

時間域積分表現式による軌道振動解析法

TIME DOMAIN INTEGRAL REPRESENTATION FOR TRACK VIBRATION ANALYSIS

阿部和久*, 古田 勝**

Kazuhisa ABE and Masaru FURUTA

*工博 新潟大学助教授 工学部建設学科(〒950-21 新潟市五十嵐二の町8050番地)

**東京都交通局

A time domain integral representation is derived for beam dynamics and applied to track vibration problems. In the integral representation, loads caused by wheels are modeled by moving loads. The moving loads and reaction from railpads are discretized by stepwise constant functions in time domain. Evaluation of matrix coefficients, which are derived through the discretization of the integral representation, is discussed in detail. The proposed method is applied to wheel/rail/sleeper interaction problems. Through the numerical examples, effect of corrugation on the track vibration is investigated. Since, in the developed method, the solution is constructed in the time domain, non-linearity in the model can be taken into account readily.

Key Words : track vibration, moving load, integral representation, time domain

1. はじめに

近年, 列車走行に伴い発生する振動・騒音の問題は, 周辺環境へ及ぼす影響といった面から益々重要な問題となりつつあり, 低ばね係数の軌道パッドの敷設¹⁾や, 防振まくら木の採用など, 様々な対策が構じられている. 一方, 軌道の振動は, 車輪, レール, まくら木などの相互作用によって起こる動的現象であるが, この力学系をモデル化し, 振動の発生機構の解明や, 振動対策の評価に用いようとする試みもなされている. 軌道振動系のモデルとして, 従来は質点モデルが多く用いられていたが, 近年になって走行荷重下の連続ばりモデルによる, より現実に近い解析がなされるようになって来ている²⁻⁶⁾. これまで適用されて来た連続ばりモデルには, 弾性床上のはりとして扱ったものや, 離散支持ばね上のはりとしているものなどがあるが, その多くは系全体の運動方程式を周波数域へ変換し, 像空間で解く方法によっている. そのような解法による場合, 車輪とレールの接触力や, パッド, バラストなどにおける非線形挙動を直接的に評価することは不可能となる. なお, 軌道振動の直接的原因として, レール頭頂面に発生した波状摩耗と呼ばれる凹凸があげられるが, その発生機構には未解明な点も多く, その解明には軌道振動系の適切なモデル化と, それによる解析とが有用であり, 振動系に非線形効果を考慮

した解法の構成が望まれる³⁾. また, これまで提案されている解法には, レールやまくら木などの軌道系全体に対する Green 関数を用いているものもあるが, この場合, 例えば直結軌道と, まくら木支持とでは別途定式化を行う必要があり, 汎用性に欠けるように思われる.

以上の点に鑑み, 本研究では時間域でのはりの動的解析法の構成を試みる. まず, 走行荷重下のはりの動的挙動を時間域積分表現式で表す. 次に, そのために必要となる時間域の Green 関数を求める. なお, 走行荷重やレール締結部の反力などはモデル化の方法によって容易に変更し得るように, レールに作用する外力として扱い, 任意外力下でのレールの動的応答を与える積分表現式を上述のはり単体の系に対する Green 関数を用いて与え, それを時間方向に離散化した式を求める. また, 離散化において必要となる係数行列成分の具体的な計算方法について検討する. 最後に, 簡単な適用例として, 車輪・レール・まくら木で構成された振動系の動的応答解析の結果を示し, 本手法の適用性について検討する.

2. はりのたわみに対する積分表現式

曲げ剛性 EI , 長さ ℓ の Euler ばりを考える. なお, 簡単のため, 両端において曲げモーメント M , せん断力 Q は共に作用していないものとする. また, 荷重は上載

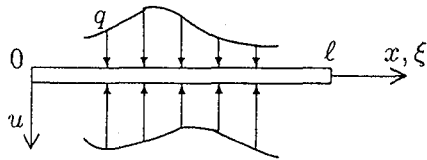


図-1 座標系と諸条件

されているものと下方からの反力とを合わせ q と書く (図-1)。

はりの運動方程式は次式で与えられる。

$$EIu'''' + \rho A \ddot{u} = q \quad (1)$$

ここで、 u はたわみ、 $(\cdot)' = \partial/\partial \xi$ 、 $(\cdot)'' = \partial/\partial t$ であり、 ρ は質量密度、 A ははりの断面積である。

二つの力学状態 u と u^* を考え、次の積分をとる。

$$\int_0^\ell EIu'' * u^{*''} d\xi \quad (2)$$

ここで、 $*$ は合成積を意味し、次式で定義されるものである。

$$g * f = \int_0^t g(t)f(t-\tau) d\tau \quad (3)$$

式(2)に部分積分を施し、 u の微分を u^* へ移すと次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_0^\ell EIu'' * u^{*''} d\xi &= [-\theta * M^* + u * Q^*]_0^\ell \\ &+ \int_0^\ell u * (EIu^{*''''}) d\xi \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、

$$M^* = -EIu^{*''}, Q^* = -EIu^{*'''}, \theta = \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (5)$$

式(4)の被積分項に、式(1)の運動方程式を用いると次式となる。

$$\begin{aligned} \int_0^\ell EIu'' * u^{*''} d\xi &= [-\theta * M^* + u * Q^*]_0^\ell \\ &+ \int_0^\ell u * (q - \rho A \ddot{u}) d\xi \quad (6) \end{aligned}$$

