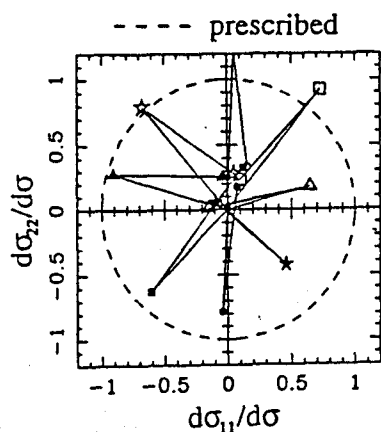


図-15 Bardet の B 供試体プローブ試験経路⁴⁾

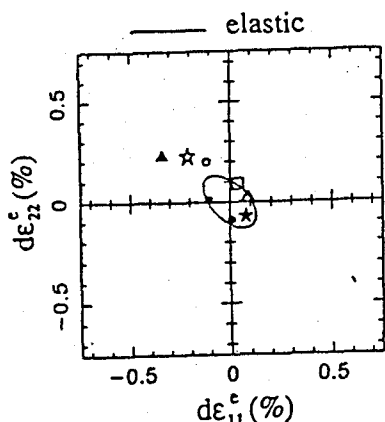


図-16 Bardet の B 供試体プローブ試験弾性ひずみ増分⁴⁾

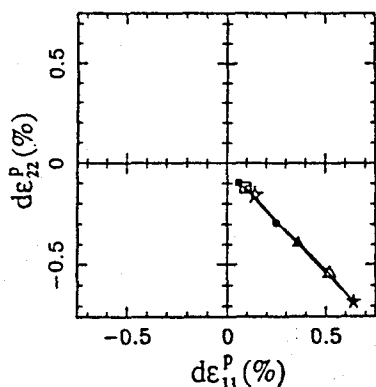


図-17 Bardet の B 供試体プローブ試験塑性ひずみ増分⁴⁾

分を図-16 および図-17 に示す。これらの図を見ると、弾性ひずみ増分が期待される楕円上に分布しないことや、除荷方向の塑性ひずみ増分が零にならないことなど、本研究において得られたような明確な傾向が見られず、Bardet の意図した弾塑性論の検証の目的に対して十分な精度があるとは言えないように思われる。

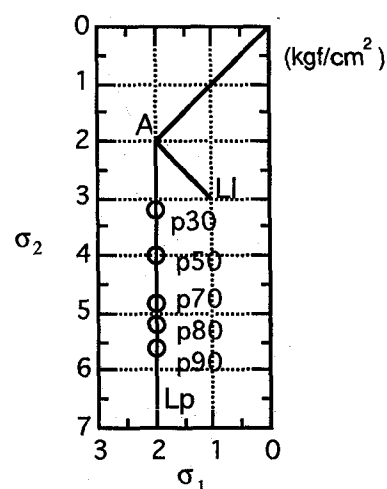


図-18 AB 経路延長上の応力経路

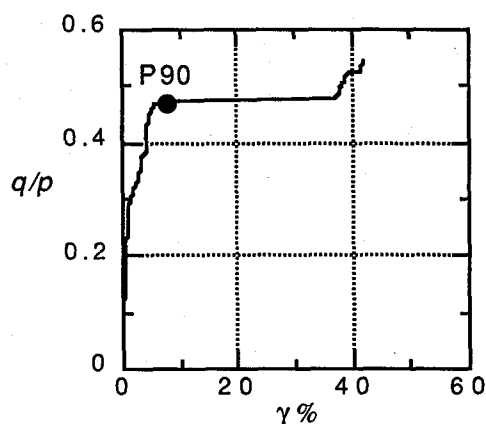


図-19 Lp 経路上の応力ひずみ曲線

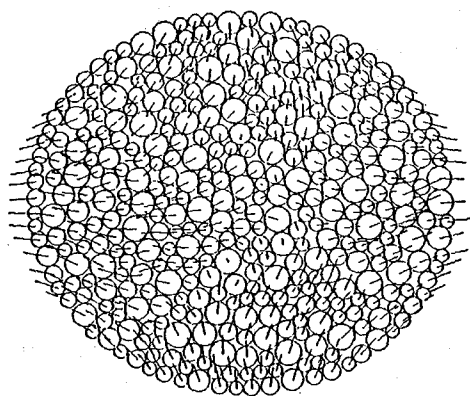


図-20 P90の直後の変位ベクトル

3.3 遷移線

図-5 における AB を延長した図-18 の载荷経路 Lp に沿って 2 軸圧縮試験を行った。図-19 に応力ひずみ曲線を示すが、これは図-6 の応力ひずみ曲線に延長部分を追加したものである。同図より、 $q/p=0.474$ に達した後に変形が発生することが確認される。この载荷試験は応力制

