

同次補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析

AN INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW ANALYSIS BY IMPLICIT FINITE ELEMENT
METHOD USING EQUAL-ORDER INTERPOLATION

丸岡 晃*・太田 真二**・平野 廣和***・川原 睦人****

Akira Maruoka, Shinji Ohta, Hirokazu Hirano and Mutsuto Kawahara

*工修 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

**中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

***工博 中央大学助教授 総合政策学部 (〒192-03 東京都八王子市東中野 742-1)

****工博 中央大学教授 理工学部土木工学科 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27)

This paper presents a finite element formulation based on implicit time integration and equal-order interpolation for unsteady incompressible viscous flow. For the discretization of the incompressible Navier-Stokes equations, an IBTD+FS method that is obtained from combining an Improved-Balancing-Tensor-Diffusivity (IBTD) method and a Fractional-Step (FS) method is used. The IBTD+FS method can be derived from the Petrov-Galerkin formulation, and is of the second order accuracy and very stable. The analysis of the rotating cone is performed for the benchmark problem of the advection equation, and the standing vortex problem and the cavity flow are performed for the numerical examples of the Navier-Stokes equations.

Key Word : Implicit time integration, Equal-order interpolation,
IBTD+FS method, Petrov-Galerkin formulation

1. はじめに

有限要素法により非圧縮粘性流れの解析を行うとき、二つの解決すべき問題点が指摘される。一つ目の問題点は、運動方程式に含まれる移流項の取扱いである。移流の卓越する問題に、中心差分型の近似を行う Galerkin 法を用いた場合、解が不安定になることが知られている。そこで、この問題点を解決するために、上流側の節点に重みを付ける Petrov-Galerkin 法^[1]や、時間に関するテーラー展開の2次の項を考慮する Balancing-Tensor-Diffusivity (BTD) 法^[2,3,4]などが用いられている。二つ目の問題点は、非圧縮の連続条件をどう満足させるかということである。これには、従来から流速と圧力に異なる次数の補間関数を用いる混合補間が使われてきた。さらに、近年、Petrov-Galerkin 法を一般化した安定化有限要素法^[7,8]が提案され、同次補間による解析が可能になった。また、圧力 Poisson 方程式を導くことにより非圧縮の連続条件を満足させ、流速場と圧力場を分離して解く分離型解法 (Fractional-Step (FS) 法)^[5,6]も、同次補間による解析が可能である。特に、P1P1 要素や Q1Q1 要素を用いた同次補間による解析は、プログラムが煩雑にならないだけでなく、物理量が各節点ごとの値で求められるため、計算結果の作図などの後処理にも非常に有効である。

一方、時間方向の離散化では、計算機容量の制約な

どから陽的解法を用いることが従来から多かった。陽的解法は、高 Reynolds 数の解析などで境界層の要素分割に極度に微細な要素分割を行なった場合、微小時間増分を極端に小さく取る必要があった。これに対し、陰的解法では、計算機容量は増加するものの安定性に優れているため、このような要素分割であっても、極端に小さな微小時間増分を選ぶ必要がない。特に定常解を目的とする高 Reynolds 数流れの問題では、トータルの計算時間を見ると陰的解法の方が、高速な場合が多い。非定常解を目的とする問題であっても、陽的解法では、局所的やある瞬間に流速が増大することによって計算が破綻してしまう問題があるが、陰的解法では、安定性に優れているため、そのような問題がない。陰的解法は、このような微細な要素分割を行わなければならない高 Reynolds 数の流れの問題に非常に適している。また、陽的解法では、空間方向の離散化に高精度なものを用いても、質量行列の集中化を行わなければならないため、代数方程式が実際の離散化に適合しないという問題があるが、陰的解法では、空間方向の離散化に適合する代数方程式をそのまま解くことにより、離散化の精度を損なわずに解析を行なうことが可能となる。このようなことから、近年開発された安定化有限要素法などの多くの手法は、時間方向の離散化に、陰的解法が採用されている。

この様なことから、本論文では、移流項の離散化に、代数方程式を導いた際に行列の形が対称となる2次精度の手法であるBTD法に着目し、これを陰的に改良することによって安定性を高めた改良型のBTD法であるImproved-BTD(IBTD)法を提案する。IBTD法は、陰的であるため安定性に優れ、さらに、対称行列の解法であるので非対称行列となる陰的解法に比べ、高速に計算することが可能である。また、非圧縮Navier-Stokes方程式の離散化では、連続式の取扱に、同次補間を用いることができ、流速と圧力を分離して解くことが可能なFS法を採用する。運動方程式の離散化にIBTD法を適用し、連続式の取扱いにFS法を用いた手法をここではIBTD+FS法と呼ぶ。IBTD+FS法は、安定性に優れ、高速に計算することが可能な手法である。

ここでは、提案した手法の適用性、有用性を検討し、考察を行なうために2種類の問題を取り上げる。まず、移流拡散方程式を取り上げ、IBTD法による離散化を行ない、この手法が、Petrov-Galerkin法の一つであるStreamline-Upwind/Petrov-Galerkin(SUPG)法^[1]からも導けることを示す。Neumannの安定性解析により安定性、増幅因子、位相誤差についての検討を行なう。移流方程式のBenchmark問題として知られているRotating Coneの解析を取り上げ、手法の検討を行ない、IBTD法が、散逸誤差と位相誤差の少ない手法であることを示す。次に、非圧縮Navier-Stokes方程式の離散化手法の説明を行なう。はじめに、安定化有限要素法の一つであるSUPG法とPressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin(PSPG)法を組み合わせたSUPG+PSPG法^[8]による離散化を示し、さらに、本論文で提案するIBTD+FS法の離散化を行う。IBTD+FS法も、Petrov-Galerkin法の考え方により導くことができ、ここではそれらの式の展開を明らかにする。数値解析例としてBenchmark問題であるStanding Vortex ProblemとCavity内の流れの問題を取り上げ、IBTD+FS法の適用性、有用性についての検討、考察を行なう。

2. 移流拡散方程式の離散化手法

2.1 基礎方程式

あるスカラー量 u の非定常移流拡散方程式は、以下のように示される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u = s \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここで、 Ω は、境界 Γ で囲まれた解析領域、 $\mathbf{a}$ は、移流速度、 ν は、拡散係数、 s は、ソース項であり、移流速度は、非圧縮条件 $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ を満たすものとする。また、ソース項は、時間依存しないものとする。

境界 Γ は、 Γ_1 と Γ_2 に分けられ、それぞれ、以下の境界条件が、規定される。

$$u = \hat{u} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$\nu \nabla u \cdot \mathbf{n} = \hat{q} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は、境界 Γ の外向き法線ベクトルである。また、式(2),(3)は、時間依存しないものとする。

2.2 SUPG法

有限要素法で用いる中心差分型の近似を行うGalerkin法は、移流の卓越する問題では不安定となることが知られている。そこで、有限要素法では、風上差分法と同じように流れの上流側の節点に重みを付け、重み関数と試行関数に異なる形状関数を用いて離散化を行うPetrov-Galerkin法と呼ばれる手法がしばしば用いられる。その中で最も注目されている手法がSUPG法^[1]であり、これを基にした手法が多く提案されてきている。以下に、SUPG法による離散化について概説する。

Brooksら^[1]は、SUPG法の時間方向の離散化に予測子修正子法を用いているが、ここでは、SUPG法の時間方向の離散化に陰的解法であるCrank-Nicolson(CN)法を適用する。

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u^{n+1/2} - \nu \nabla^2 u^{n+1/2} = s \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

