

Element Free Galerkin Methodにおける基本境界条件の処理

Enforcement of essential boundary conditions in Element Free Galerkin Method

井浦雅司¹, 庭山孝史²

Masashi IURA and Takashi NIWAYAMA

¹工博 東京電機大学教授 理工学部建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)²東京電機大学 理工学研究科 建設工学専攻 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

A technique for satisfying essential boundary conditions in element free Galerkin method is presented. The technique employs the displacement functions which are obtained by a transformation of the shape functions derived by the moving least squares method. The way for satisfying essential boundary conditions is simple and the same as that of the finite element method. The Lagrange method, the penalty method and the present technique are used in the numerical examples so as to satisfy the essential boundary conditions. The numerical accuracy of the problems including the Timoshenko beam, the plane-stress problem and the Reissner-Mindlin plate are discussed.

Key Words : Galerkin method, essential boundary conditions, discrete method

1 はじめに

構造解析には有限要素法(FEM)が広く用いられているが、最近、Nayrolesら¹⁾によって、要素分割を必要としないDiffuse Element Methodと呼ばれる手法が提案された。Belytschkoら^{2)~9)}はこの手法を改良し、Element Free Galerkin Method(EFGM)と呼ばれる手法を提案した。EFGMは任意の形状に適用でき、節点の配置が不規則な場合でも精度の良い結果が得られることが報告されている。また、要素の分割を必要としないので節点データのみを与えればよく、労力の面からも大変有効である。FEMとEFGMとの基本的な差異は、用いる変位関数にある。FEMでは各要素内でのみ値を有するような多項式を変位関数として用いるのに対し、EFGMではLancasterら¹⁰⁾が用いた移動最小二乗法(Moving Least Squares Method, MLSM)によって変位関数を作成している。EFGMでは、変位関数の係数が、直接その点における変位を示さないことが特徴の一つである。そのために、基本境界条件(変位に関する境界条件)を如何に満足させるかが大きな問題となっており、これまでもLagrange乗数を用いる方法^{2)~8)}、FEMと結合させる方法⁹⁾、Penalty関数を用いる方法^{11)~12)}などが提案されている。本報告では、既存の手法とは異なり、変数変換によって、FEMと同様に変位関数を各節点における物理量で表わして、基本境界条

件の処理を行う方法を提案する。

本報告では、まずはじめにMLSMを用いて変位関数を求める方法を説明している。次に、基本境界条件をFEMと同様の手法により満足させるために、これまでとは異なる変位関数を誘導している。すなわち、MLSMによって得られた変位関数の係数は、各点における実際の物理量を示さないことから、通常のFEMのような境界条件の処理方法が利用できない。そこで本報告では、変数変換によって、FEMと同様に変位関数を各点における物理量により表わす方法を用いている。その結果、基本境界条件の処理方法は、通常のFEMと同様の手法により可能となり、かつEFGMとFEMとの結合は、特殊な要素を用いなくても容易に可能となる。次に、Belytschkoら^{2)~9)}により提案されている重み関数を用いて、EFGMの定式化について簡単に説明している。

これまでEFGMにより解析された例題は、一次元問題¹¹⁾、二次元平面問題^{2)~7),9),12)}、Kirchhoff-Love理論による薄板問題⁸⁾などである。これら例題により、数値解に与えるサポート半径や節点数の影響が明らかにされつつある。しかしながら、基本境界条件を満足させる方法の差異が、数値解に与える影響を調べた報告は少ない。また、FEMを用いた際に混合法や薄板問題などで生じるロッキング現象等についても議論されていない。ここでは、一次元問題としてTimoshenko梁を

取り上げ、混合法が有効に用いられることを示す。二次元平面問題としてはCookの片持ち梁を取り上げ、基本境界条件を満足させる方法により、数値解の収束度に差異が生じることを示す。最後に、Reissner-Mindlin理論による薄板問題を解析し、せん断ロッキング現象について考察し、本報告で提案している手法の有効性について論じる。

2 移動最小二乗法 (MLSM)

ここでは、MLSMを用いて変位関数を求める方法を、Belytschko ら²⁾の手法に従い説明する。まず、評価点 x における変位関数 $u(x)$ の近似関数を以下のように表わす。

$$u^h(x) = \sum_j^m p_j(x) a_j(x) \equiv p^T(x) a(x) \quad (1)$$

ここに、 $u^h(x)$ は関数 $u(x)$ の近似値であり、 $p_j(x)$ は空間座標 $x^T = [x, y]$ を含む多項式であり、 m は展開に用いた項数である。例えば一次元の場合は、

$$\begin{aligned} p^T(x) &= [1, x] & m &= 2 \\ p^T(x) &= [1, x, x^2] & m &= 3 \end{aligned} \quad (2)$$

二次元の場合は、

$$\begin{aligned} p^T(x) &= [1, x, y] & m &= 3 \\ p^T(x) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2] & m &= 6 \end{aligned} \quad (3)$$

となる。係数 $a_j(x)$ は以下のように表わされる評価関数 J を最小にすることによって得られる。

$$J = \sum_I^n w(x - x_I) [p^T(x_I) a(x) - u_I]^2 \quad (4)$$

ここに、 n は評価点 x 近傍の節点数、 $w(x - x_I)$ は重み関数、 u_I は点 x_I における節点値である。式(4)を $a_j(x)$ について最小化するための条件は、次式で表わされる。

$$\frac{\partial J}{\partial a(x)} = 0 \quad (5)$$

式(5)を $a(x)$ について解くと次式を得る。

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u \quad (6)$$

ここに、

$$A(x) = \sum_I^n w(x - x_I) p(x_I) p^T(x_I) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} B(x) &= [w(x - x_1) p(x_1), w(x - x_2) p(x_2), \\ &\quad \dots, w(x - x_n) p(x_n)] \end{aligned} \quad (8)$$