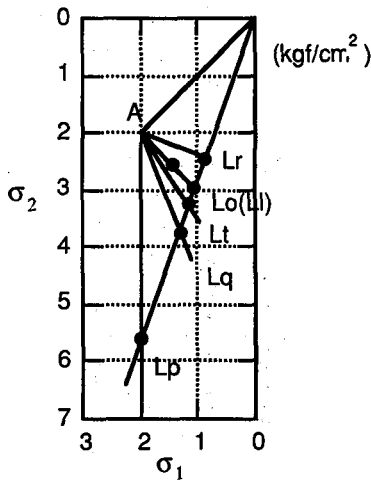


図-21 遷移線

御により行い、軟化部分はシミュレーションできないため、急激なひずみの進展が発生している。P90の直後の変位ベクトル分布を図-20に示す。この急激な変形の後には、再び安定な粒子配置が生じ、 $\gamma=40\%$ 付近では再び硬化が生じている。このような急激な変形が生じる点はこの応力経路以外にも観察されるので、ここではこの点を遷移点と名づけることとする。

様々な载荷経路についてこの遷移点を求めたのが図-21である。図中、Lo以外は応力主軸を x, y 方向に固定した载荷経路であり、Loは主軸を x, y 方向から反時計回りに 45° 回転させた载荷経路である。この図より、遷移点はほぼ原点を通る直線上にあることがわかる。この直線を遷移線と称することとする。なお、L1のみは小さな応力レベルで遷移が生じているが、これは用いた粒状集合体の充填特性によるものと考えられる。

以上より、応力状態が遷移点に達した際の応力比 q/p はほぼ一定と考えることができる。実際各载荷経路における遷移点での Mohr の応力円を描けば、図22のようになり、L1を除き、 q/p がいずれも 0.47 前後の値となることがわかる。

4. 弾塑性挙動の考察

4.1 弾性ひずみ

図-8, 11, 13より、A, B, C供試体のプローブ試験で得られた弾性ひずみ増分の分布は主ひずみ空間上で 45° の方向を長軸とする楕円となったが、これは、下に示すように、弾性部分が等方的であることを示している。

等方弾性体において、大きさ $\Delta\sigma$ の応力増分に対するひずみ増分の2乗は、

$$\Delta\epsilon^2 = \Delta\epsilon_1^2 + \Delta\epsilon_2^2 = \left(\frac{\Delta\sigma}{E}\right)^2 (1 + \nu^2 - 2\nu \sin 2\theta) \quad (26)$$

となり、これは長軸方向 $\theta = -45^\circ$ 、短軸方向 $\theta = 45^\circ$ の原点に対称な楕円で、この楕円の長軸と短軸の長さについて次式が成立する。

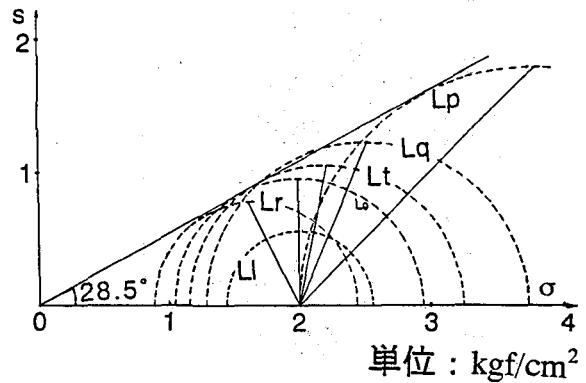


図-22 遷移点におけるMohrの応力円

$$\Delta\epsilon_{\max} / \Delta\epsilon_{\min} = (1 + \nu) / (1 - \nu) \quad (27)$$

$$\Delta\epsilon_{\max} = \frac{\Delta\sigma}{E} (1 + \nu), \quad \Delta\epsilon_{\min} = \frac{\Delta\sigma}{E} (1 - \nu)$$