ここで、 $u^{n+1/2} = (u^n + u^{n+1})/2$ である。

重み関数と試行関数の要素ごとの補間による近似関数をそれぞれ w_h , u_h とすると、SUPG法による重み付き残差方程式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_h \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + \mathbf{a}_h \cdot \nabla u_h^{n+1/2} - s_h \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \nu \nabla u_h^{n+1/2} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \mathbf{a}_h \cdot \nabla w_h \\ & \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + \mathbf{a}_h \cdot \nabla u_h^{n+1/2} - \nu \nabla^2 u_h^{n+1/2} - s_h \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_2} w_h \hat{q}_h d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 τ は要素ごとに定義される量である。第1項と第2項、また、右辺項がGalerkin法による項を示し、第3項がPetrov-Galerkin法による付加項であり、安定化項と呼ばれている。第3項に含まれる拡散項は、1次要素や双1次要素を用いた場合、2階微分なので消去することができる。

τ は、 h を要素長とすると、移流拡散方程式の場合、以下のように定義される。

$$\tau = \frac{h}{2\|\mathbf{a}_h\|} \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right), \quad \alpha = \frac{\|\mathbf{a}_h\| h}{2\nu} \quad (6)$$

1次元の定常問題では、1次補間を用いたとき τ を式(6)のようにすることによって、節点量ごとに厳密解を与えることができる。

2.3 BTD 法

BTD 法^[2,3]は、2次精度の Taylor-Galerkin 法^[4]とも呼ばれ、差分法の Lax-Wendroff 法で用いる時間に関するテーラー展開の2次の項まで考慮した式(7)に、空間方向の離散化に Galerkin 法を適用した2次精度の手法である。

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (7)$$

時間の2階の微分項は、式(1)を移流方程式に近似した式を用いて、空間微分に置き換える。ただし、移流速度 a は、時間に依存しないと仮定する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \simeq -\frac{\partial}{\partial t} (a \cdot \nabla u) \\ &= -a \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \simeq a \cdot \nabla (a \cdot \nabla u) \end{aligned} \quad (8)$$

式(1),(8)を式(7)に代入し、整理すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + a \cdot \nabla u^n - \nu \nabla^2 u^n \\ - \frac{\Delta t}{2} a \cdot \nabla (a \cdot \nabla u^n) = s \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

左辺の第4項が陽的 Euler 法に対して2次精度の誤差を打ち消す人工粘性の働きをする。上に Galerkin 法を用いて、空間方向に離散化することによって、BTD 法の重み付き残差方程式を得ることができる。

BTD 法の問題点は、まず安定性限界が低いことが挙げられる。次に、代数方程式を導く際に、時間微分項に現れる質量行列が存在するため逆行列を解く形となり、非効率的な手法である。これを解決するために、質量行列を集中化することによって、陽的に取り扱うことも可能であるが、位相誤差が増大する問題点がある。また、時間の2階の微分項を空間微分に置き換える操作の段階で、式(1)を移流方程式に近似しているので、拡散項やソース項のある問題では、完全に2次精度を保証していない。

2.4 IBTD 法

以上の様なことから、本論文では、人工粘性として作用する時間の2階の微分項を陰的に表し、また、時間の2階の微分項を空間微分に置き換える操作で、移流拡散方程式(1)をそのまま用いる手法を提案する。これにより、安定性の効果を高めることができ、また、完全に2次精度を保証することができる。このBTD法に改良を加えた手法をここでは、Improved-BTD(IBTD)法と呼ぶことにする。

IBTD 法で用いる時間に関する2次の項までのテーラー展開の形は、以下のテーラー展開により導かれる。

$$u^n = u^{n+1} - \Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (10)$$

$$u^{n+1/2} = u^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (11)$$

$$u^{n+1/2} = u^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (12)$$

式(10)+2×式(11)-2×式(12)によって、時間の2階の微分項を CN 法により陰的に表現することにより IBTD 法で用いるテーラー展開の形が、以下のように導かれる。

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^{n+1/2}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (13)$$

ここで、 $u^{n+1/2} = (u^n + u^{n+1})/2$ である。さらに、時間の2階の微分項は、式(1)を用いて、空間微分に置き換える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \{a \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u - s\} \\ &= -a \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \{-\nu \nabla^2 u - s\} \\ &= a \cdot \nabla \{a \cdot \nabla u - \nu \nabla^2 u - s\} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \{-\nu \nabla^2 u - s\} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、式(14)を式(13)に代入するときの最終項の離散化は、以下のものを用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{-\nu \nabla^2 u^{n+1/2} - s^{n+1/2}\} \\ = \frac{1}{\Delta t} \{-\nu \nabla^2 u^{n+1} - s^{n+1}\} \\ - \frac{1}{\Delta t} \{-\nu \nabla^2 u^n - s^n\} + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (15)$$

式(1),(14),(15)を式(13)に代入し、整理すると、IBTD 法による時間方向の離散式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + a \cdot \nabla u^n - \nu \nabla^2 u^{n+1/2} \\ - \frac{\Delta t}{2} a \cdot \nabla \{a \cdot \nabla u^{n+1/2} \\ - \nu \nabla^2 u^{n+1/2} - s\} = s \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)の空間方向の離散化に Galerkin 法を用いることにより、重み付き残差方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_h \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + a_h \cdot \nabla u_h^n - s_h \right\} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \nu \nabla u^{n+1/2} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} a_h \cdot \nabla w_h \\ \{a_h \cdot \nabla u_h^{n+1/2} - \nu \nabla^2 u_h^{n+1/2} - s_h\} d\Omega \\ = \int_{\Gamma_2} w_h \nu \nabla u^{n+1/2} \cdot n d\Gamma \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma_2} w_h \left\{ \frac{\Delta t}{2} a_h \right. \\ \left. (a_h \cdot \nabla u_h^{n+1/2} - \nu \nabla^2 u_h^{n+1/2} - s_h) \right\} \cdot n d\Gamma \quad (17)$$

式(17)とSUPG法の重み付き残差方程式(5)を比較すると、かなり類似している。相違点は、SUPG法では移流項が陰的に表現されているのに対して、IBTD法では陽的に表現されている。さらに、第3項にSUPG法では τ が乗されていて、IBTD法では $\Delta t/2$ が乗されている。また、第3項にSUPG法では時間微分項が存在するが、IBTD法では存在しない。IBTD法では、境界積分項に式(3)で示される Γ_2 上での境界条件以外の項が含まれる。

IBTD法の重み付き残差方程式(17)は、SUPG法の重み付き残差方程式(5)の第3項に乘されている τ を $\Delta t/2$ に置き換えることによって、SUPG法の式(5)から、導くことが可能である。まず、式(5)の τ を $\Delta t/2$ に置き換える。次に、第3項に含まれる時間微分項を部分積分し、第1項に含まれる移流項の陰的部分を消去することによって、式(17)と同様の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_h \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + a_h \cdot \nabla u_h^n \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \nu \nabla u_h^{n+1/2} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} a_h \cdot \nabla w_h \\ & \quad \{ a_h \cdot \nabla u_h^{n+1/2} - \nu \nabla^2 u_h^{n+1/2} - s_h \} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_2} w_h \nu \nabla u_h^{n+1/2} \cdot n d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_2} w_h \left\{ \frac{1}{2} a_h (u_h^{n+1} - u_h^n) \right\} \cdot n d\Gamma \quad (18) \end{aligned}$$

ここで、右辺の境界積分項は、式(4)により、式(17)と同様の形にすることができる。

IBTD法の Γ_2 上で規定する境界条件の形は、本来の式(3)のような形とはならず、以下のような形となる。

$$\{ \nu \nabla u_h^{n+1/2} - \frac{1}{2} a_h (u_h^{n+1} - u_h^n) \} \cdot n = \hat{q}' \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (19)$$