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (9)$$

である。ここで注意すべきことは、 u の各成分 u_j ($j = 1 \sim n$) は点 x_j における節点値であり、変位そのものではないことである。このために、通常のFEMのような境界条件の処理方法がこのままの形では利用できないことになる。式(6)を式(1)へ代入することにより、MLSMを用いて得られる変位関数は以下のように表わされる。

$$u^h(x) = p^T(x) A^{-1}(x) B(x) u \equiv N(x) u \quad (10)$$

ここで、形状関数 $N(x)$ は以下のように表わされる。

$$N(x) = p^T(x) A^{-1}(x) B(x) \quad (11)$$

また、 $N(x)$ の一階微分は次式により計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(x)}{\partial x} &= \frac{\partial p^T(x)}{\partial x} A^{-1}(x) B(x) \\ &\quad + p^T(x) \frac{\partial A^{-1}(x)}{\partial x} B(x) \\ &\quad + p^T(x) A^{-1}(x) \frac{\partial B(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、

$$\frac{\partial A^{-1}(x)}{\partial x} = -A^{-1}(x) \frac{\partial A(x)}{\partial x} A^{-1}(x) \quad (13)$$

である。以上の手法により、Belytschko ら²⁾は変位関数 $u^h(x)$ およびその導関数を導いている。

さて、点 x_j における変位は以下のように表わされる。

$$u^h(x_j) = N(x_j) u$$

ここで、 $u^h(x_j) \neq u_j$ となる点がFEMと異なる点であり、 u の成分である u_j を規定しても、 j 点における変位を規定したことにはならない。そのために、EFGMにおいては、これまでも変位等の基本境界条件を満足させる方法として、Lagrange 乗数を用いる方法^{2)~8)}、境界にのみ有限要素を導入する方法⁹⁾、Penalty 関数を用いる方法^{11)~12)}等が開発されている。本報告では、通常の有限要素法における境界条件の処理方法がそのまま適用できるように、Belytschko らにより導かれた変位関数を修正して用いている。以下に、本報告で用いる変位関数について説明する。

点 x_j における変位を U_j とおくと、当然のことながら、

$$u^h(x_j) = U_j$$

となる。これを節点について当てはめると、次式が得られる。

$$N_i u = U \quad (14)$$

ここに、

$$N_l = \begin{bmatrix} N_1(x_1) & N_2(x_1) & \cdots & N_l(x_1) \\ N_1(x_2) & N_2(x_2) & \cdots & N_l(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1(x_l) & N_2(x_l) & \cdots & N_l(x_l) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$U^T = [U_1, U_2, \dots, U_l] \quad (16)$$

ここで、 l は全節点数を示す。式(14)より、 $u = N_l^{-1}U$ が得られ、これを式(10)へ代入することにより、以下の変位関数を得る。

$$u^h(x) = N(x)N_l^{-1}U \quad (17)$$

ここで注目すべきことは、右辺の U は、FEMと同様に各節点の変位そのものを表わしており、FEMと異なる点は、形状関数が多項式でないということだけである。よって、境界条件の処理方法についても通常のFEMの方法¹³⁾がそのまま使えることになる。式(17)において、 N_l の逆行列を計算する必要があり、計算時間の増加が予想される。これについては、計算例において具体的な数値を挙げて調べることにする。

3 重み関数の選択

重み関数の選択にはかなりの幅があるが、基本的な性質としては、まず正の数であり、次に節点 x_I が評価点 x から遠くなる程小さくなるような関数である。従って、重み関数は二点間の距離の関数として定義することができる。Belytschko ら^{2)~9)}によって提案されている重み関数としては、Exponential weight function, Conical weight function, Quartic Spline function などがあるが、本報告では、以下の式に定義される Quartic Spline function を用いる。

$$w(d_I) = 1 - 6 \left(\frac{d_I}{r} \right)^2 + 8 \left(\frac{d_I}{r} \right)^3 - 3 \left(\frac{d_I}{r} \right)^4 \quad (d_I \leq r) \quad (18)$$

ここに、 d_I は節点 x_I と評価点 x との距離 ($d_I = \|x - x_I\|$) であり、 r は重み関数のサポートする領域の半径である。サポート半径 r は、評価点 x のまわりの節点に対する重み関数の影響を決定するための重要な要素であり、形状関数に大きな影響を与える。これらの影響については、数値計算例を通して調べることにする。

4 EFGMによる解析方法

EFGMによる定式化はFEMのそれとほぼ同じである。すなわち、エネルギー法に基礎をおき、仮定した

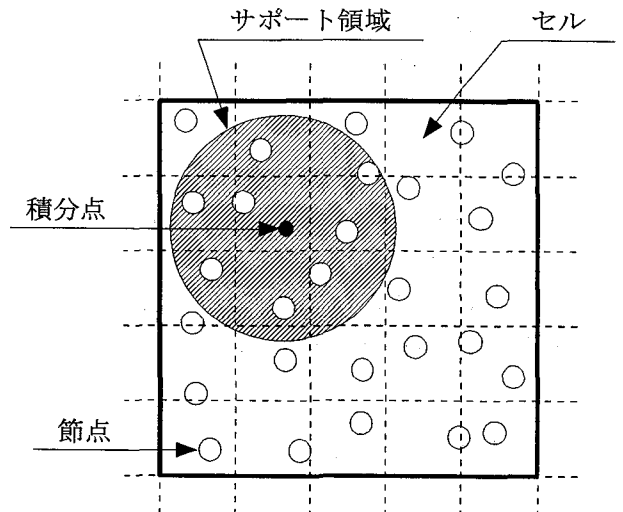


図 1: EFGM における積分のためのセル構造

変位関数により剛性方程式を誘導する。その際に、剛性マトリックスの積分は、FEMでは各要素毎に行われるのに対し、EFGMでは解析領域をセルによって規則的に分割して、各セル毎に剛性マトリックスの積分を行う。なお、各セルは、図1に示すように、節点の位置とは無関係に配置される。本報告では、各セル内における積分にはガウス積分を用いる。なお、式(18)におけるサポート半径 r に含まれない節点は、ガウス積分の際には零とおいている。このように、剛性マトリックスは、ガウス積分の積分点数とサポート半径 r の影響を受ける。また、セルの分割方法も、数値解の精度に影響を与える。

従来のEFGMでは、Lagrange乗数法やPenalty法などを用いて汎関数に基本境界条件が既に組込まれており、剛性マトリックスが作成できれば、それを直接解くことにより節点値 u が求まることになる。 u それ自身は節点における変位量を示していないので、それを式(10)へ代入することにより、任意の点における変位が求まる。一方、本報告において提案する方法では、汎関数に基本境界条件は含めていないため、基本境界条件の処理は、剛性マトリックス作成後に行う。その方法は、従来のFEMと全く同様¹³⁾であり、その説明は省略する。また、境界条件処理後に得られる解は、従来の方法とは異なり、節点における変位量 U である。