同様に、式(2)に対し、 u^* の微分を u へ移すように部分積分を行うと、 $M(0) = M(\ell) = 0, Q(0) = Q(\ell) = 0$ より、次式を得る。

$$\int_0^\ell EIu'' * u^{*''} d\xi = \int_0^\ell u^* * (q - \rho A \ddot{u}) d\xi \quad (7)$$

また、式(6)で $u * \ddot{u}^*$ を部分積分すると次式を得る。

$$u * \ddot{u}^* = [\dot{u}^*(\tau)u(t-\tau) + u^*(\tau)\dot{u}(t-\tau)]_0^t + u^* * \ddot{u} \quad (8)$$

ここで、初期条件として、 $u(t=0) = \dot{u}(t=0) = 0$ とすると、

$$u * \ddot{u}^* = -\dot{u}_0^* u - u_0^* \dot{u} + u^* * \ddot{u} \quad (9)$$

ここで、 $u_0^* = u^*(t=0)$ 、 $\dot{u}_0^* = \dot{u}^*(t=0)$ である。

式(6)と(7)の右辺を等しくおき、さらに式(9)を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u * q^* d\xi &= -\rho A \int_0^\ell (\dot{u}_0^* u - u_0^* \dot{u}) d\xi \\ &+ [\theta * M^* - u * Q^*]_0^\ell \\ &+ \int_0^\ell u^* * q d\xi \quad (10) \end{aligned}$$

ここで、 q^* として $\tau=0$ 、 $\xi=x$ に加えられる単位衝撃荷重を考える。

$$q^* = \delta(\xi - x)\delta(\tau) \quad (11)$$

ここで、 δ は Dirac のデルタ関数である。また、 $u^* = 0(\tau \leq 0)$ とすると、式(10)より、次のたわみ $u(x, t)$ に対する積分表現式を得る。

$$u(x, t) = [\theta * M^* - u * Q^*]_0^\ell + \int_0^\ell u^* * q d\xi \quad (12)$$

また、無限長のはりであれば次式となる。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^\infty u^* * q d\xi \quad (13)$$

3. Green 関数 u^*

Green 関数 u^* は次式をみす。

$$\begin{aligned} EIu^{*''''} + \rho A \ddot{u}^* &= \delta(\xi)\delta(\tau), \\ u^*(\tau \leq 0) &= 0 \quad (14) \end{aligned}$$

なお、式(11)の荷重条件に対応する u^* は、式(14)で ξ を $\xi - x$ としたものにより与えられる。ここでは式(14)をみす無限長はりを考える。

まず、式(14)の微分方程式を空間方向に Fourier 変換すると、次式を得る。

$$EI k^4 U^* + \rho A \ddot{U}^* = \delta(\tau) \quad (15)$$

ここで、 U^* は u^* の Fourier 変換で、次式で定義されたものである。

$$U^* = \int_{-\infty}^\infty u^* e^{-ik\xi} d\xi \quad (16)$$

なお、式(16)で $i^2 = -1$ である。

式(15)で $U^*(\tau \leq 0) = 0$ をみす解は次式で与えられる。

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{EI\rho A}} \cdot \frac{1}{k^2} H(\tau) \sin \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} k^2 \tau \quad (17)$$

ここで、 H は Heaviside のステップ関数である。

u^* は式(17)の逆 Fourier 変換により与えられる。

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{H(\tau)}{\sqrt{EI\rho A}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{k^2} \sin(\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} k^2 \tau) e^{ik\xi} dk \quad (18)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{k^2} \sin(ak^2) e^{ik\xi} dk &= \pi \xi [S(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi a}}) - C(\frac{\xi}{\sqrt{2\pi a}})] \\ &+ 2\sqrt{\pi a} \sin(\frac{\xi^2}{4a} + \frac{\pi}{4}) \quad (a > 0) \quad (19) \end{aligned}$$

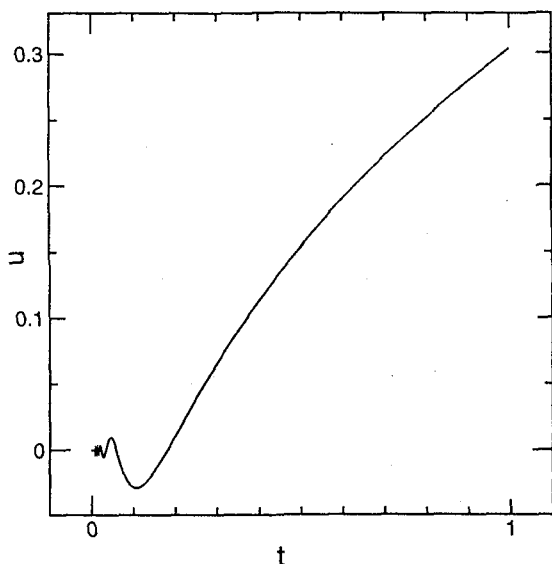


図-2 u^* の時間方向の変化

となる⁷⁾。なお、 S, C は次式で与えられる Fresnel の関数である。

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \\ C(x) &= \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \end{aligned} \quad (20)$$