以上により、SUPG法から、IBTD法を導くことが出来た。すなわち、IBTD法は、CN法により時間方向に離散化した式(4)を空間方向の離散化にPetrov-Galerkin法を適用した離散化手法と等価であると考えることができる。SUPG法は、代数方程式の行列の形が、非対称になるのに対し、IBTD法は、1次要素や双1次要素を用いた場合、式(18)の第3項に含まれる拡散項は消去され、また、移流項は陽的な形となっているため、行列の形は対称となる。よって、IBTD法は、陰的解法であるにもかかわらず、行列の形が対称行列となるので、計算効率の面で優れた手法であると言える。

2.5 安定性解析

1次元移流方程式に1次要素を用いたときの各離散化手法の安定性解析により手法の検討を行なった。IBTD法は、高次要素を用いた場合に行列の形が対称とならず、IBTD法の利点をいかせないため、1次要素のみによる検討を行なうものとする。SUPG法とIBTD法、また、CN法により時間方向に離散化された式(4)にGalerkin法を適用した手法(G法)の j 点での差分表示は、以下ようになる。

SUPG法

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{12} - \frac{c}{2} \right) u_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + \frac{c}{2} \right) u_j^{n+1} - \frac{1}{12} u_{j+1}^{n+1} = \\ & \left(\frac{5}{12} + \frac{c}{2} \right) u_{j-1}^n + \left(\frac{2}{3} - \frac{c}{2} \right) u_j^n - \frac{1}{12} u_{j+1}^n \quad (20) \end{aligned}$$

IBTD法

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} - \frac{c^2}{4} \right) u_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + \frac{c^2}{2} \right) u_j^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - \frac{c^2}{4} \right) u_{j+1}^{n+1} = \\ & \left(\frac{1}{6} + \frac{c}{2} + \frac{c^2}{4} \right) u_{j-1}^n + \left(\frac{2}{3} - \frac{c^2}{2} \right) u_j^n + \left(\frac{1}{6} - \frac{c}{2} + \frac{c^2}{4} \right) u_{j+1}^n \quad (21) \end{aligned}$$

G法

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} - \frac{c}{4} \right) u_{j-1}^{n+1} + \frac{2}{3} u_j^{n+1} + \left(\frac{1}{6} + \frac{c}{4} \right) u_{j+1}^{n+1} = \\ & \left(\frac{1}{6} + \frac{c}{4} \right) u_{j-1}^n + \frac{2}{3} u_j^n + \left(\frac{1}{6} - \frac{c}{4} \right) u_{j+1}^n \quad (22) \end{aligned}$$

ここで、 c は、クーラン数 $c = a\Delta t/h$ であり、SUPG法の τ は、 $\tau = h/2a$ としている。有限要素法の手法を1次元の差分に置き換えた場合、ほとんどが、 $j-1$ 、 j 、および、 $j+1$ のstencilを用いる形となる。特に、IBTD法では、 $n+1$ の係数が対称であり、対角優位になっていることがわかる。ここで、取り上げた全ての手法は、時間方向の離散化にCN法を使用している。SUPG法、IBTD法、G法は、SUPG法で用いる τ をそれぞれ、 $\tau = h/2a$ 、 $\tau = \Delta t/2$ 、 $\tau = 0$ とすることと一致する。クーラン数 $c \leq 1$ のとき、SUPG法の τ が大きいと、SUPG法が最も安定性の効果が大きく、また、 $c > 1$ のとき、IBTD法の τ がSUPG法より大きいと、IBTD法が安定性の効果が大きい。

u_j^n の解を $u_j^n = g^n e^{ij\theta}$ と仮定し、式(20),(21),(22)に代入し、増幅因子 g を調べることによって、Neumannの安定性解析を行った。

安定性限界は、SUPG法、IBTD法、G法とも、時間方向の離散化に陰的解法であるCN法を使っているため、無条件安定の手法となる。従来のBTD法の安定性限界は、 $c \leq 1/\sqrt{3}$ であるので、IBTD法は、かなり安定性に関して改善されている。また、各手法の精度は、すべて2次精度となる。

図-1~5は $c = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 2.0$ のときの各離散化手法の相対増幅因子と相対位相誤差の比較を示す。ここで、UWは、時間方向の離散化に陽的Euler法を適用した1次精度風上差分法を示し、また、LWは、Lax-Wendorff法を示す。 $\pi/\theta = 1$ のときが h の格子幅で解像できる最も高周波数の成分であり、解の節点

間での振動成分を示す。UW 法は位相誤差は小さいが、増幅因子が小さいので解の減衰が起こり易い。LW 法は増幅因子は1に近いが、位相がクーラン数が小さいとき遅れ易い傾向にある。IBTD 法、SUPG 法はほぼ同程度の精度を示し、 $\pi/\theta \geq 2$ では、位相誤差が小さく、増幅因子がほぼ1に近い。G 法は、増幅因子がどの波数成分に対しても1を示し、散逸誤差のない手法である。ところが、位相誤差を見ると最も高周波の成分が、0になっているため、解に節点間の振動成分が誤差として発生した場合、その解を減衰させる効果が全くない。G 法以外の手法は、最も高周波の波長に対して、増幅因子が小さい値となっているので、高周波の成分に位相誤差があるが、それらの解を減衰させる効果をもつ。SUPG 法、IBTD 法、G 法、また、LW 法は、すべて2次精度の手法であるが、解の特徴はすべて異なる。

SUPG 法と IBTD 法が、増幅因子が UW 法に比べて、1に近い値になっているのは、時間微分項に作用している Petrov-Galerkin 法による付加項に起因する。風上差分系の多くの手法では、このような付加項は存在しないため、ここで示した1次精度風上差分法と同等の結果を示す。LW 法は、位相誤差が有限要素法の手法に比べて大きい。差分法では、LW 法が一般に使われず、散逸誤差の大きい風上差分系の手法が使われる。これは、LW 法に位相誤差の問題があるからである。有限要素法の手法が、位相誤差が小さいのは、時間微分項を空間離散する際に現れる有限要素法特有の質量行列があることに起因する。この質量行列は、位相誤差を軽減する働きがある。

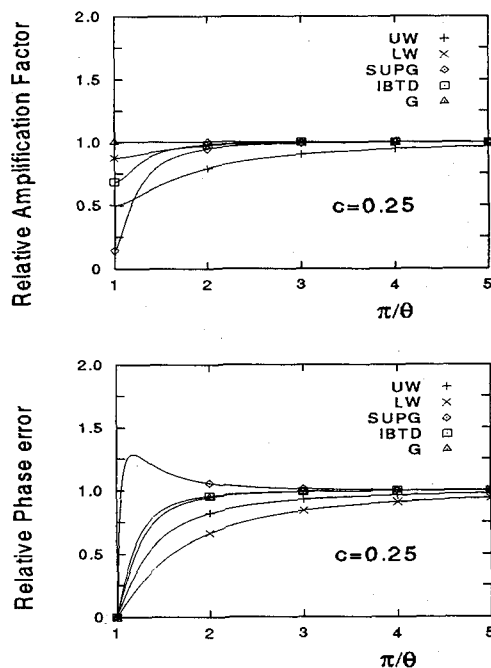


図-1 相対位相誤差と相対増幅因子 ($c=0.25$)

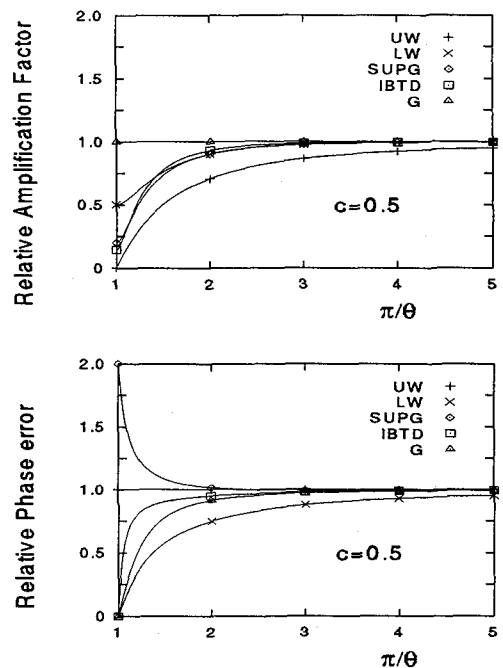


図-2 相対位相誤差と相対増幅因子 ($c=0.5$)