5 数値計算例

(1) 一次元問題

ここでは一次元問題として、Timoshenko梁の線形解析を行う。Lagrange乗数を用いた時のTimoshenko梁

のポテンシャル関数は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned}\Pi = & \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (\theta')^2 + \frac{GA}{2} (v' - \theta)^2 - pv \right] dx \\ & - [\bar{Q}v - \bar{M}\theta]_{S_\sigma} \\ & - [\lambda_1(v - \bar{v}) + \lambda_2(\theta - \bar{\theta})]_{S_u}\end{aligned}\quad (19)$$

ここに、 v は変位、 θ は曲げによる回転角、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 I は断面二次モーメント、 A は断面積、 λ_1 と λ_2 はLagrange乗数、 S_σ は断面力が規定される境界、 S_u は変位が規定される境界である。式(19)より、

$$\begin{aligned}\delta\Pi = & - \int_0^L [EI\theta'\delta\theta + GA(v'' - \theta')\delta v \\ & + GA(v' - \theta)\delta\theta + p\delta v] dx \\ & - [\{\bar{Q} - GA(v' - \theta)\}\delta v - \{\bar{M} + EI\theta'\}\delta\theta]_{S_\sigma} \\ & - [\{\lambda_1 - GA(v' - \theta)\}\delta v + \{\lambda_2 - EI\theta'\}\delta\theta \\ & + (v - \bar{v})\delta\lambda_1 + (\theta - \bar{\theta})\delta\lambda_2]_{S_u} \\ = & 0\end{aligned}\quad (20)$$

となるから、 λ_1 と λ_2 は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= GA(v' - \theta) \\ \lambda_2 &= EI\theta'\end{aligned}\quad (21)$$

従って、Lagrange乗数を用いた時の基礎式は、

$$\begin{aligned}\int_0^L [EI\theta'\delta\theta' + GA(v' - \theta)(\delta v' - \delta\theta) - p\delta v] dx \\ - [\bar{Q}\delta v - \bar{M}\delta\theta]_{S_\sigma} \\ - [GA(v' - \theta)\delta v + EI\theta'\delta\theta \\ + GA(v - \bar{v})(\delta v' - \delta\theta) + EI(\theta - \bar{\theta})\delta\theta']_{S_u} \\ = & 0\end{aligned}\quad (22)$$

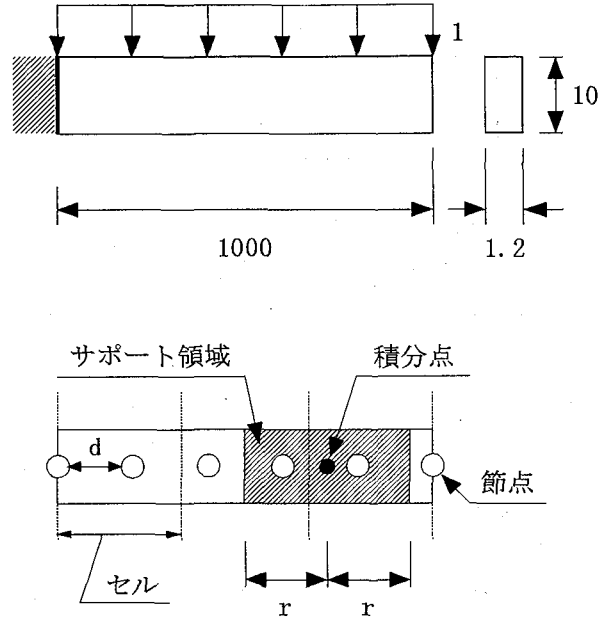
となる。ここに、 v と θ に関する変位関数は式(10)により表わされる。

Penalty関数を用いた時のポテンシャル関数は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned}\Pi = & \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (\theta')^2 + \frac{GA}{2} (v' - \theta)^2 - pv \right] dx \\ & - [\bar{Q}v - \bar{M}\theta]_{S_\sigma} \\ & + \left[\frac{\alpha}{2} (v - \bar{v})^2 + \frac{\beta}{2} (\theta - \bar{\theta})^2 \right]_{S_u}\end{aligned}\quad (23)$$

ここに、 α と β は十分に大きな正数である。式(23)より、

$$\begin{aligned}\delta\Pi = & \int_0^L [EI\theta'\delta\theta' + GA(v' - \theta)(\delta v' - \delta\theta) \\ & - p\delta v] dx - [\bar{Q}\delta v - \bar{M}\delta\theta]_{S_\sigma} \\ & + [\alpha(v - \bar{v})\delta v + \beta(\theta - \bar{\theta})\delta\theta]_{S_u} \\ = & 0\end{aligned}\quad (24)$$



節点数 7 : $d = 1000 / 6$

節点数 1 1 : $d = 1000 / 10$

図 2: 片持ち梁 (単位 : cm, kgf)

となる。ここに、 v と θ に関する変位関数は式(10)により表わされる。なお、本報告では α と β を変化させて収束解が得られる値として、 $\alpha = 1 \times 10^9$, $\beta = 1 \times 10^9$ を用いている。

本報告で提案する手法を用いた場合のポテンシャル関数は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned}\Pi = & \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (\theta')^2 + \frac{GA}{2} (v' - \theta)^2 - pv \right] dx \\ & - [\bar{Q}v - \bar{M}\theta]_{S_\sigma}\end{aligned}\quad (25)$$

式(25)より、

$$\begin{aligned}\delta\Pi = & \int_0^L [EI\theta'\delta\theta' + GA(v' - \theta)(\delta v' - \delta\theta) \\ & - p\delta v] dx - [\bar{Q}\delta v - \bar{M}\delta\theta]_{S_\sigma} \\ = & 0\end{aligned}\quad (26)$$

となる。ここに、 v と θ に関する変位関数は式(17)により表わされる。

解析対象は図2に示す片持ち梁である。条件は、梁の長さ $L = 1 \times 10^3$ cm, 高さ $h = 10$ cm, 幅 $b = 1.2$ cm, 等分布荷重 $p = 1$ kgf/cm², ヤング率 $E = 2 \times 10^6$ kgf/cm², せん断弾性係数 $G = 1 \times 10^6$ kgf/cm²である。節点の配置は規則的なものとする。積分は10個のセルを使って行い、各セルにおける積分点の数は3とする。また、基

