

オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析手法

A SIMPLE FINITE DISPLACEMENT FORMULATION USING EULERIAN ANGLES
(SIMPLA FINIAŠOVA FORMULO UTILIGANTA ANGULOJN DE EULER)

後藤 文彦*・小林 裕**・岩熊 哲夫***

GOTOU Humihiko, KOBAYASI Hiroshi, IWAKUMA Tetsuo

*正会員 工博 東北大学助手 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**学生員 東北大学大学院工学研究科

***正会員 Ph. D. 東北大学教授 工学部土木工学科

Using the relation between Eulerian angles and rotational angles about three axes of rectangular Cartesian coordinates, we derive a simple finite displacement formulation. The accuracy of the formulation is numerically demonstrated. (Uzante la rilaton inter anguloj de Euler kaj la rotaciaj anguloj ĉirkaŭ tri interortaj Karteziaj koordinat-aksoj, ni elkondukis simplan finiaŝovan formulon. La precizeco de la formulo estas nombre pruvita.)

Key Words : finite displacement (finia ŝovo), Eulerian angles (anguloj de Euler), Greenhill problem (problemo de Greenhill)

1. まえがき

梁の三次元有限変位解析手法は、座標の選び方、有限回転角の記述方法の違いなどによって、多種多様のものが報告されている^{1) 2) 3) 4) 5) 6) 7)}。近年、剛体変位除去の手法あるいは移動座標を導入することにより、幾何学的非線形性は専ら座標変換行列や回転行列に受け持たせ、剛性行列自体には線形理論のものを用いるといった比較的簡単な手法も報告されている^{4) 5) 6) 7)}。しかし、有限回転角の記述に用いられる回転角成分（主軸回りの回転角、ロドリゲスベクトル、オイラー角等）は、そのままでは外力モーメントと対応しないため、対応する微小回転角成分との複雑な関係式を要したり、あるいは物理的不明瞭さを残した近似的な関係式が用いられている。本研究では、有限回転角の記述には幾何学的考察の容易なオイラー角を用いるが、その微小成分と空間固定座標三軸回りの微小回転角成分との間に成立する幾何学的関係を利用することにより、回転角の扱いが比較的明快な定式化を試みる。

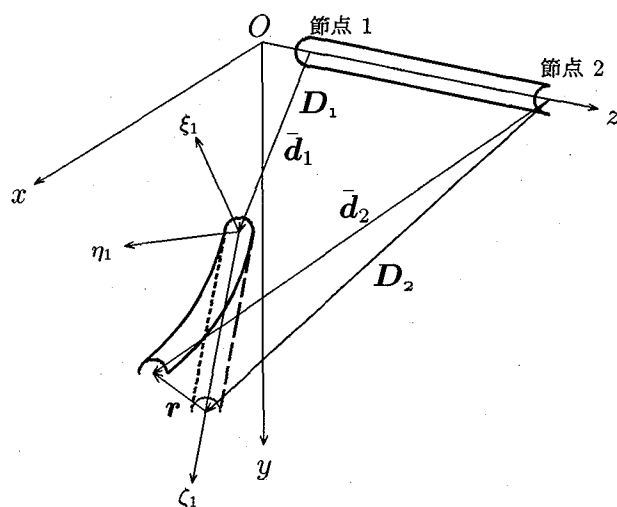


図-1 節点変位

2. 定式化

2.1 節点変位ベクトル

変位は有限だが、ひずみは微小である直線梁要素を考える。変形前の初期状態において、直角座標 (x, y, z) を定義する。但し、梁軸に沿って z 軸をとり、右手系となるように x, y 軸をとる（図-1）。要素の両端は節点 1、節点 2 と呼ぶことにする。節点変位ベクトルは次式で表される。

$$\bar{d} \equiv [\bar{d}_1^T \bar{d}_2^T]^T \quad (1)$$

$$\bar{d}_i \equiv [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ \lambda_i]^T \quad (i = 1, 2)$$