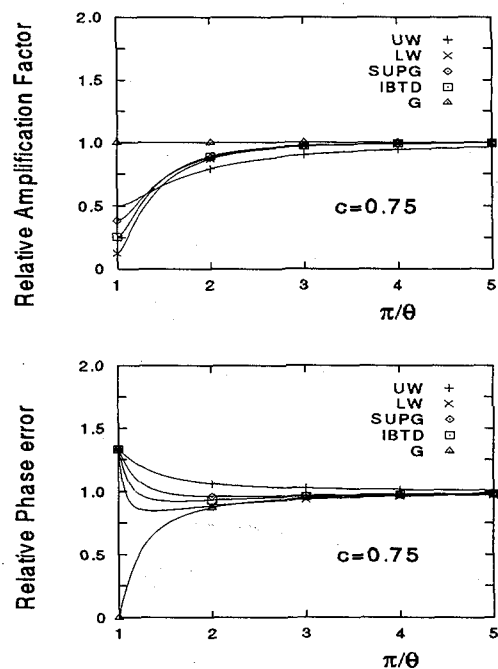


図-3 相対位相誤差と相対増幅因子 ($c=0.75$)

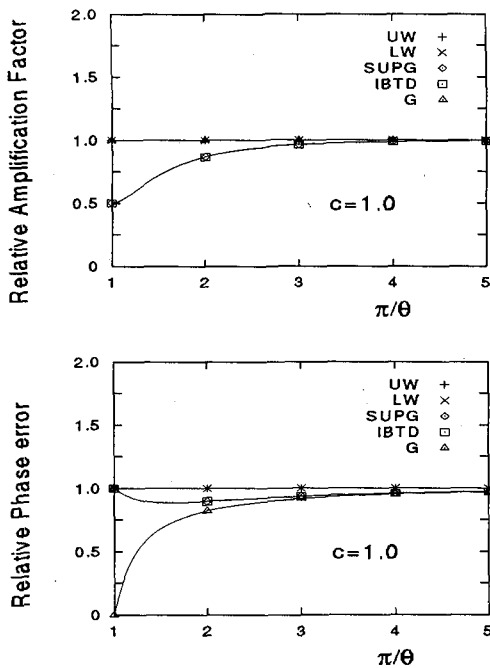


図-4 相対位相誤差と相対増幅因子 ($c=1.0$)

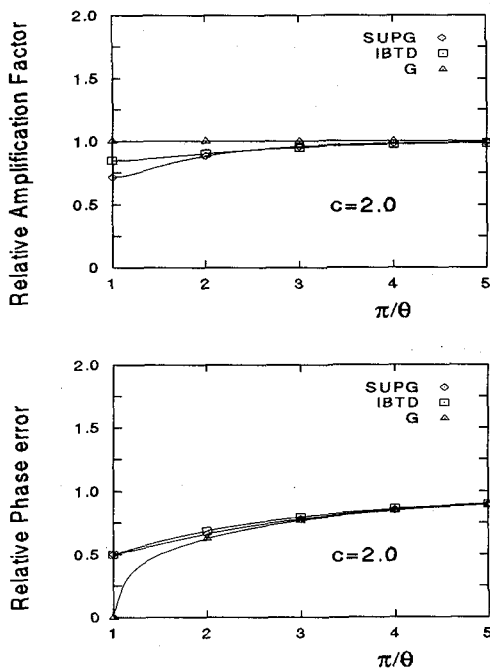


図-5 相対位相誤差と相対増幅因子 ($c=2.0$)

2.6 Rotating Cone の解析

数値解析手法の Benchmark 問題として知られている Rotating Cone の計算を行った。この問題は、解析領域 ($-1 \leq x_i \leq 1$) に、定常な流速 ($a_1 = -x_2$, $a_2 = x_1$) を仮定し、初期条件として人工的なあるスカラー量 u を与え、移流方程式により解析領域を 1 周するまで計

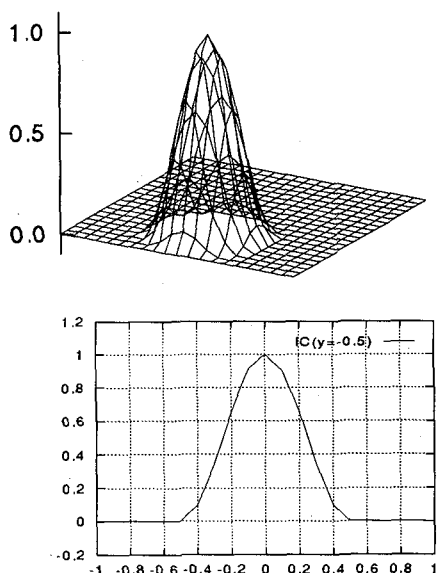
算を進める。厳密解は、 u の形状が理想的にはもとの初期条件と一致する。この 1 周後の u の形状を調べることによって、解の特徴を把握する。

初期条件は、 $u = 0.5(\cos(2\pi r) + 1)$, $r = \{\sqrt{x^2 + (y+0.5)^2} \text{ for } r \leq 0.5\}$ である。要素分割は、 20×20 であり、双 1 次要素を用いる。 Δt は、 $\Delta t = \pi/100, \pi/50, \pi/25$ とする。計算ステップ数は、それぞれ、200, 100, 50 である。SUPG 法、IBTD 法、G 法の計算を行い、全てのケースで計算が可能であった。表-1 にスカラー量 u の最大値 $u_{\max}$ 、最小値 $u_{\min}$ と計算時間の比較を示す。厳密解の $u_{\max}$, $u_{\min}$ は、 $u_{\max} = 1$, $u_{\min} = 0$ である。ここで用いた連立一次方程式解法は、SUPG 法と G 法では、非対称行列用の BCG 法、また、IBTD 法では、対称行列用の CG 法を用いた。図-6 は、 $\Delta t = \pi/100$ のときの cone の 1 周後の形状と $x_2 = -0.5$ における cone の断面図を示す。

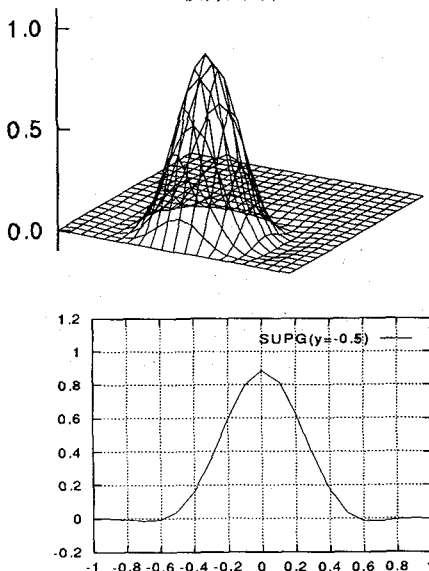
スカラー量の最大値 $u_{\max}$ を見ると、SUPG 法は、 Δt に依存しにくい結果を示し、IBTD 法は、 Δt に依存しているが、SUPG 法よりも解の減衰が小さい。G 法は、SUPG 法と同じように、 Δt に依存しない結果となり、最も 1 に近い値を示している。最小値 $u_{\min}$ を見ると、SUPG 法が、最も誤差が小さく、G 法が最も大きい。この最小値 $u_{\min}$ に示す誤差は、解の位相誤差に対応するものである。計算時間を比較すると、IBTD 法は、SUPG 法と G 法と比較し、約 1/4 倍となっている。BCG 法は、CG 法と比べ 1 回の反復あたり 2 倍の演算量を必要とし、さらに、反復回数も多く必要とするため、SUPG 法や G 法は、計算時間を多く必要としたものと考えられる。1 周後の cone の形状を見ると、SUPG 法は、cone の裾が初期値と比べ、広がっている。cone の先端も鈍角になっている。IBTD 法は、cone の後方で微妙のくぼみが見られるが、最も初期値と近い形状を示している。G 法は、cone の後方に位相遅れによる波が見え、cone の先端が初期値以上に鋭角になっている。また、cone の既に通りが過ぎた flat な部分にも誤差が残っている。