底関数として、

$$p^T(x) = [1, x] \quad m = 2 \quad (27)$$

を用いた。図3は節点数が7個の場合、図4は節点数が11個の場合に、サポート半径を変化させた時の自由端におけるたわみの計算値とBernoulli-Euler梁の厳密解($pL^4/8EI$)の比であり、図5~7は、節点数が7でサポート半径を変化させた時の梁全体のモーメントであり、図5はLagrange乗数法、図6はPenalty法、図7は本手法による結果である。なお、梁の長さを変化させた計算を行ったが、いわゆるせん断ロッキングは観察されなかった。また、図3の全ての結果を計算するのに要した時間は、Pentium/100MHのコンピューターを使った場合、Lagrange乗数法で、0.93秒。Penalty法で、0.88秒。本報告で提案する手法で、1.16秒であった。

図3と図4より、サポート半径を徐々に変化させていった場合、Lagrange乗数を用いる方法よりも、Penalty関数を用いる方法と本報告で提案する手法の方が収束が良いことがわかる。また、Penalty関数を用いる方法と本報告で提案する手法では、ほぼ同一の結果が得られているが、ペナルティー数 α, β を小さくすれば、当然のことではあるが、本手法の結果とは異なる値が得られる。次に、変位関数を2回微分することにより得られるモーメント分布に関しては、図5~7よりわかるように、何れの方法を用いても解が振動していることがわかる。

そこで、モーメントの精度を上げるために、混合法を用いてEFGMを定式化する。基本境界条件を与える方法としては、本手法を用いることにすれば、ポテンシャル関数は以下のように与えられる。

$$\Pi = \int_0^L \left[-\frac{M^2}{2EI} - \frac{Q^2}{2GA} + Q(v' - \theta) - M\theta' - pv \right] dx - [\bar{Q}v - \bar{M}\theta]_{S_0} \quad (28)$$

ここに、 M はモーメント、 Q はせん断力である。式(28)の変分をとることにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_0^L \left[-\left(\frac{M}{EI} + \theta'\right) \delta M \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{Q}{GA} - (v' - \theta) \right\} \delta Q + Q(\delta v' - \delta\theta) \right. \\ &\quad \left. - M\delta\theta' - p\delta v \right] dx - [\bar{Q}\delta v - \bar{M}\delta\theta]_{S_0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

ここに、 v, θ, M, Q に関する変位関数は式(17)により表わされる。

式(29)より得られるモーメント分布を示したのが図8である。なお、節点数は7であり、セルの数は10個、ガウス積分点の数は3である。これより、図7のような

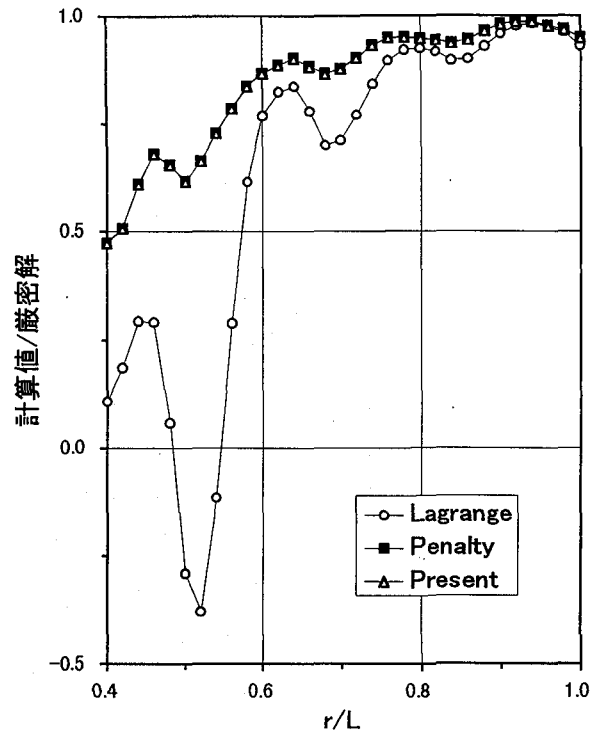


図3: 自由端のたわみの計算値と厳密解の比(節点数7)

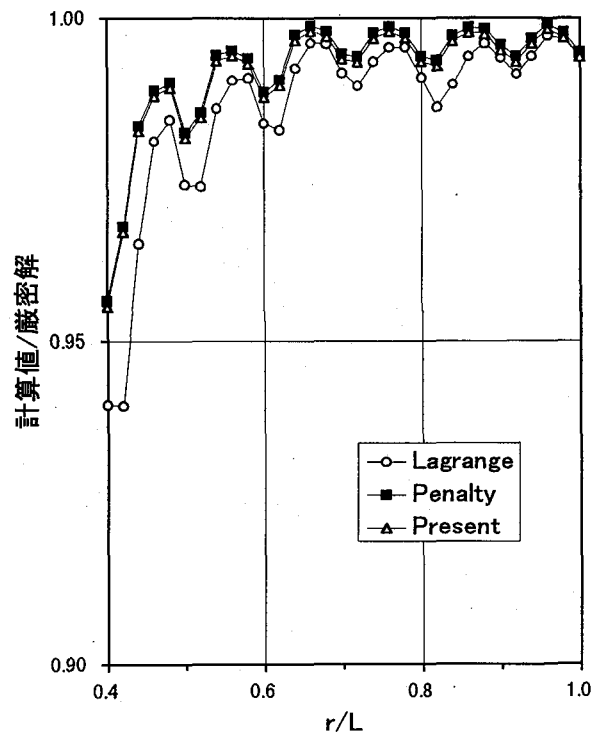


図4: 自由端のたわみの計算値と厳密解の比(節点数11)