これをもとに A, B, C 供試体の弾性定数を求めると、それぞれ、 $E = 389, 368, 379 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu = 0.36, 0.38, 0.38$ となる。

4.2 流動則

図-12, 14に示されているように、B, C 供試体における4つの载荷方向 (0, 1, 6, 7) の塑性ひずみ増分ベクトルの方向 (m) は、いずれもほぼ -45° 方向である。塑性論によれば、塑性ひずみ増分ベクトルの大きさは応力増分ベクトルと降伏曲面の外向き法線ベクトル (n) の内積に比例して生じる。プローブ試験における応力増分ベクトルの大きさは一定であるので、塑性ひずみ増分ベクトルの大きさは、応力増分ベクトルの n 方向への投影長さに比例することになる。このことを検証するために、各プローブ試験で得られた塑性ひずみ増分ベクトルより最小二乗法によって n の方向角 β (図-23) を求めることとすると、 β は

$$\tan \beta = (\sqrt{2}L_6 - L_1 + L_7) / (\sqrt{2}L_0 + L_1 + L_7) \quad (28)$$

により求めればよい。ここに、 L_0, L_1, L_6, L_7 はそれぞれ载荷方向 0, 1, 6, 7 の塑性ひずみ増分の大きさである。

応力増分ベクトルの方向を θ とおくと、塑性ひずみ増分ベクトルの n 方向への投影長さは $\Delta\sigma \cos(\theta + \beta)$ である。式(28)によって β は実際に約 30° と算定され、これをもとに塑性ひずみ増分の大きさと $\cos(\theta + \beta)$ の関係を示すと、図-24のようになり、流動則が成立しているときとみなすことができる。応力空間の原点から B 点に至る直線の勾配は約 58° であるので、この直線をほぼ降伏曲線と考えてよいと考えられよう。これは、硬化が最も進んだ最終状態における遷移線とも整合性のある結果となっている。

ところで、塑性ひずみ増分方向 m は約 -45° であるので、 $m \neq n$ 、すなわち関連流動則は成立しないことが結論として得られる。

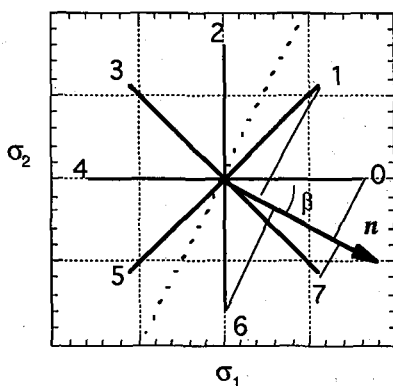


図-23 プローブ試験による降伏曲線の法線 n の算定

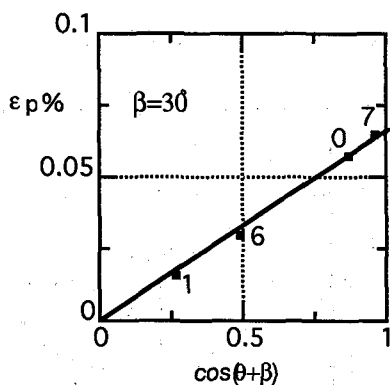


図-24 塑性ひずみ増分の大きさと $\cos(\theta+\beta)$ の関係

4.3 硬化特性

B, C 2つの供試体は 2つの異なった載荷経路を経由して同一の応力状態に達したものであるが、3.2 に示した結果によれば、弾性ひずみ増分、塑性ひずみ増分ともに差はほとんどなく、B, C 供試体の硬化の程度は同一の状態にあると考えられる。これは、4.2 に示したように、降伏曲線がほぼ原点を通る直線となっていることによると考えてよいであろう。

ここで、図-18 の L_p 上の載荷・除荷を行った後 L_p 方向および L_l 方向に再載荷を行い、硬化の程度の変化を調べた結果について記す。図-25, 26 は、それぞれ L_p 上の P50, P70 まで載荷除荷を行った後、 L_p , L_l 方向に再載荷を行った結果を示す。両図には塑性論における硬化の程度の変化による後続負荷曲線の進展が明確に現われている。