表-1 1 周後のスカラー量 u の比較

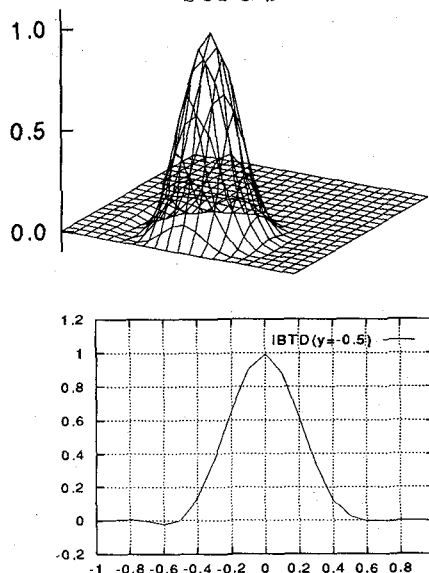
手法	Δt	$\pi/100$	$\pi/50$	$\pi/25$
SUPG	$u_{\max}$	0.8836	0.8854	0.8735
	$u_{\min}$	-0.0186	-0.0184	-0.0512
	CPU[s]	8	19	47
IBTD	$u_{\max}$	0.9914	0.9654	0.9046
	$u_{\min}$	-0.0229	-0.0298	-0.0622
	CPU[s]	2	5	12
G	$u_{\max}$	1.0167	1.0178	0.9885
	$u_{\min}$	-0.0385	-0.0501	-0.1151
	CPU[s]	19	26	40



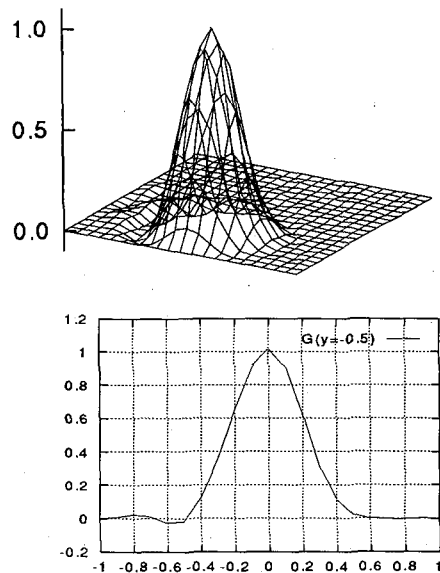
初期条件



SUPG 法



IBTD 法



G 法

図-6 Rotating Cone の計算結果 ($\Delta t = \pi/100$)

3. 非圧縮 NS 方程式の離散化手法

3.1 基礎方程式

非圧縮粘性流れの基礎方程式である非圧縮 Navier-Stokes 方程式は、無次元化することによって、以下の運動方程式と連続式によって表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (24)$$

ここで、 Ω は、境界 Γ で囲まれた解析領域、 $\mathbf{u}$, p は、流速、圧力、 $\mathbf{f}$ は、外力項、また、 $\nu = 1/Re$ であり、 Re は、Reynolds 数である。

時間方向の離散化には、運動方程式 (23) に CN 法を適用し、連続式 (24) は完全陰的に表す。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (26)$$

ここで、 $\mathbf{u}^{n+1/2} = (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1})/2$ である。移流項の移流速度は、本来、 $\mathbf{u}^{n+1/2}$ とすべきであるが、非線形項であるため、Newton 法などの反復解法が必要になる。そこで、本論文では、移流速度を既知流速 $\mathbf{u}^n$ により近似することにより非線形項を取扱うものとする。

圧力 Poisson 方程式は、式 (25) の発散をとり、それの式 (26) を代入することにより得られる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^n - \Delta t \nabla \cdot \{ \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n - \mathbf{f} \} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (27)$$

境界 Γ は、 Γ_1 と Γ_2 に分けられ、それぞれ、運動方程式 (25) と連続式 (26) に対して、以下の境界条件が規

定される。

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (28)$$

$$\{-p^{n+1/2} \mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}^{n+1/2}\} \cdot \mathbf{n} = \hat{t} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (29)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は、単位テンソルを示す。

3.2 SUPG+PSPG 法

SUPG+PSPG 法^[8]は、空間方向の離散化に、Petrov-Galerkin 法の考え方を拡張した安定化有限要素法を用いており、SUPG 法と PSPG 法を組み合わせた手法である。PSPG 法は、流速と圧力の補間関数に同次のものを用いたときに発生する圧力振動を移流項に適用する SUPG 法と同じ原理で安定化させる^[7]ことができ、流速と圧力の補間関数に 1 次要素を用いる P1P1 要素や、双 1 次要素を用いる Q1Q1 要素などの同次補間による解析を可能にする手法である。

流速と圧力の重み関数と試行関数の P1P1 要素や Q1Q1 要素の補間による近似関数を $\mathbf{w}_h, q_h, \mathbf{u}_h, p_h$ とすると、時間方向に離散化された運動方程式 (25) と連続式 (26) に対する SUPG+PSPG 法の重み付き残差方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \left\{ \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1/2} - \mathbf{f}_h \right\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}_h \cdot \{-p_h^{n+1/2} \mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}_h^{n+1/2}\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} (\tau_m \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{w}_h + \tau_c \nabla q_h) \\ & \cdot \left\{ \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1/2} + \nabla p_h^{n+1/2} - \mathbf{f}_h \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_2} \mathbf{w}_h \cdot \hat{t}_h d\Gamma \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 τ_m, τ_c は要素ごとに定義される値である。第 4 項は安定化項と呼び、 τ_m, τ_c の乗されている項は移流項と連続式の Galerkin 法の離散化による不安定性を安定化する働きがあり、SUPG 項、PSPG 項と呼ばれている。この項には、実際には粘性項が含まれるが P1P1 要素や Q1Q1 要素を用いた場合、2 階微分なので消去される。

τ_m と τ_c は一般に以下のような共通の値を用いる。

$$\tau_m = \tau_c = \left(\left(\frac{2 \|\mathbf{u}_h\|}{h} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (31)$$

式 (30) から得られる代数方程式は運動方程式と連続式を連立して解く形となるが、ここでは連続式に含まれる未知の流速を近似して連続式から圧力を求め、その圧力を用いて運動方程式から流速を求める計算を繰り返すことにより解を得る方法を用いる。このとき

連続式の代数方程式の行列の形は対称となり、運動方程式の代数方程式の行列の形は非対称となる。

3.3 IBTD+FS 法

IBTD+FS 法は、運動方程式の離散化に、IBTD 法を適用し、連続式の取り扱いに、圧力 Poisson 方程式 (27) を適用する FS 法^[5,6]を用い、それらを組み合わせた手法である。IBTD 法を用いることにより、安定で高速に計算することができ、FS 法により、流速と圧力を分離して解くことができ、さらに、同次補間を用いることが可能となる。