以上より、 u^* は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{H(\tau)\xi}{2\sqrt{EI\rho A}} \left[S\left(\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{2\pi\tau}}\right) - C\left(\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{2\pi\tau}}\right) \right] \\ &+ \frac{H(\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt[4]{EI\rho A}\sqrt{\pi\rho A}} \sin\left(\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi^2}{4\tau} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)の u^* において、 $\xi = \sqrt[4]{EI/\rho A}$ と ξ を固定し、時間方向の変化の様子を調べると、 $\sqrt[4]{EI\rho A} \cdot \sqrt{\rho A} u^*$ は図-2 のようになる。载荷点 $\xi = 0$ から発生した振動は高周波のものから順に観測点へ到達し、低周波成分ほど振幅が増大しており、逆に $\tau = 0$ に近づくにつれ、振動周期、振幅は共にゼロに近付いて行く。次に、 $\tau = \sqrt[4]{\rho A/EI}$ と時刻を固定し、その瞬間における空間方向の変化の様子を調べると、 $\sqrt{EI\rho A} u^*$ は図-3 のようになる。波長の短い成分から順に振動が伝わって行く様子がわかる。

4. レールのたわみ式の離散化

4.1 積分表現式の離散化

無限長はりの上を n 個の連行荷重 ($P_1, P_2, \dots, P_n$) が定速度 c で走行する場合を考える。なお、レールは図-4 に示すように、 N 個の離散点で支持されているものとする。移動荷重の $t = 0$ における位置を x_i ($i = 1, \dots, n$)、 N 個の反力と、その作用位置はそれぞれ、 F_i, a_i ($i = 1, \dots, N$) とする。

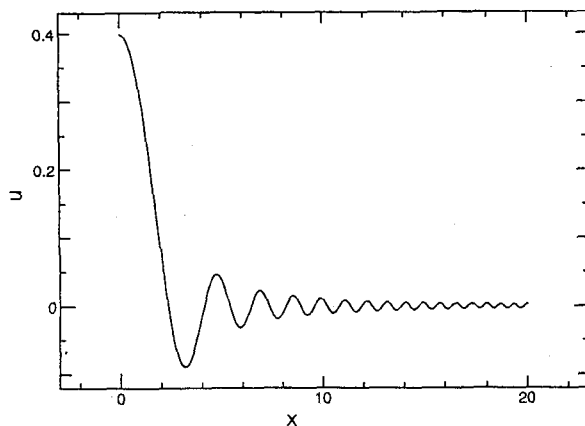


図-3 u^* の空間方向の変化

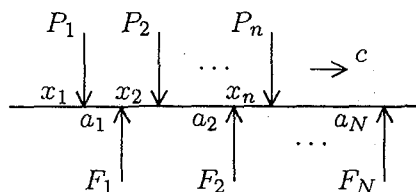


図-4 レールに作用する外荷重

この問題において、はりに作用する外力 q は次式で与えられる。

$$q = \sum^n P_i(\tau) \delta(\xi - x_i - c\tau) - \sum^N F_i(\tau) \delta(\xi - a_i) \quad (22)$$

式(22)を、はりのたわみ u の積分表現式(13)に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum^n \int_0^t u^*(x_i - x + c(t - \tau), \tau) P_i(t - \tau) d\tau \\ &- \sum^N \int_0^t u^*(a_i - x, \tau) F_i(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、時刻 t を時間増分 Δt で分割し、外力 P_i, F_i を区間一定の関数で離散化する。

$$P_i(t) = \sum^M P_i^m \psi_m(t), \quad F_i(t) = \sum^M F_i^m \psi_m(t) \quad (24)$$

ここで、 $t_m = m\Delta t$ とすると、 $P_i^m = P_i(t_m), F_i^m = F_i(t_m)$ である。また、 ψ_m は時間方向の補間関数で、区間一定とした場合、図-5 のような関数になる。なお、外力の離散化に高次関数を用いれば、精度はさらに向上すると考えられるが、以下の解析例で示すように、区間一定による近似でも安定性、精度共に十分に良好な結果を得ることができる。

式(24)を(23)に代入すると、たわみ u の積分表現式の離散化式を得る。特に、 $x = x_i + ct_M$ とすると、走行荷重 P_i の作用位置における、はりのたわみ量が与えられ、それは次式のようになる。

$$u(x_i + ct_M, t_M) = \sum^n \sum^M A_{ij}^{M-m+1} P_j^m$$

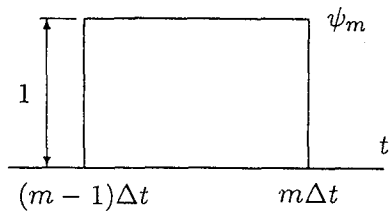


図-5 補間関数 ψ_m

$$-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij}^{M,M-m+1} F_j^m \quad (25)$$

ここで、係数 $A_{ij}^m, B_{ij}^{M,m}$ は次式で定義される。

$$A_{ij}^m = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(x_j - x_i - c\tau, \tau) d\tau,$$

$$B_{ij}^{M,m} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(a_j - x_i - ct_M, \tau) d\tau \quad (26)$$