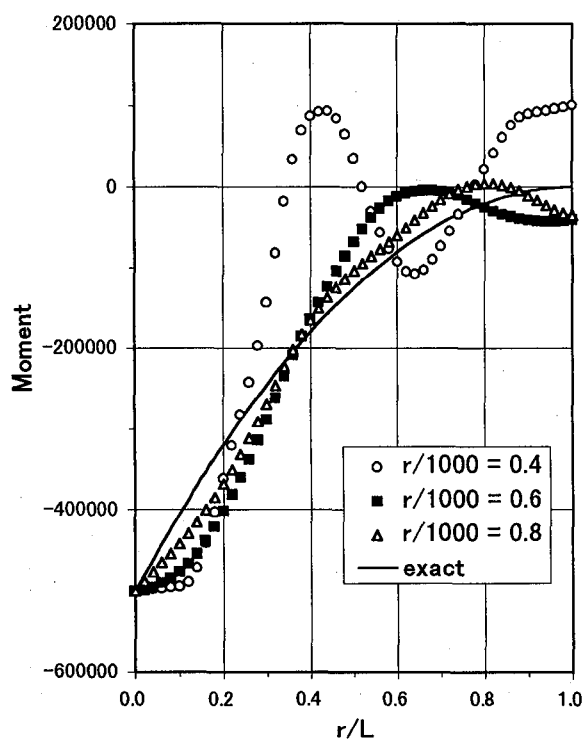


図 5: Lagrange 乗数を用いた時のモーメント

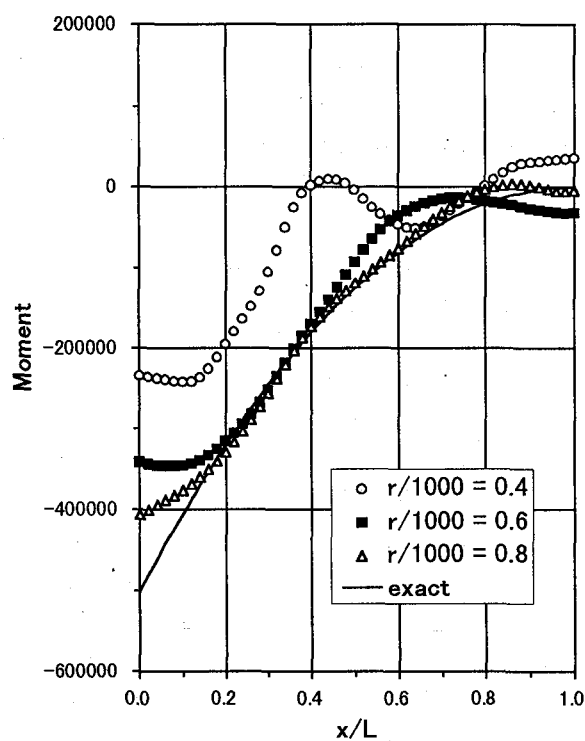


図 7: 本報告で提案する手法を用いた時のモーメント

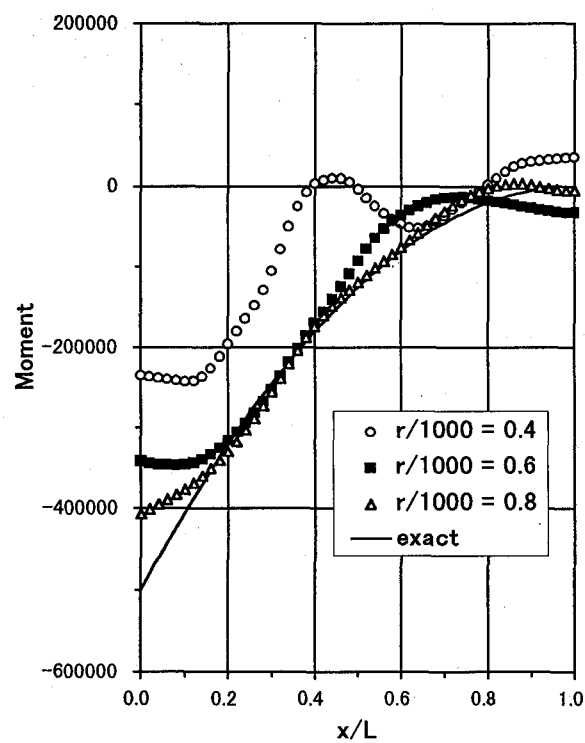


図 6: Penalty 法を用いた時のモーメント

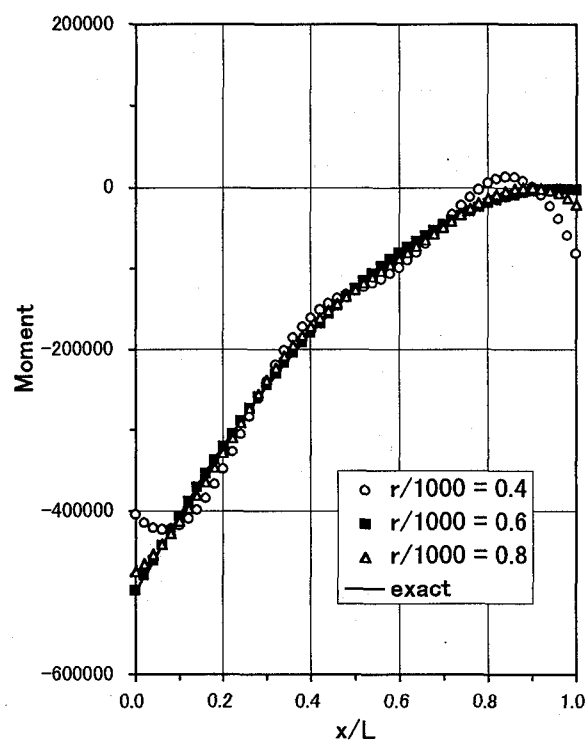


図 8: 混合法を用いた時のモーメント

振動は見られず、サポート半径が $r/1000 = 0.6$ においてほぼ厳密解と一致していることがわかる。また、混合法特有のロッキング問題も生じず、EFGMにおいては、混合法を用いることにより、断面力の精度はかなり改善できることが確認できた。

(2) 二次元平面応力問題

ここでは二次元問題として平面応力問題を考え、解析例としてはCookの片持ち梁の問題を扱う。二次元平面問題において、Lagrange乗数を用いた時の剛性方程式は以下のように表わされる²⁾。

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} B^T D B d\Omega - \int_{S_u} B^T D^T n^T s N dS \right. \\ & \quad \left. - \int_{S_u} N^T s n D B dS \right) \cdot u \\ & = \int_{\Omega} N^T \cdot b d\Omega + \int_{S_{\sigma}} N^T \cdot \bar{t} dS \\ & \quad - \int_{S_u} B^T D^T n^T s \cdot \bar{u} dS \quad (30) \end{aligned}$$

なお、変位関数は式(10)と同様の形で表わされる。

Penalty関数を用いた場合は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} B^T D B d\Omega + \alpha \int_{S_u} N^T N dS \right) \cdot u \\ & = \int_{\Omega} N^T \cdot b d\Omega + \int_{S_{\sigma}} N^T \cdot \bar{t} dS \\ & \quad + \alpha \int_{S_u} N^T \cdot \bar{u} dS \quad (31) \end{aligned}$$