IBTD 法で用いる時間に関する 2 次の項までを考慮したテーラー展開の形は、以下のように表される。

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{n+1/2}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (32)$$

時間の 2 階の微分項は、運動方程式 (23) を用いて、空間微分に置き換える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} \} \\ &\simeq - \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \{ \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} \} \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla \{ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} \} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial t} \{ \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f} \} \end{aligned} \quad (33)$$

ただし、式 (33) の 1 行目から 2 行目の展開で、移流速度は、時間に依存しないと仮定する。式 (33) を式 (32) に代入するときの最終項の離散化は、以下のものを用いる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ \nabla p^{n+1/2} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/2} \} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \{ \nabla p^{n+1} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1} \} \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t} \{ \nabla p^n - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n - \mathbf{f}^n \} + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (34)$$

式 (23), (33), (34) を式 (32) に代入し、整理すると、IBTD 法による運動方程式の時間方向の離散式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \nabla p^{n+1/2} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} \\ & - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}^n \cdot \nabla \{ \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1/2} \\ & + \nabla p^{n+1/2} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{f} \} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (35)$$

上式と圧力 Poisson 方程式 (27) を Galerkin 法を用いて空間方向の離散化を行うことによって、IBTD+FS 法の重み付き残差方程式を得ることができる。

IBTD+FS 法は、重み関数と試行関数の補間関数に異なったものを用いる Petrov-Galerkin 法の考えに基づき、導くことも可能である。IBTD+FS 法の重み付き残差方程式は、SUPG+PSPG 法の重み付き残差方程式 (30) の τ_m を $\Delta t/2$ 、また、 τ_c を Δt に置き換え、第 4 項に含まれる時間微分項を部分積分し、第 1 項に含

まれる移流項と第3項の発散項の陰的部分を消去することによって得られる。

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + u_h^n \cdot \nabla u_h^n - f_h \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \{ -p_h^{n+1/2} \mathbf{I} + \nu \nabla u_h^{n+1/2} \} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h^n d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left(\frac{\Delta t}{2} u_h^n \cdot \nabla w_h + \Delta t \nabla q_h \right) \\
& \quad \cdot \{ u_h^n \cdot \nabla u_h^{n+1/2} + \nabla p_h^{n+1/2} - f_h \} d\Omega \\
& = \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \{ -p_h^{n+1/2} \mathbf{I} + \nu \nabla u_h^{n+1/2} \} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \left\{ \frac{1}{2} u_h^n (u_h^{n+1} - u_h^n) \right\} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} q_h \{ u_h^{n+1} - u_h^n \} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (36)
\end{aligned}$$

さらに、 w_h と q_h の乗されている項を分割すると、運動方程式と連続式の離散式に分割することができる。

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w_h \cdot \left\{ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + u_h^n \cdot \nabla u_h^n - f_h \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \{ -p_h^{n+1/2} \mathbf{I} + \nu \nabla u_h^{n+1/2} \} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} u_h^n \cdot \nabla w_h \\
& \quad \cdot \{ u_h^n \cdot \nabla u_h^{n+1/2} + \nabla p_h^{n+1/2} - f_h \} d\Omega \\
& = \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \{ -p_h^{n+1/2} \mathbf{I} + \nu \nabla u_h^{n+1/2} \} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_2} w_h \cdot \left\{ \frac{1}{2} u_h^n (u_h^{n+1} - u_h^n) \right\} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h^n d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \Delta t \nabla q_h \cdot \{ u_h^n \cdot \nabla u_h^{n+1/2} + \nabla p_h^{n+1/2} - f_h \} d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma} q_h \{ u_h^{n+1} - u_h^n \} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (38)
\end{aligned}$$

運動方程式の離散式(37)は、IBTD法による運動方程式(35)をGalerkin法により離散化した式と一致する。ところで、従来のBTD法では、移流項のみを考慮し、人工粘性を構築するが、IBTD法では、圧力項、外力項も考慮している。これによって、解の数値的な散逸誤差を軽減することができる。また、連続式の離散式(38)は、FS法で用いる圧力Poisson方程式(27)をGalerkin法により離散化した式と一致する。圧力Poisson方程式を解くことによって連続式を満足させられるため、連続式と圧力Poisson方程式は、実際には同様のものである。式(26)をGalerkin法で空間方向に離散化した連続式は、FS法では完全に満足しないが、FS法で用いている空間方向の離散化手法

は、Petrov-Galerkin法と同等であるため、FS法は、Petrov-Galerkin法による空間方向の離散化に関して非圧縮条件を、満足しているといえる。

運動方程式(37)には未知圧力 $p_h^{n+1/2}$ が、連続式(38)には未知流速 $u_h^{n+1/2}$ がそれぞれ含まれることから、運動方程式(37)と連続式(38)は、連立して解くこととなる。ここでは、連続式(38)の未知の流速 $u_h^{n+1/2}$ を陽的に近似($u_h^{n+1/2} \rightarrow u_h^n$)することによって、連続式(38)から圧力を求め、その圧力を用いて運動方程式(37)から流速を求める方法を用いる。連続式(38)は、SUPG+PSPG法と異なり、発散項に $n+1$ ステップ目の流速 u^{n+1} が存在しないため、繰り返し計算は行わない。連続式(38)、運動方程式(37)の代数方程式の形は、どちらも対称行列となる。よって、IBTD+FS法は、繰り返し計算を行わず、対称行列により計算を行なえるので、SUPG+PSPG法と比べ、記憶容量が少なく、高速に計算することが可能な手法である。

IBTD+FS法では、式(37),(38)に対する境界条件が、以下のように規定される。

$$u^{n+1} = \hat{u} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
& \{ -p_h^{n+1/2} \mathbf{I} + \nu \nabla u_h^{n+1/2} \\
& - \frac{1}{2} u_h^n (u_h^{n+1} - u_h^n) \} \cdot \mathbf{n} = \hat{t}' \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\{ u_h^{n+1} - u_h^n \} \cdot \mathbf{n} = \hat{r} \quad \text{on } \Gamma \quad (41)$$

ところが、分離して連続式(38)を解く段階では、 Γ_2 上での流速 u^{n+1} は、未知であるので、ここでは、式(38)の境界条件を以下のように規定する。

$$\{ u_h^{n+1} - u_h^n \} \cdot \mathbf{n} = \hat{r} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (42)$$

$$p_h^{n+1/2} = \hat{p} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (43)$$

また、このとき Γ_2 上での境界条件(40)は、式(43)により圧力が規定されているので、整合がとていいない。実際には、以下のような境界条件が規定されていることになる。

$$\left\{ \nu \nabla u_h^{n+1/2} - \frac{1}{2} u_h^n (u_h^{n+1} - u_h^n) \right\} \cdot \mathbf{n} = \hat{t}' + \hat{p} \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (44)$$

連続式(38)の Γ_1 上で規定される式(42)は、物体表面で規定するnon-slip条件やslip条件、また、流入境界で規定する一様流の場合、ゼロとなるため、考慮する必要はない。また、 Γ_2 上で規定される式(43),(44)は、流出境界などで無限境界を仮定してゼロとすることが多い。

流体中に置かれた物体の流体力を算出する場合に、Galerkin法やSUPG法では、物体表面上での節点反力の和をとることにより求めることが出来る。これは、重み付き残差方程式の部分積分項が、式(29)と同様の形をしているからである。IBTD+FS法では、部分積分項が、式(40)のようになっているため、一般には、

Galerkin 法や SUPG 法のように節点反力の和により流体力を算出できない。しかしながら、実際には、物体表面上では、non-slip 条件や slip 条件が規定されることから式 (40) の $\frac{1}{2}u^n(u^{n+1} - u^n) \cdot n$ の項は消去される。よって、non-slip 条件や slip 条件が規定されている物体表面上では、節点反力の和により流体力を求めることができる。