また、 $x = a_i$ とおくと、反力の作用位置におけるたわみ量が与えられ、それは次式のようにになる。

$$u(a_i, t_M) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M C_{ij}^{M,M-m+1} P_j^m - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M D_{ij}^{M-m+1} F_j^m \quad (27)$$

ここで、係数 $C_{ij}^{M,m}, D_{ij}^m$ は次式で定義される。

$$C_{ij}^{M,m} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(x_j - a_i + c(t_M - \tau), \tau) d\tau,$$

$$D_{ij}^m = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(a_j - a_i, \tau) d\tau \quad (28)$$

係数 A_{ij}^m, D_{ij}^m は次の積分型により与えられる。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} u^*(\xi, \tau) d\tau \quad (29)$$

一方、係数 $B_{ij}^{M,m}, C_{ij}^{M,m}$ は次の積分型により与えられる。

$$J = \int_{t_1}^{t_2} u^*(\xi - c\tau, \tau) d\tau \quad (30)$$

式(25),(27)における外力 P_j^m, F_j^m は任意であり、採用したモデルにより設定の方法を適宜変えれば良い。例えば、 P_j^m が一定荷重であれば、その値は既知量となり、また車輪との接触力であれば、 P_j^m を未知量として扱い、車輪の力学モデルをここに展開したはりモデルと結合すれば良い。

4.2 積分 I の計算

式(29)の積分 I は解析的に求めることができ、 $\xi \neq 0$ において次式で与えられる。

$$I = \frac{|\xi|^3}{EI} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\zeta} \right) S \left(\sqrt{\frac{\zeta}{2\pi}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\zeta} \right) C \left(\sqrt{\frac{\zeta}{2\pi}} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{6\sqrt{2\pi\zeta}} \left(1 + \frac{4}{\zeta} \right) \sin \frac{\zeta}{4} \right. \\ \left. + \frac{1}{6\sqrt{2\pi\zeta}} \left(1 - \frac{4}{\zeta} \right) \cos \frac{\zeta}{4} \right] \Big|_{\zeta_2}^{\zeta_1} \quad (31)$$

ここで、

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi^2}{t_1}, \quad \zeta_2 = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{\xi^2}{t_2} \quad (32)$$

また、 $\xi = 0$ のとき、 I は次式となる。

$$I = \frac{2}{3\sqrt[4]{EI\rho A\sqrt{2\pi\rho A}}} \left[\tau^{3/2} \right]_{t_1}^{t_2} \quad (33)$$

4.3 積分 J の計算

(1) $\xi \neq 0$ の場合

積分 J は、Fresnel 関数の項を部分積分すると、次式のようにになる。

$$J = \frac{1}{2\sqrt{EI\rho A}} \left[\left(\xi\tau - \frac{c}{2}\tau^2 \right) \left\{ S \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta \right) - C \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta \right) \right\} \right]_{t_1}^{t_2} \\ + \frac{1}{4\sqrt[4]{EI\rho A\sqrt{2\pi EI}}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left(\xi - \frac{c}{2}\tau \right) (\xi + c\tau)}{\sqrt{\tau}} \cdot [\sin(\theta) - \cos(\theta)] d\tau \\ + \frac{1}{4\sqrt[4]{EI\rho A\sqrt{2\pi\rho A}}} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\tau} [\sin(\theta) + \cos(\theta)] d\tau \quad (34)$$

ここで、三角関数の媒介変数 θ は次式で与えられるものである。

$$\theta = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{(\xi - c\tau)^2}{4\tau} \quad (35)$$

$\theta(\tau)$ は $\tau = |\xi|/c$ で最小となり、 $\tau \rightarrow \infty$ で

$$\theta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} (-2c\xi + c^2\tau) \quad (36)$$

に漸近し、 $\tau < |\xi|/c$ で単調減少、 $\tau > |\xi|/c$ で単調増加する。そこで、式(34)の積分区間 $[t_1, t_2]$ を $[t_1, |\xi|/c], [|\xi|/c, t_2]$ の2つに分割し、各々を数値積分により求める。

まず、 $[t_1, |\xi|/c]$ の積分方法について述べる。この区間の積分に対しては $\tau = 1/s$ と変数変換し、 τ に関する積分を s に関するものに置換する。

$$\int_{t_1}^{|\xi|/c} u^*(\xi - c\tau, \tau) d\tau \\ = \frac{1}{2\sqrt{EI\rho A}} \cdot \left[\left(\xi\tau - \frac{c}{2}\tau^2 \right) \left\{ S \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\theta \right) - C \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\theta \right) \right\} \right]_{t_1}^{|\xi|/c} \\ + \frac{1}{4\sqrt[4]{EI\rho A\sqrt{2\pi EI}}} \int_{c/|\xi|}^{1/t_1} \frac{1}{s\sqrt{s}} \left(\xi - \frac{c}{2s} \right) \left(\xi + \frac{c}{s} \right) [\sin(\vartheta) - \cos(\vartheta)] ds \\ + \frac{1}{4\sqrt[4]{EI\rho A\sqrt{2\pi\rho A}}} \int_{c/|\xi|}^{1/t_1} \frac{1}{s^2\sqrt{s}} [\sin(\vartheta) + \cos(\vartheta)] ds \quad (37)$$