なお、変位関数は式(10)と同様の形で表わされる。

また、本報告で提案する手法を用いて境界条件を処理する場合には、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (B N_i^{-1})^T D B N_i^{-1} d\Omega \cdot U \\ & = \int_{\Omega} (N N_i^{-1})^T \cdot b d\Omega + \int_{S_{\sigma}} (N N_i^{-1})^T \cdot \bar{t} dS \quad (32) \end{aligned}$$

となる。なお、変位関数は式(17)と同様の形で表わされる。ここに、

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$n = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$s = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \quad (36)$$

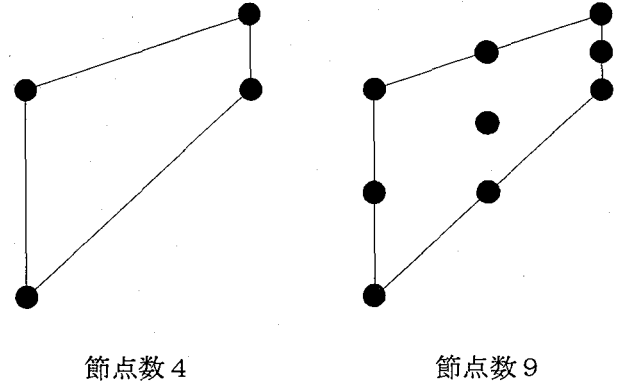
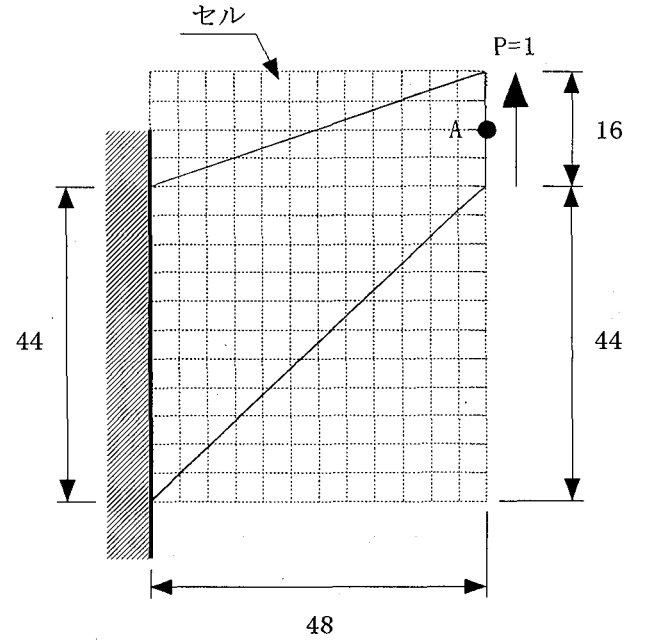


図 9: Cook の問題 (単位 : cm, kgf)

であり、 b は物体力、 $\bar{t}$ は荷重面における応力、 $\bar{u}$ は与えられた変位、 ν はポアソン比である。

解析例は図9に示す片持ち梁であり、自由端に等分布荷重をかけたものである。条件は、ヤング率 $E = 1 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 1/3$ 、厚み $h = 1 \text{ cm}$ 、サポート半径 $r = 80 \text{ cm}$ である。積分は図9に示すように横方向12個、縦方向15個のセルを使って行い、各セルにおける積分点の数は $5 \times 5 = 25$ とする。節点の配置は図9に示すとおりであり、その他の節点数の場合も同様の規則に従って節点を配置する。また、基底関数として、

$$p^T(x) = [1, x, y] \quad m = 3 \quad (37)$$

を用いた。Cookの問題においては、厳密解が得られておらず、有限要素法による収束解が数値解の精度を調べる際に用いられることが多い¹⁴⁾。ここでは、文献(14)に示されている点Aにおける有限要素法による収束解 $v_A = 23.91 \text{ cm}$ と、それぞれの手法により得られる数値

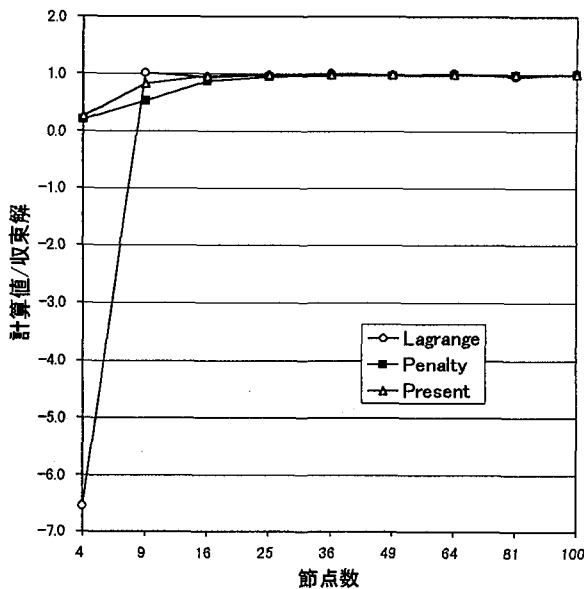


図 10: 点 A のたわみの計算値と収束解の比

解との比を図 10 に示す。Penalty 法による解は、十分大きな α, β を用いている。図 10 よりわかるように、節点数が 4 個の場合、Lagrange の方法による結果は収束解とは離れた解を与えるが、収束率は比較的良好なことが確かめられた。一方、本手法による方法は節点数が少なくても Penalty 法よりも良好な結果を与えており、収束状況も一様に収束解へ近づいていくことがわかる。また、節点数が 36 の場合、計算時間は Pentium/100MH のコンピューターを用いて、Lagrange 乗数法で、103.47 秒。Penalty 法で、102.16 秒。本報告で提案する手法で、106.50 秒であった。

(3) Reissner-Mindlin 平板

通常の FEM においては、Reissner-Mindlin 理論に基づく解析では、特に薄板の場合にせん断ロッキングが生じて満足する結果が得られないことが知られ、低減積分法などを用いることにより良好な結果が得られている。ここでは Reissner-Mindlin 平板に EFGM を用いて、板厚を変化させて、板厚の薄い場合にせん断ロッキングが起こるかどうかを確かめる。