ここに u_i, v_i, w_i は x, y, z 軸方向の並進変位であり、 $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ は x, y, z 軸右ねじ回りの回転角である。また λ_i は断面のねじれ率である。但し、 $(\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$ は有限な値としては線形ベクトル量ではないが、ここではそれを形式的に用いておき、最終的な定式化の中では、微小回転角として扱える、二節点間の相対回転角を得る目的でのみ用いる。次に、同じ節点変位ベクトルを、有限回転を表せるようにオイラー角を用いて

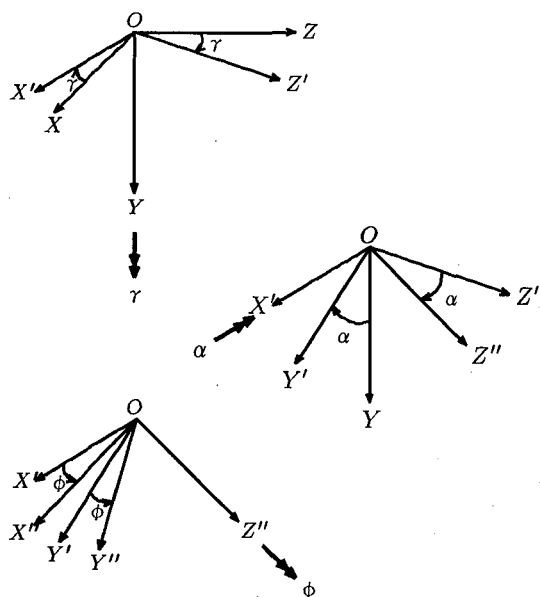


図-2 オイラー角の定義

次式のように定義する。

$$d \equiv [d_1^T \quad d_2^T]^T \quad (2)$$

$$d_i \equiv [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \alpha_i \quad \gamma_i \quad \phi_i \quad \lambda_i]^T \quad (i=1,2)$$

ここに $\alpha_i, \gamma_i, \phi_i$ はオイラー角であり、順番を決めた三回の回転によって定義される。ここでは、図-2 に示すように、最初に座標軸 (X, Y, Z) を Y -軸右ねじ回りに γ だけ回転して座標軸 (X', Y, Z') を得、次にこの X' -軸左ねじ回りに α だけ回転して座標軸 (X', Y', Z'') を得、最後にこの Z'' -軸右ねじ回りに ϕ だけ回転して座標軸 (X'', Y'', Z'') を得るべく順々に回転したものと定義する。

ある要素が剛体のまま移動した場合、節点 1 の節点変位は形式的に次式で表される。

$$D_1 \equiv [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad 0]^T \quad (3)$$

一方、この変位に伴う節点 2 の変位を、節点 1 の節点変位を用いて表すなら、図-3 に示す幾何学的な関係から次式のように表される。

$$D_2 = \begin{bmatrix} u_1 + l \cos \alpha_1 \sin \gamma_1 \\ v_1 + l \sin \alpha_1 \\ w_1 + l (\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 - 1) \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに l は初期状態での要素長である。ここで、これらの変位をそれぞれ両節点の「剛体変位」と定義し、一要素の剛体変位を次式で表す。