ここで、三角関数の媒介変数 ϑ は次式で与えられるものである。

$$\vartheta(s) = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{s}{4} \left(\xi - \frac{c}{s} \right)^2 \quad (38)$$

ϑ は $s \geq c/|\xi|$ で単調増加関数となる。式(37)において、被積分関数は三角関数を含むので振動する。そこで、 $t_1 \neq 0$ においては式(37)の三角関数の位相 ϑ が π ずつ増加するように、積分区間 $[c/|\xi|, 1/t_1]$ を $[s_1, s_2], [s_2, s_3], \dots$ と分割し、各小区間に対し数値積分を行う。なお、数値積分には Gauss の求積法を用いる。

$t_1 = 0$ の場合、図-2に示したように、 $t = 0$ の近傍で無限の振動が入り、式(37)における積分区間は $[c/|\xi|, \infty]$ となり、積分範囲の上端は無限大となる。この場合、式(37)の被積分関数の振幅は $1/s\sqrt{s}$ または $1/s^2\sqrt{s}$ のオーダーで s の増加と共に減少する。そこで、基本的には $t_1 \neq 0$ の場合と同様に、小区間 $[s_1, s_2], [s_2, s_3], \dots$ に対し順次数値積分を行い、積分が十分収束するまで小区間の積分結果を加算して行く方法を採用する。なお、積分値の収束を加速するために Aitken 法を併用した。

また、条件により、積分の収束が非常に遅くなる場合がある。そのため、積分区間 $[c/|\xi|, \infty]$ をさらに $[c/|\xi|, \bar{s}], [\bar{s}, \infty]$ と二分する。ここで、 $\bar{s}$ は次式により与えられる値である。

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{c^2}{\bar{s}} = \alpha \quad (\alpha: \text{十分小さい値}) \quad (39)$$

最初の積分範囲 $[c/|\xi|, \bar{s}]$ に対しては、上述のとおり、小区間毎に数値積分を行う。なお、この範囲内で積分が収束した場合には、その結果を積分値に用いる。 $[c/|\xi|, \bar{s}]$ の範囲内の積分で収束が得られなかった場合、さらに $[\bar{s}, \infty]$ の区間の積分の近似を解析的に求める。

例えば、 $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{c^2}{\bar{s}} \ll 1$ の場合、式(37)において、

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \approx & \sin \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} s \xi^2 \left[\cos \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} 2c\xi \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \cdot \frac{c^2}{s} \sin \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} 2c\xi \right) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

と近似できるので、式(37)における各積分項は、次の積分型により近似評価できる。

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{s}}^{\infty} \frac{1}{s^{\beta}} \sin as \, ds, \quad \int_{\bar{s}}^{\infty} \frac{1}{s^{\beta}} \cos as \, ds, \\ a = & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \xi^2 \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、 β は式(37)の被積分関数の振幅項より与えられる次数である。式(41)の積分は解析的に求める。

$t_1 = 0$ の場合で、 ξ と $c\Delta t$ とが同オーダーのとき、式(37)の被積分関数の振幅は ϑ が π だけ進む最初の小区間 $[s_1, s_2]$ において急減少し、無限積分の主要部分は、この積分区間の内、 s_1 近傍のごく一部の範囲で与えられる。よって、 $[s_1, s_2]$ を一区間として数値積分を行うと、ほとんどの積分点で被積分関数がほぼゼロとなり、積分精度が大幅に低下する。そのため、このような場合には、 $[s_1, s_2]$ をさらに細分割し、細分割区間に対し数値積分を適用した。

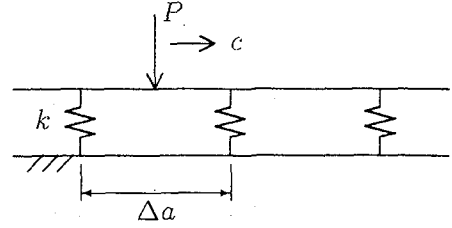


図-6 走行荷重下のばね支持されたはり

次に $|\xi|/c, t_2]$ での積分方法について述べる。この範囲の積分に対しては、式(35)の θ に対して位相が π ずつ増加するように積分区間 $|\xi|/c, t_2]$ を分割し、各小区間に対し数値積分を適用する。

(2) $\xi = 0$ の場合

この場合の J は解析的に求める。

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{\sqrt{EI\rho A}} \left[\left(\frac{c\tau^2}{4} - \frac{EI}{c^2\rho A} \right) \left(S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma\right) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma\right) \right) \right]_{t_1}^{t_2} \\ & + \frac{1}{\sqrt{EI\rho A}\sqrt{2\pi\rho A}} \left[\left(\frac{\tau\sqrt{\tau}}{2} - \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{\sqrt{\tau}}{c^2} \right) \cos(\gamma) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\tau\sqrt{\tau}}{2} + \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{\sqrt{\tau}}{c^2} \right) \sin(\gamma) \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、 γ は次式で定義されたものである。

$$\gamma = \frac{c^2}{4} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \tau \quad (43)$$

5. 解析例に基づく検討

5.1 定荷重走行下のばね支持されたはり

4. に構成した、はりの動的たわみに対する積分表現式の妥当性について検討するため、ここでは図-6に示すような、ばね支持されたはりの動的応答解析に本手法を適用した。なお、図-6において、荷重 P は一定とし、定速度 c で走行するものとする。また、はりを支持しているばねのばね定数は k とし、支持間隔 Δa は一定とする。