Lagrange 乗数を用いた時のポテンシャル関数は以下のように表わされる。

$$\Pi = \Pi_p - \int_{S_u} [(\psi_x - \bar{\psi}_x)\lambda_1 + (\psi_y - \bar{\psi}_y)\lambda_2 + (w - \bar{w})\lambda_3] dS \quad (38)$$

ここで、

$$\Pi_p = \int_A \left[\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \{(\psi_{x,x})^2 + (\psi_{y,y})^2 + 2\nu\psi_{x,x}\psi_{y,y} + \frac{1-\nu}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x})^2\} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\kappa_s Gh \{(\psi_x - \psi_x)^2 + (\psi_y - \psi_y)^2\} - pw \right] dA \\ - \int_{S_\sigma} [(\bar{Q}_x n_x + \bar{Q}_y n_y)w - (\bar{M}_{xx} n_x + \bar{M}_{xy} n_y)\psi_x - (\bar{M}_{xy} n_x + \bar{M}_{yy} n_y)\psi_y] dS \quad (39)$$

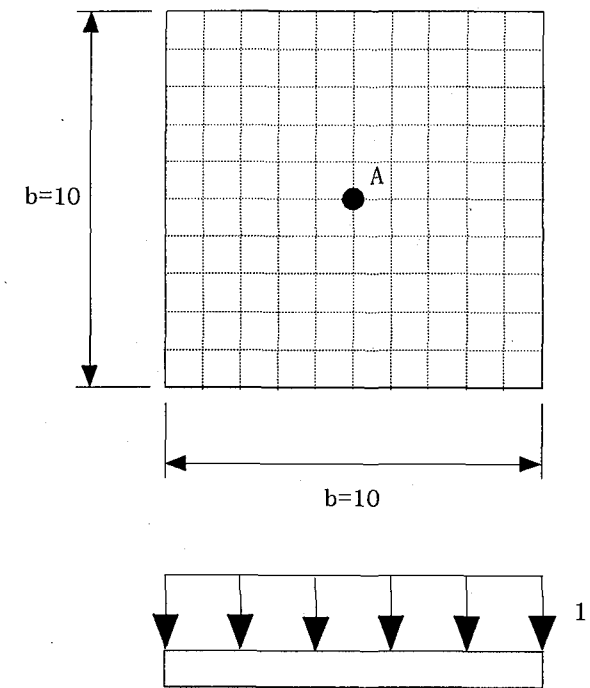


図 11: Reissner-Mindlin 平板 (単位 : cm, kgf)

である。ここに、 ψ_x, ψ_y は回転角であり、 w はたわみ、 n_x, n_y は境界条件の与えられる面の法線ベクトルである。 κ_s は面外せん断応力を板厚方向に一定と仮定したことを補正するための係数であり、ここでは $\kappa_s = 5/6$ を用いる。 $(\cdot)_{,x}$ と $(\cdot)_{,y}$ はそれぞれ x と y に関する偏微分を表わしている。 $\delta\Pi = 0$ より、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は次のように得られる。

$$\lambda_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\psi_{x,x} + \nu\psi_{y,y})n_x + \frac{Gh^3}{12} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x})n_y \\ \lambda_2 = \frac{Gh^3}{12} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x})n_x + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\psi_{y,y} + \nu\psi_{x,x})n_y \\ \lambda_3 = \kappa_s Gh (-\psi_x + w_{,x})n_x + \kappa_s Gh (-\psi_y + w_{,y})n_y \quad (40)$$

以上で求めた $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を式 (38) へ代入することにより、Lagrange 乗数を用いた時の基礎式は得られる。なお、変位関数は式 (10) と同様の形で表わされる。

Penalty 関数を用いた時のポテンシャル関数は以下の

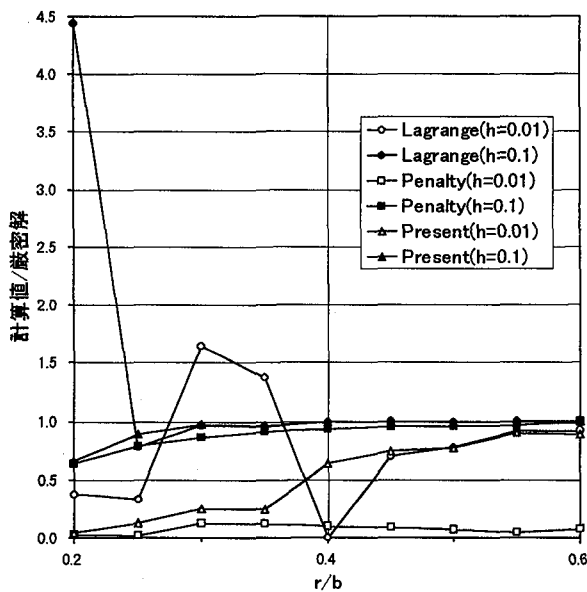


図 12: 点 A のたわみの計算値と厳密解の比 (節点数 121)

ように表わされる。

$$\Pi = \Pi_p + \int_{S_u} \left[\frac{\alpha}{2} (\psi_x - \bar{\psi}_x)^2 + \frac{\beta}{2} (\psi_y - \bar{\psi}_y)^2 + \frac{\gamma}{2} (w - \bar{w})^2 \right] dS \quad (41)$$

なお、変位関数は式(10)と同様の形で表わされる。

本報告で提案する手法を用いて境界条件を満足させる場合、変位関数としては式(17)と同様の形を用いて、ポテンシャル関数は以下のように表わされる。

$$\Pi = \Pi_p \quad (42)$$

解析対象は図11に示す等分布荷重を受ける四辺固定支持の平板である。平板は一辺10cmの正方形で、板厚は $h = 0.1\text{cm}$ と 0.01cm の2ケースであり、 $p = 1\text{kgf/cm}^2$ の等分布荷重を考える。また、ヤング率 $E = 1 \times 10^6\text{kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とする。節点の数は $11 \times 11 = 121$ 個と $16 \times 16 = 256$ 個の2ケースを考える。積分は図11に示すように、横方向10個、縦方向10個のセルを使って行い、各セルにおける積分点の数は $5 \times 5 = 25$ とする。また、基底関数として、

$$p^T(x) = [1, x, y] \quad m = 3 \quad (43)$$

を用いた。図12は、節点数 $11 \times 11 = 121$ 個について、板厚 $h = 0.1\text{cm}$ と 0.01cm の時にサポート半径を変化させた場合の点Aのたわみの計算値と薄板理論の厳密解¹⁵⁾の比である。図13は、上記の条件において節点数のみを変えて、 $16 \times 16 = 256$ 個とした時の、点Aのたわみの計算値と薄板理論の厳密解¹⁵⁾との比を表