$$D \equiv [D_1^T \quad D_2^T]^T \quad (5)$$

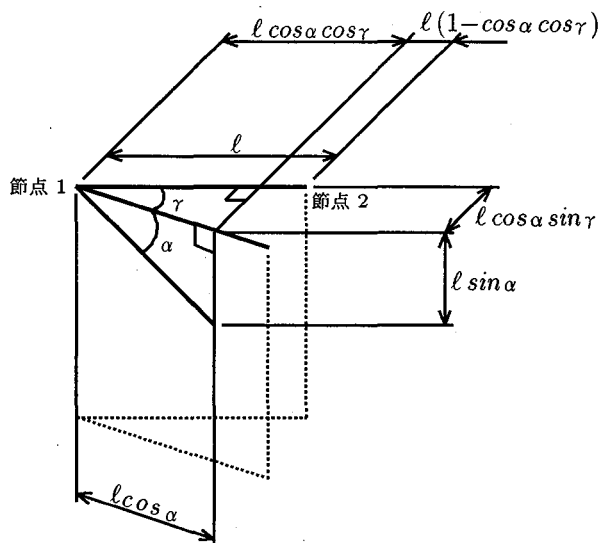


図-3 節点 2 の剛体変位

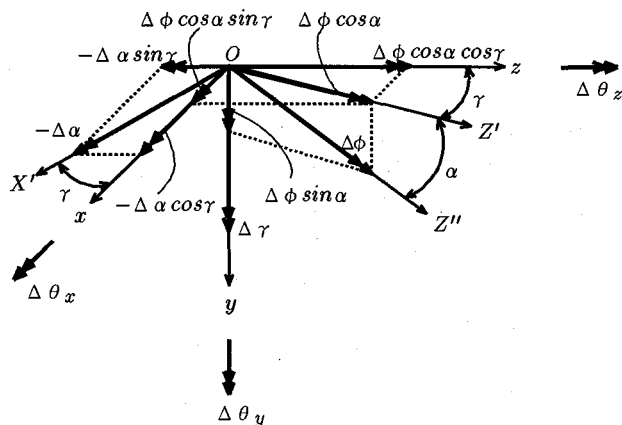


図-4 オイラー角増分の空間固定座標成分

さて、オイラー角 α, γ, ϕ がそれぞれ $\Delta\alpha, \Delta\gamma, \Delta\phi$ ずつ微小変化するならば、 Y -軸右ねじ回りに $\Delta\gamma$ 、 X' -軸右ねじ回りに $-\Delta\alpha$ 、 Z'' -軸右ねじ回りに $\Delta\phi$ だけ微小変化が生じる。このとき、 $(\Delta\alpha, \Delta\gamma, \Delta\phi)$ の (x, y, z) 軸回りの成分は、図-4 に示す幾何学的関係から $(\Delta\alpha, \Delta\gamma, \Delta\phi)$ と次式のように関係づけられる⁸⁾。ちなみに、これら空間固定軸回りの微小回転角成分は、オイラー角を用いた仮想仕事式において、空間固定軸回りのモーメント外力と仕事をする角度成分としても導かれる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma & 0 & \sin \gamma \cos \alpha \\ 0 & 1 & \sin \alpha \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\gamma \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} \quad (6)$$

2.2 節点相対変位

要素が変形し、 $\bar{d}$ で表される変位が生じているとする。ここで、節点1を原点とし、節点1で要素軸に接する座標系 (ξ_1, η_1, ζ_1) を図-1のように定義する。このとき、剛体変位 D に対する $\bar{d}$ の相対変位は次式のように表される。

$$r = \bar{d} - D \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \lambda_1]^T \\ u_2 - u_1 - \ell \cos \alpha_1 \sin \gamma_1 \\ v_2 - v_1 - \ell \sin \alpha_1 \\ w_2 - w_1 - \ell (\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 - 1) \\ \theta_{x2} - \theta_{x1} \\ \theta_{y2} - \theta_{y1} \\ \theta_{z2} - \theta_{z1} \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

このように、要素の「剛体的な変位」成分を、節点1の剛体変位 D_1 で代表させることによって、相対変位 r には要素の実質的な変形を受け持たせる。いかなる変形履歴の下でも微小ひずみの仮定が成立するならば、要素分割を細かくして r が十分に小さくなるようにすれば、この相対変位は微小変位理論の範囲で扱える。ここでは、有限要素法を用いるので、要素の長さ ℓ は十分に小さくとることができる。それ故、式(8)の相対回転角 $(\theta_{x2} - \theta_{x1}, \theta_{y2} - \theta_{y1}, \theta_{z2} - \theta_{z1})$ は微小回転角と見做すことができる。前述した通り、回転角 $(\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$ はベクトル量ではないが、その微小な増分量は式(6)によってオイラー角と関係づけられている。そこで、式(6)の微小回転角を相対回転角と読み直せば、次式のような近似が得られる。

$$\begin{aligned} \theta_{x2} - \theta_{x1} &= -(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \\ &\quad + (\phi_2 - \phi_1) \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ \theta_{y2} - \theta_{y1} &= (\gamma_2 - \gamma_1) + (\phi_2 - \phi_1) \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ \theta_{z2} - \theta_{z1} &= (\alpha_2 - \alpha_1) \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \\ &\quad + (\phi_2 - \phi_1) \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、要素の有限回転を表すオイラー角は、両節点での値の平均を用いている。この近似により、節点相対変位の全ての成分は、ベクトル成分として扱え、 d の関数として与えられる。