まず、当該問題の解析に当り必要となる、方程式系の構成過程について示す。

ばね支持されている位置における、はりのたわみ量を与える式(27)は、本問題の場合、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_i^M = & \sum_{m=0}^M C_i^{M, M-m+1} P^m - \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} D_{ij}^{M-m+1} F_j^m \\ & - \sum_{j=1}^N D_{ij}^1 F_j^M \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、 $u_i^M = u(a_i, t_M)$ とする。

式(44)において、 $F_j^m (m < M)$ は第 M ステップの解析段階においては既知である。また、はりはばね定数 k のばねにより支持されているので、第 M ステップにおけるばねからの反力 F_j^M は次式で与えられる。

$$F_j^M = k u_j^M \quad (45)$$

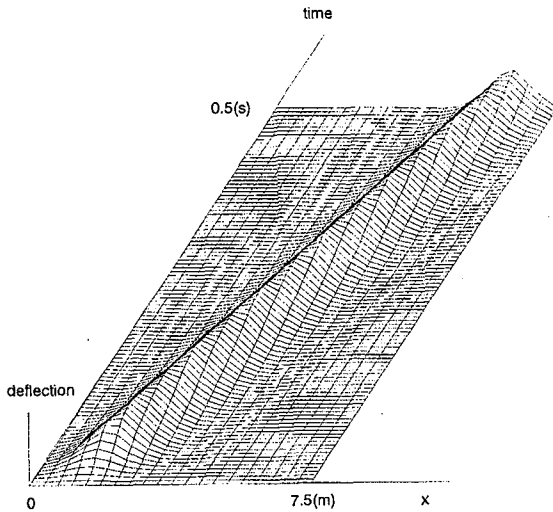


図-7 はりのたわみ形状の時刻歴

式(45)を(44)へ代入すると次式を得る.

$$\sum_{j=1}^N (\delta_{ij} + k D_{ij}^1) u_j^M = \sum_{i=1}^M C_i^{M, M-m+1} P^m - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} D_{ij}^m F_j^m \quad (46)$$

ここで, δ_{ij} は Kronecker のデルタである.

式(46)において未知量は各ばね支持点におけるはりのたわみ u_j^M であるから, この連立方程式を u_j^M について解けば良いこととなる.

以上に示した方程式を用い, はりの動的応答解析を行った. なお, 解析において, 走行荷重 $P=9800$ N, 走行速度 $c=10$ m/s, はりの曲げ剛性 $EI=4$ MN/m², はりの単位長さ当りの質量 $\rho A=50$ Kg/m, ばね定数 $k=100$ MN/m とし, 時間増分 $\Delta t=0.001$ sec の下で 0.5 sec までの計算を行った. ばねは無限ばりの 7.5 m 区間に 11 本等間隔に配置 ($\Delta a=75$ cm) し, 初期時刻の荷重位置は, 左端のばね支持点から 1.25m の位置とした. また, 載荷直後の過渡応答を最小限に抑える目的で, $t=0.05$ sec までの間において, 荷重 P の値を漸増させた.

はり全体のたわみ形状の時刻歴を図-7に示す. 荷重の移動に伴い, たわみが最大となる位置も移動して行く様子が確認できる.

次に, 解法の安定性について調べる目的で, 同一問題に対し, $\Delta t=0.01$ sec とした場合, および $\Delta t=0.05$ sec とした場合での解析を行った. 中央ばね支持点におけるはりのたわみの時刻歴を $\Delta t=0.001$ sec の場合と合わせ図-8に示す. なお, $\Delta t=0.001$ sec の場合, 1 ステップ間に荷重は 1 cm 進む. $\Delta t=0.01$ sec の場合には 10 cm, $\Delta t=0.05$ sec の場合では 50 cm 進むこととなる. 図-8より, いずれの時間増分に対しても, たわみの値自体に大きな差は生じていないことがわかる. $\Delta t=0.05$ sec の場合, 走行荷重は 1 ステップの間に, ばね支持間隔 (75cm)

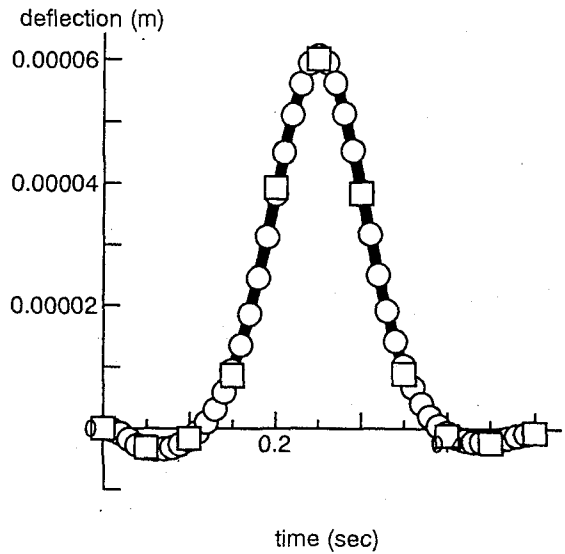


図-8 中央ばね支持点におけるはりのたわみの時刻歴; ●: $\Delta t=0.001$ sec, ○: $\Delta t=0.01$ sec, □: $\Delta t=0.05$ sec

に近い距離を移動していることとなるが, そのように大きな時間増分の下でも大幅な精度低下はなく, 本研究で構成した解法が基本的に非常に安定であることがわかる.