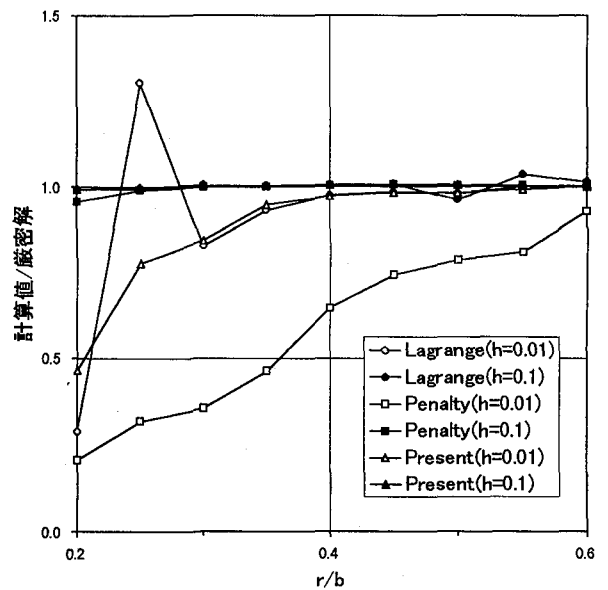


図 13: 点 A のたわみの計算値と厳密解の比 (節点数 256)

わしている。図12より、 $h = 0.01\text{cm}$ という薄板の場合に、サポート半径を大きくしてもPenalty法による解の収束が非常に悪いことより、これは一種のロッキング現象に近い状態と想像される。他の2つの方法による解も、 $h = 0.01\text{cm}$ の場合には解の収束が悪いものの、サポート半径を大きくするに従い厳密解へ近づいていくことがわかる。一方、節点数を増加させた図13においては、Penalty法を除き、 $h = 0.01\text{cm}$ という薄板の場合にも、サポート半径が大きくなるにつれ、解の収束状態は良いことがわかる。また、節点数121、板厚 0.1cm 、サポート半径 5cm の場合の計算をするのにかった時間は、Pentium/150MHのコンピューターを使った場合、Lagrange乗数法で、524.43秒。Penalty法で、514.60秒。本報告で提案する手法で、674.22秒であった。図12,13より、何れの場合においても、本手法による境界条件の処理方法により、他の手法に比べ、良好な数値結果が得られることがわかる。

6 結論

本報告においては、基本境界条件の扱い方に重点を置き、これまで多く用いられているLagrange乗数法、Penalty法、さらに本報告で提案した手法の合計三つの手法を用いて、数値計算例を通してそれぞれの特徴を調べた。Lagrange乗数法は、解の収束速度が他の方法に比べて遅いことが明らかとなった。Penalty法は、これまでも知られているように、Penalty乗数の値により解の精度が異なり、Reissner-Mindlin板においては収束状況が悪い。一方、本報告で提案した手法では、本計

算例の範囲内では安定した収束解が得られることが明らかとなった。Timoshenko 梁の例題においては、変位関数の導関数として求められるモーメント分布などに解の振動が見られた。これを修正する方法として、混合法を用いた所、ロッキング現象も見られず、数値解の精度も改善することが確認された。さらに、EFGMにおいて重要な鍵となるサポート半径と節点数については、本計算例を通して以下のような点を確認された。

まず、サポート半径をある程度大きくすることにより良い結果が得られることが確認された。しかし、サポート半径を大きくしすぎると、形状関数の精度が悪くなってしまい、良好な解析結果が得られなくなる恐れがあるので注意が必要である。また、節点数を多くすることにより精度の良い結果が得られる事が確認された。しかし、節点数を多くするにしたがって計算時間も増えていくので、適切な節点数の選択が必要である。

今後は、数値解の精度に与える形状関数の決定方法、サポート半径、節点数などの影響を、より一般性のある形で調べていく予定である。

参考文献

- 1) B.Nayroles, G.Touzot, P.Villon, 'Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements', *Comput. Mech.*, 10, 307-318(1992).
- 2) T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, 'Element free Galerkin methods', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, 229-256(1994).
- 3) Y.Y.Lu, T.Belytschko, L.Gu, 'A new implementation of the element free Galerkin method', *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 133, 397-414(1994).
- 4) T.Belytschko, Y.Y.Lu and L.Gu, 'Crack propagation by element free Galerkin methods', *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.51, No.2, 295-315(1995).
- 5) Y.Y.Lu, T.Belytschko, M.Tabbara, 'Element free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture', *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 126, 131-153(1995).
- 6) T.Belytschko, M.Tabbara, 'Dynamic fracture using element free Galerkin methods', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.39, 923-938(1996).
- 7) Y.Krongauz, T.Belytschko, 'Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements', *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 131, 133-145(1996).
- 8) P.Krysl, T.Belytschko, 'Analysis of thin plates by the element free Galerkin method', *Comput. Mech.* 17, 26-35(1995).
- 9) T.Belytschko, D.Organ, Y.Krongauz, 'A coupled finite element-element free Galerkin method', *Comput. Mech.* 17, 186-195(1995).
- 10) P.Lancaster, K.Salkauskas, 'Surfaces generated by moving least squares methods', *Math. Comput.*, 37, 141-158(1981).
- 11) 奥田, 長嶋, 矢川, 'エレメントフリーガラーキン法に関する基礎的検討 (第1報, 常微分方程式への適用)', *日本機械学会論文集(A編)*, 61巻590号, 194-200(1995).
- 12) 長嶋, 奥田, 矢川, 'エレメントフリーガラーキン法に関する基礎的検討 (第2報, 二次元ポテンシャル問題への適用)', *日本機械学会論文集(A編)*, 62巻, 599号, 218-225(1996).
- 13) O.C.Zienkiewicz, 'The Finite Element Method', 3rd Ed, McGraw-Hill, 1977.
- 14) J.C.Simo, D.D.Fox and M.S.Rifai, 'On a stress resultant geometrically exact shell model. PartII: The linear theory; Computational aspects', *Comput.Meths. Appl. Mech. Engrg.* 73, 53-92(1989).
- 15) S.Timoshenko and S.Woinowsky-krieger, 'Theory of Plates and Shells', McGraw-Hill, 1959.

(1996 年 9 月 6 日 受付)