3.4 数値解析例

(1) Standing Vortex Problem^[3,8]

この問題の目的は、計算手法がどの程度の数値的な散逸誤差をもつかを調べる問題である。1×1 の領域で非粘性流れを仮定する。初期条件として人工的な渦を発生させ、計算を進める。厳密解は初期条件そのものであるが、安定な計算ならかならず解は減衰する。初期の渦がどの程度の減衰をしたかを調べることによって数値的な散逸誤差を評価する。

初期条件は、 $u_r = 0$, $u_\theta = \{5r \text{ for } r < 0.2, 2 - 5r \text{ for } 0.2 < r < 0.4, 0 \text{ for } r > 0.4\}$ であり、これを図-7 に示す。要素分割は 20 × 20 であり、Q1Q1 要素を用いる。ピークのクーラン数 c を $c = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$ となるように、 Δt を設定し、それぞれ $\Delta t = 0.005, 0.025, 0.05, 0.1$ である。計算回数は $t = 3$ まで行っている。各手法の $t = 3$ の運動エネルギーの相対変化を表-2 に示す。図-8 に $c = 1.0$ のときの運動エネルギーの時刻歴、図-9 に $c = 1.0$ で、 $t = 3.0$ のときの渦度分布図を示す。SUPG+PSPG 法の繰り返し計算数 m は $m = 10$ としている。IBTD+FS(b) は IBTD 法の安定化項に含まれる圧力項を無視し、安定化項に移流項のみを考慮した IBTD+FS 法の結果である。

全ケースで、全てのクーラン数で安定な計算ができた。ここでは、計算時間の比較を示していないが、IBTD+FS 法は、SUPG+PSPG 法と比べ、かなり高速に計算を行うことができた。移流項のみを考慮した IBTD+FS 法では減衰が非常に大きい。それに比べ SUPG+PSPG 法、IBTD+FS 法は解の減衰が小さい。SUPG+PSPG 法は解の減衰はクーラン数に依存しにくい、IBTD+FS 法ではクーラン数に多少依存する。これは、安定化項が Δt に依存する形となっているためである。IBTD+FS(b) のような移流方程式から得られた人工粘性項のみを非圧縮 Navier-Stokes 方程式に導入する手法は一般に多く行われている。しかし、このような手法では、過剰の散逸誤差を含む危険性があると考えられる。安定化の項は、運動方程式の全ての項を考慮する必要があることが言える。

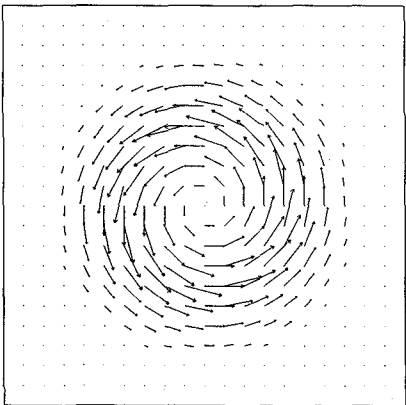


図-7 初期条件

表-2 運動エネルギーの相対変化

クーラン数 c	0.1	0.5	1.0	2.0
SUPG+PSPG	0.924	0.921	0.910	0.867
IBTD+FS	0.987	0.950	0.917	0.870
IBTD+FS(b)	0.821	0.519	0.375	0.252

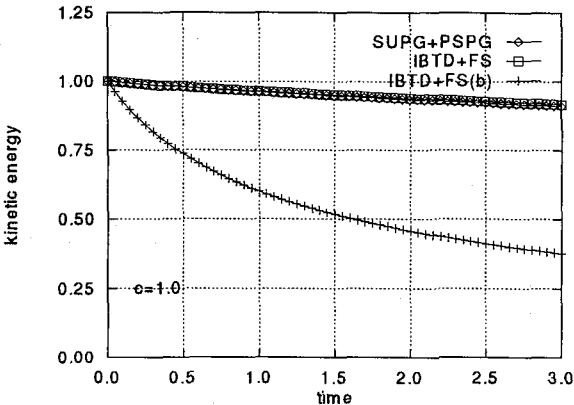
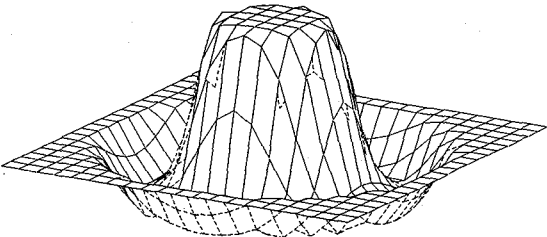
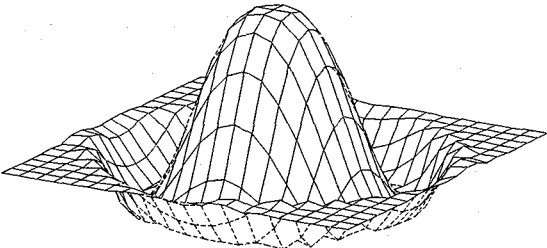


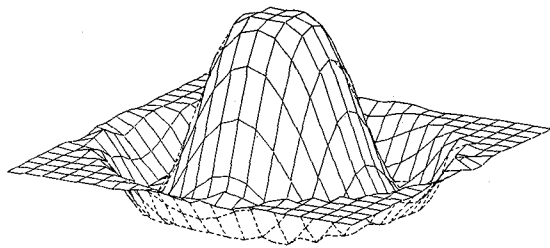
図-8 運動エネルギーの時刻歴 ($c = 1.0$)



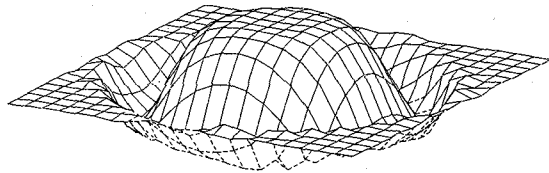
初期条件



SUPG+PSPG 法



IBTD+FS 法



IBTD+FS(b) 法

図-9 渦度分布図 ($c = 1.0, t = 3.0$)

(2) Cavity 内の流れ

定常解を持つ問題の検証として Cavity 内の流れを取り上げた。ここでは、SUPG+PSPG 法と IBTD+FS 法の解の特徴を把握することを主な目的としているため、Reynolds 数と要素分割は、変化させなかった。Reynolds 数 $Re = 400$ とし、要素分割は 32×32 であり、Q1Q1 要素を用いる。計算は定常状態に収束するまで行った。 $\Delta t = 0.001, 0.01$ として計算を行った。表-3 に計算結果と Ghia ら^[11]の結果 (128×128 分割)の比較を示し、図-10 に流速ベクトル図と圧力コンター図を示す。

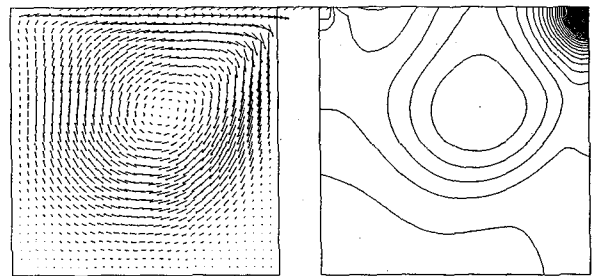
本計算結果は、Ghia らの結果と異なっているが、これは要素分割に起因するものと思われる。SUPG+PSPG 法では、解は Δt に全く依存しない。これは SUPG+PSPG 法の時間微分項がゼロに収束したとき、 Δt に依存する項が、全く存在しなくなるからである。IBTD+FS 法では、解は Δt に大きく依存し、特に Δt が小さいと解の絶対値が大きくなる。 $\Delta t = 0.001$ のときの圧力を見ると、圧力解が振動していることがわかる。これは、IBTD+FS 法の運動方程式と連続式の安定化の項が Δt に依存するためである。特に、 Δt が小さい場合に不安定になりやすい傾向を示す。SUPG 法で τ_m を導くときに、定常状態で最適なものを与える形になっているため、定常に収束する問題では、SUPG 法のほうが解の信頼性は高い。