式(44)で, 係数 D_{ij}^m は各ステップで係数行列を 1 つずつ追加すればよく, さらに $D_{ij}^m = D_{ji}^m$ ($|i-j|=|k-l|$) なる関係があり, 解析的計算によれば作成に費やす時間は相対的にわずかなものとなる. 一方, $C_i^{M,m}$ は各ステップで $m=1, \dots, M$ の全成分を新たに作成する必要があり, 計算時間の大部分はこれに費やされる. ちなみに, 当該問題に対し, $\Delta t=0.001$ sec, 500 ステップの計算で約 30 秒を要した (VT-Alpha433 による).

5.2 車輪・レール・まくら木系の解析

図-9に示す車輪・レール・まくら木系の応答解析に本手法を適用した. なお, 車輪とレール間の接触力や, パッドからレールに作用する反力などは, 系全体の動的相互作用の下で与えられる. ここでは, 車輪とまくら木の運動方程式に陰解法に基づく時間積分法を導入し, はりのたわみ式(25),(27)と連立して解く方法を探った. 本論文では, はりのたわみ式の時間域での構成が主な目的であるので, ここでは車輪やまくら木との連成モデルに対する求解方程式の構成については触れず, 解析結果のみ示す. なお, 連成モデルの定式過程については紙面を改め報告するつもりである.

解析において, 車輪は単一とし, 車輪には一定荷重 P が載荷されているものとした. また, まくら木は無限ばりの 7.5m 区間に 11 本等間隔に配置し ($\Delta a=75$ cm), $t=0$ で車輪を左端まくら木から 1.25m の位置においた. 5.1 に示したように, はりの解析に用いている積分表現式自体は非常に安定である. したがって, 解析で必

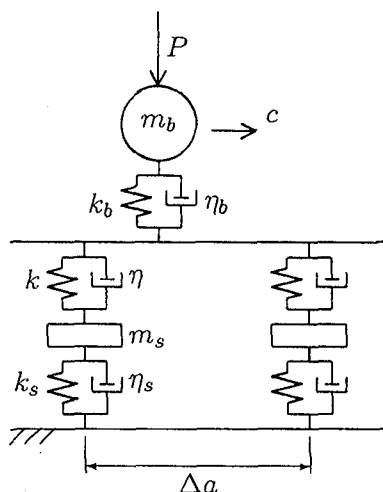


図-9 車輪・レール・まくら木系の解析モデル

表-1 解析条件

上載荷重	P (N)	65170
輪重	m_b (Kg)	350
接触ばね定数	k_b (MN/m)	2000
接触減衰係数	η_b (KN·s/m)	0
レール曲げ剛性	EI (MN/m ²)	4
レール質量	ρA (Kg/m)	50
パッドばね定数	k (MN/m)	110
パッド減衰係数	η (KN·s/m)	100
まくら木質量	m_s (Kg)	80
バラストばね定数	k_s (MN/m)	180
バラスト減衰係数	η_s (KN·s/m)	100

要となる時間増分は、車輪やまくら木などを含めた連成系での安定性や、対象としている周波数の範囲を基準に設定すればよい。ここでは車輪の走行速度は $c=10$ m/s と 20 m/s の2ケースとし、時間増分 Δt は、この2ケースに対しそれぞれ $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ (sec), 2.5×10^{-4} (sec) とした。また、5.1の解析例と同様に、 $t = 0.05$ (sec) までの間で上載荷重 P と重力加速度を規定値まで漸増させた。その他の解析条件は表-1に示すとおりである。

まくら木を配した 7.5 m 区間の中央に位置するまくら木直上におけるレールの加速度(下向きを正)の時刻歴を図-10に示す。車輪がまくら木を通過する際にパルス波が発生しているが、短周期振動はほとんど生じていない。そこで、実際の軌道において騒音の原因となる波状摩耗を想定し、レール頭頂面に振幅 0.05 mm、波長 40 mm の sine 波形の凹凸を設け、解析を行った。中央まくら木直上におけるレールの加速度を図-11に示す。解析では車輪とレールの接触部に減衰を入れていないため、加速度