4.4 誘導異方性

図-18 の A 点から出発し、 $\sigma_1=2\text{kgf/cm}^2$ を維持したまま σ_2 だけを増加させる L_p 方向の載荷経路について、3.2 に示した B 点 (P30) に追加して、いくつかの点についてプローブ試験を行い、誘導異方性の発達について調べた。図-27, 28 は P80 についての結果、図-29, 30 は P90 (遷移点) についての結果である。なお、これらの試験におけるプローブ試験の応力増分が大きさは、P80, P90 に対して、それぞれ、 0.04kgf/cm^2 , 0.005kgf/cm^2 とした。後者は、載荷方向のプローブ試験の過程において応力状

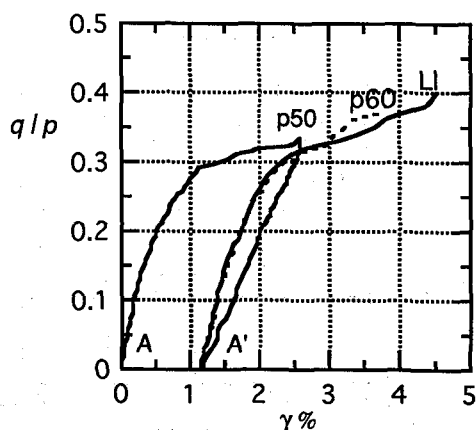


図-25 P50 除荷後の再載荷応力ひずみ関係

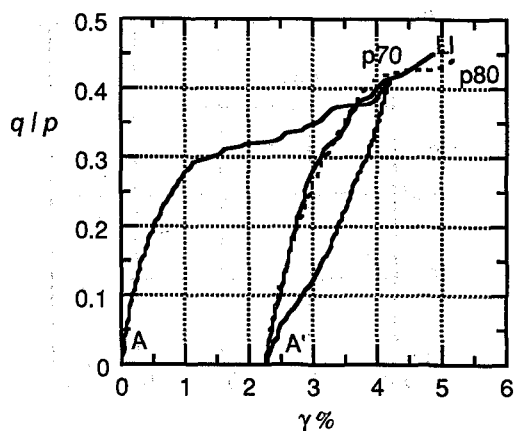


図-26 P70 除荷後の再載荷応力ひずみ関係

態が遷移点に達する可能性があるので、このような小さな値を用いた。

これらの図および 3.2 に示した B 供試体の結果を比較して、偏差応力の増加とともに、弾性ひずみ分布を表わす楕円の長軸の方向が -45° から -20° まで回転すること、塑性ひずみ増分ベクトルの方向も -45° から -29° まで回転することがわかる。このような回転は、粒状集合体が載荷とともに等方性から徐々に異方性が発達して行く誘導異方性が現われたものである。

5. おわりに

以上、改良された粒状要素法を用いて粒状体モデルシミュレーションによる弾塑性解析を行い、応力状態が遷移線に達する以前においては、非関連流動則に基づく塑性理論が適用できそうであることを示した。

すなわち、せん断載荷された粒状体モデルにおけるいくつかの載荷状態に対してプローブ載荷・除荷試験を行い、弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分が分離されること、せん断変形が小さい段階においては等方弾性が認められること、塑性ひずみ増分ベクトルは非関連流動則に従った大きさと方向をもつこと、明瞭な硬化過程が観察されることなどの結果を得た。また、後続負荷曲線の極限と