実際には、要素分割によっても数値的な粘性効果が入るため、物理現象に即した要素分割を行う必要があるが、SUPG+PSPG 法では、粗い要素分割で高 Reynolds 数の計算を行っても、解が振動しにくい。しかし、IBTD+FS 法では、 Δt を小さく取った場合などに解が振動しやすい。このような場合、IBTD+FS

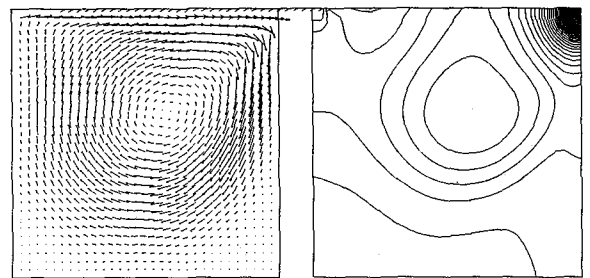
法では、要素分割に即した Δt を選択するか、または、要素分割を細かくする必要がある。どちらにしても、渦のスケールに合わせ、物理現象に即した要素分割を行っていれば、 Δt を極端に小さな値としない限り、解が振動することはないと考えられる。

表-3 Cavity 内の流れの計算結果の比較

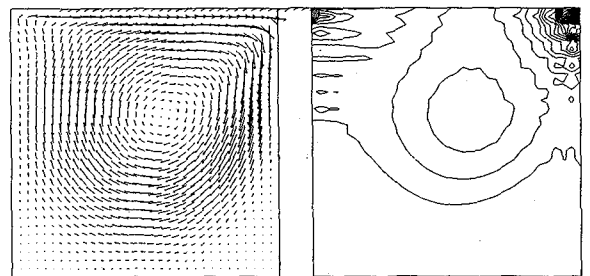
手法	Δt	$\psi_{\min}$	$u_{\min}$	$v_{\min}$	$v_{\max}$
SUPG	0.001	-0.0881	-0.242	-0.486	0.216
+PSPG	0.01	-0.0881	-0.242	-0.486	0.216
IBTD	0.001	-0.0921	-0.255	-0.527	0.230
+FS	0.01	-0.0911	-0.251	-0.513	0.227
Ghia et al.		-0.1139	-0.327	-0.450	0.302



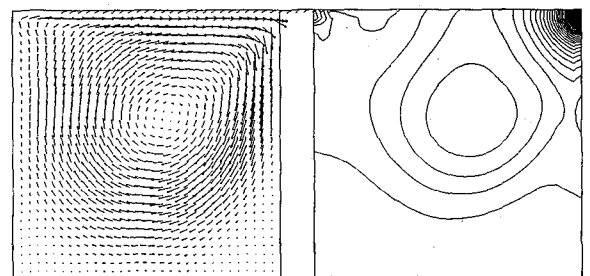
SUPG+PSPG 法 ($\Delta t = 0.001$)



SUPG+PSPG 法 ($\Delta t = 0.01$)



IBTD+FS 法 ($\Delta t = 0.001$)



IBTD+FS 法 ($\Delta t = 0.01$)

図-10 Cavity 内の流れの計算結果

4. おわりに

本論文では、移流項の卓越する方程式系の有限要素法による離散化手法として、2次精度のBTD法を陰的に改良したIBTD法を提案した。IBTD法は、時間に関する2階の微分項を空間微分に置き換える操作の段階で、方程式を直接用いることによって、完全に2次精度を保証することができ、さらに、代数方程式の行列の形が、対称となるため、計算効率の面でも優れた手法である。また、本手法の離散式は、時間方向の離散化にCN法を適用した式にPetrov-Galerkin法を用いても導くことができる。よって、本手法は、Petrov-Galerkin法の一つと考えることも可能である。

1次元の移流方程式に対して、Neumannの安定性解析を行なうことによって、IBTD法が、無条件安定の手法となり、散逸誤差と位相誤差を小さく見積もることのできる手法であることを示した。Rotating Coneの解析により、安定性解析で得られた成果を2次元のBenchmark問題により確認した。また、IBTD法は、SUPG法、G法と比較し、約4倍高速に計算することができ、計算時間の面でもIBTD法が、優れていることを確認した。

非圧縮Navier-Stokes方程式の離散化では、運動方程式にIBTD法を適用し、連続式の取扱にFS法を用いた手法を組み合わせたIBTD+FS法による離散化手法を提案した。この手法もまた、Petrov-Galerkin法を用いても導くことができるため、安定化有限要素法の一つの手法と考えることも可能である。

Standing Vortex Problemでは、IBTD+FS法は、安定化項に含まれるすべての項を考慮すれば、安定であり、非常に散逸誤差の少ない手法であることを示した。また、移流項の離散化の不安定性を解消するのに、移流項のみを考慮するだけでは、過剰な散逸誤差を含む解となる危険性を指摘した。すなわち、方程式の各項ごとに離散化を行なうのではなく、方程式全体に重み付けをする必要がある。

Cavity内の流れの解析では、IBTD+FS法の解が、 Δt に依存しやすいという問題点を指摘した。特に極端に小さい Δt を用いた場合、圧力解に振動が生じやすい。圧力解の振動は、極端に小さい Δt を用いた場合に起こるだけではなく、高Reynolds数流れの問題で、物理現象に即していない要素分割を行なった場合にも発生する。これは、要素分割に即した Δt の選択を行なうか、また、より細かい要素分割を用いることによって解消できる。

IBTD+FS法は、対称行列の陰的解法であるため、高速で安定に計算することができ、精度面でも散逸誤差と位相誤差の少ない手法である。よって、境界層に極

端に微細な要素分割が必要な構造物まわりの流れ^[9,10]に代表される高Reynolds数の直接計算に適していると考えられる。今後、より現実的な問題を行ない、現実問題の適用性を検討していく予定である。

参考文献

- 1) A.N. Brooks and T.J.R. Hughes, Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 32 (1982) pp.199-259.
- 2) P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee and C.D. Upson, A modified finite element method for the solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, Part 1 & 2, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.4 (1984), pp.557-598 & pp.619-640.
- 3) P.M. Gresho and S.T. Chan, Semi-consistent mass matrix techniques for solving the incompressible Navier-Stokes equations, Lawrence Livermore National Laboratory, Preprint UCRL-99503 (1988).
- 4) V. Selmin, J. Donea and L. Quartapelle, Finite element methods for nonlinear advection, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 52 (1985) pp.817-845.
- 5) Shimura M. and M. Kawahara, Two dimensional finite element flow analysis using the velocity correction method, *proc. of JSCE No.398 / I-10*, (1988), pp.51-59.
- 6) M. Hayashi, K. Hatanaka and M. Kawahara, Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol.13 (1991), pp.805-840.
- 7) T.J.R. Hughes, L.P. Franca and M. Balestra, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 59 (1986), pp.85-99.
- 8) T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih, Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 95 (1992), pp.221-242.
- 9) 丸岡・太田・平野・川原, 広範囲な Reynolds 数域での円柱まわりの流れの2次元計算, 第14回風工学シンポジウム論文集, (1996).
- 10) 太田・丸岡・平野・川原, 亜臨海域における円柱まわりの3次元流れの数値解析, 第14回風工学シンポジウム論文集, (1996).
- 11) U. Ghia, K. N. Chia and C. T. Shin, High resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.* 43 (1982), pp.347-411.

(1996年9月6日受付)