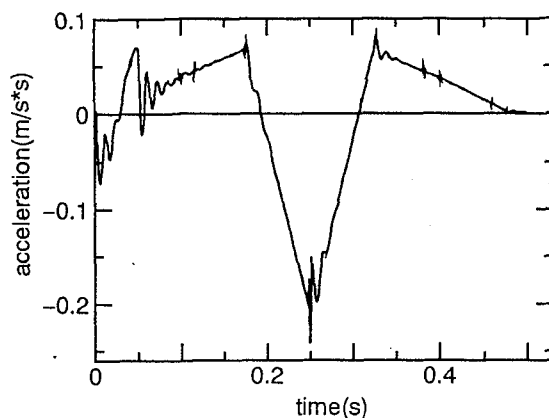


図-10 中央まくら木直上におけるレールの加速度

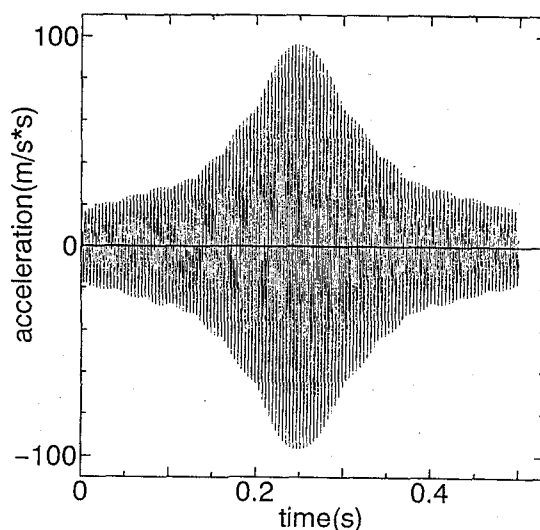


図-11 中央まくら木直上におけるレールの加速度($c=10$ m/s, 波状摩耗を考慮)

のレベルは現実のものと必ずしも一致しないと考えられるが、波状摩耗の存在により高周波振動が発生し、その絶対値自体も平坦なレールに比べ大幅に増幅されていることがわかる。なお、たわみの振動周期は、車輪が凹凸の一波長分を通過するのに要する時間間隔に一致しており、その他の振動数成分はほとんど発生していない。次に、車輪の走行速度を $c = 20$ m/s とした場合のレール加速度を図-12に示す。走行速度を倍にしたことで、振動加速度が約4倍に増幅されている。また、走行速度の増加に伴い、接触力の振動周期が短くなるため、加速度の振動周期も短くなっている。

平坦なレールと凹凸をもつレールの解析結果から、レールと車輪の接触面における不整が振動の主な発生源であると考えられる。しかし、ここに示した結果では振動加速度レベルは走行速度の二乗に比例しており、 $200 \sim 400$ Hz の振動が卓越するという、実測結果で得られている一般的傾向を再現することはできなかった。これ

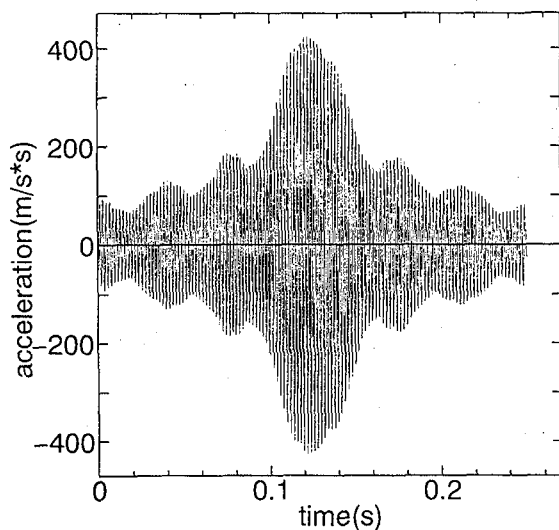


図-12 中央まくら木直上におけるレールの加速度($c=20\text{m/s}$, 波状摩耗を考慮)

は、レール頭頂面の凹凸形状、接触ばねやパッドなどの物性値のとり方、非線形性などが影響している可能性もあり、今後の検討課題の1つである。

6. おわりに

はりの動的たわみを与える積分表現式を時間域で定式化した。具体的解析対象として走行荷重下の軌道を考え、車輪との接触力を移動する変動外力、パッドからの

反力を固定位置に作用する変動外力と見なして、それらの外力作用の下でのレールの動的たわみを与える積分表現式を求めた。変動外力は、時間方向に区間一定な関数により離散近似し、それに対する積分表現式の離散化式を示した。また、離散化の際に必要な係数行列成分の計算方法について検討した。最後に、車輪・レール・まくら木の連成問題への適用例を通し、本手法の有効性を確認した。

なお、パッドや車輪接触部における非線形性が軌道系の振動応答に及ぼす影響など、より詳細な検討については、本論文で述べなかった、車輪・レール・まくら木の連成モデルの定式過程と合わせ、今後検討、報告して行くつもりである。

参考文献

- 1) 伊藤長市・瀧川光伸:東北・上越新幹線における低バネ係数軌道パッドの試験敷設, 日本鉄道施設協会誌, 1995-11, 801-804.
- 2) Grassie, S.L. et al., The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation, *J.Mech.Eng.Sci.*, 24, 77-90, 1982.
- 3) Knothe, K.L. and Grassie, S.L., Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle System Dyn.*, 22, 209-262, 1993.
- 4) 吉村彰芳・神山雅子:移動荷重による軌道の振動の解析, 鉄道総研報告, Vol.18, No.9, 31-36, 1994.
- 5) 柳充善 他:移動質量-接触ばね系と弾性支持梁の連成振動解析, 生産研究, 47 巻 10 号, 72-75, 1995.
- 6) 三浦重:軌道構造の動特性モデルの構築, 鉄道総研報告, Vol.9, No.12, 7-12, 1995.
- 7) 森口繁一 他:数学公式 II -級数・フーリエ解析-, 岩波全書, 1957.

(1996年9月6日 受付)