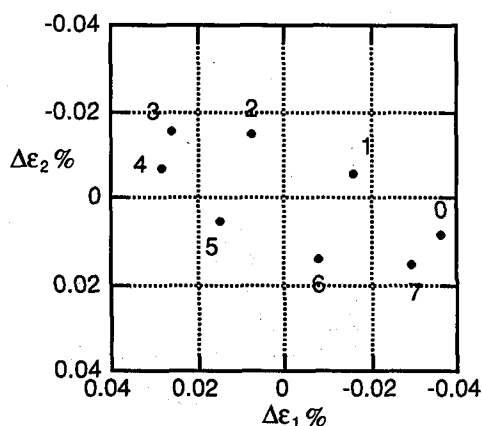


図-27 P80点プローブ試験弾性ひずみ増分

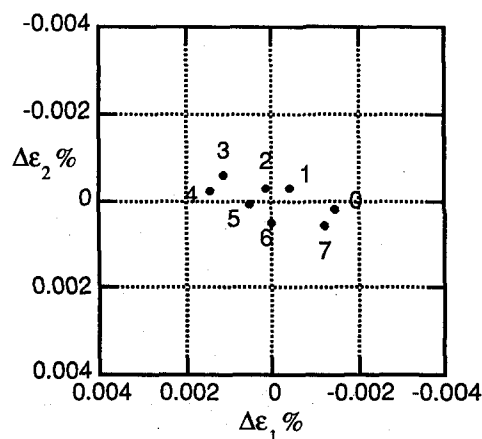


図-29 P90点プローブ試験弾性ひずみ増分

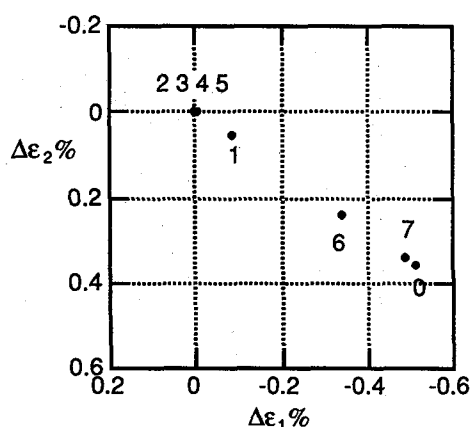


図-28 P80点プローブ試験塑性ひずみ増分

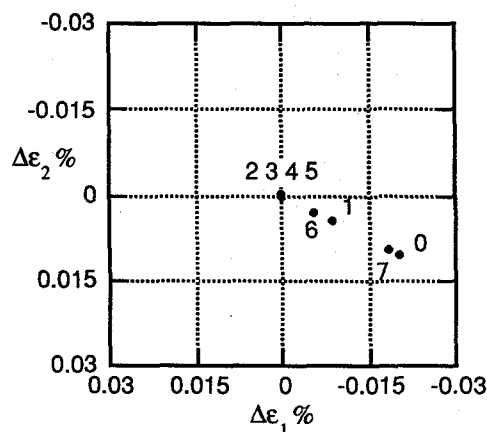


図-30 P90点プローブ試験塑性ひずみ増分

して、応力空間の原点を通る遷移線が得られることや、大きな変形に対しては誘導異方性が生じることなどの結果も得た。以上の結果は、同一供試体について様々な載荷経路について種々のプローブ試験を行って初めて得られるものであり、現実の実験では実行不可能である。

粒状要素法は個別要素法と異なり、準静的状態の平衡に着目して安定的にシミュレーション解析を行うものである。本文にも述べたように、本論文の結果を Bardet の結果に比較する限り、粒状要素法は個別要素法に比べてより明確に力学的性質を抽出することを可能とするということを結論づけられよう。ただし、粒状要素法を用いた場合には、逆行列の計算に非常な時間を要することが欠点であるが、本論文で提案したような対角柔性小行列や改良した Newton-Raphson 反復法を用いることにより、この欠点を補うことができよう。

将来的にはここで提案した方法を用いて、粒子数の多いモデルによる解析を行い、粒状体のマイクロメカニクス等を含めてより深い検討を行うことが必要である。また、遷移点に達した後の塑性的性質や 3 次元粒状体モデルについての解析を進めることも重要である。

参考文献

- 1) Newland, P.L. and Alley, B.H.: Volume Changes in Drained Triaxial Tests on Granular Materials, *Géotechnique*, 7, pp. 17~34, 1957.
- 2) Rowe, P.W.: The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, *Proc. R. Soc. Lond.*, A-269, pp. 500~527, 1961.
- 3) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique* 29, pp.47~65, 1979.
- 4) Bardet, J.P.: Numerical simulation of the incremental responses of idealized granular materials, *Int. J. Plasticity*, 10, pp.879-908, 1994.
- 5) 岸野佑次: 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, 土木学会論文集, 406, pp.97~106, 1989.
- 6) Kishino, Y.: Computer analysis of dissipation mechanism in granular media, *Powders and Grains*, A. A. Balkema, pp. 323~330, 1989.
- 7) 岸野佑次, 森谷直樹: 粒状体の応力ひずみ関係における増分非線形性の微視力学解析, 構造工学論文集, 42A, pp.307~316, 1996.
- 8) Owen, D.R.J.: *Finite Elements in Plasticity*, Redwood Burn Ltd., Trowbridge, 1980.

(1996年9月6日受付)