2.3 座標変換

全体座標系 (x, y, z) の中での節点相対変位はベクトル量として定義されているので、これの局部座標系 (ξ_1, η_1, ζ_1) への座標変換はオイラー角を用いた通常の座標変換行列として次式で表される。

$$T(d_1) = \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi_1 \cos \gamma_1 & -\sin \phi_1 \cos \gamma_1 & \cos \alpha_1 \sin \gamma_1 \\ -\sin \phi_1 \sin \alpha_1 \sin \gamma_1 & -\cos \phi_1 \sin \alpha_1 \sin \gamma_1 & \\ \sin \phi_1 \cos \alpha_1 & \cos \phi_1 \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ -\cos \phi_1 \sin \gamma_1 & \sin \phi_1 \sin \gamma_1 & \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 \\ -\sin \phi_1 \sin \alpha_1 \cos \gamma_1 & -\cos \phi_1 \sin \alpha_1 \cos \gamma_1 & \end{bmatrix}$$

式(8)の節点相対変位ベクトル r を、この $T(d_1)$ によって、局所座標系に変換すると次式のようになる。

$$r_\ell = T_o^T(d_1) r \quad (11)$$

ここに、 r_ℓ は局所座標系 (ξ_1, η_1, ζ_1) で定義される節点相対変位ベクトルであり、 $T_o(d_1)$ は次式で定義される。

$$T_o(d_1) \equiv \begin{bmatrix} t & o_7 \\ o_7 & t \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} T(d_1) & o_3 & 0 \\ o_3 & T(d_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここに、 o_7 と o_3 は、それぞれ 7×7 と 3×3 の零行列である。

節点変位ベクトル $\bar{d}$ 、 $\bar{d}_i$ に対応する節点外力ベクトルは、次式で表される。

$$f = [f_1^T f_2^T]^T \quad (13)$$

$$f_i = [F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi} \ M_{\lambda i}]^T \quad (i=1, 2)$$

ここに、 F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} はそれぞれ x, y, z -軸方向の節点外力、 M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} はそれぞれ x, y, z -軸右ねじ回りの節点外力モーメント、 $M_{\lambda i}$ は節点の外力そりモーメントである。式(11)と同様に、局部座標系での節点外力ベクトル f_ℓ は次式で表される。

$$f_\ell = T_o^T(d_1) f \quad (14)$$

2.4 剛性方程式

前章で述べたように、微小ひずみの仮定が成立する限り、全体変形から要素の剛体変位成分を取り除いた要素の純変形成分は、微小変位理論による剛性方程式で取り扱うことができる。線形構造力学による周知の剛性行列を K とすると、局所座標系 (ξ_1, η_1, ζ_1) における節点相対変位ベクトル r_ℓ と節点外力ベクトル f_ℓ は、次式で関係づけられる。

$$f_\ell = K r_\ell \quad (15)$$

式(11)と式(14)を式(15)に代入すれば、全体座標系 (x, y, z) での剛性方程式が次式で与えられる。

$$f = T_o(d) K T_o^T(d) r(d) \quad (16)$$

2.5 増分方程式

式(16)は変位ベクトル d に関する非線形方程式なので、ここでは弧長増分法⁹⁾を用いて解くことにする。まず、式(16)の d に関する増分式を次式のように表す。

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta T_o K T_o^T r + T_o K \Delta T_o^T r + T_o K T_o^T \Delta r \\ &\rightarrow K_t(d) \Delta d \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 $K_t(d)$ は接線剛性行列である。式 (17) の Δd の回転角成分はオイラー角成分として定義されているが、一方、 Δf のモーメント成分は x, y, z 軸回りの成分で定義されている。各要素の接線剛性行列を重ね合わせる場合、この回転角成分は、モーメント外力に対応して x, y, z 軸回りの成分で定義されていないと不都合である。例えば、曲がり梁を折れ線近似で計算する場合などに、各要素の接線剛性方程式の変位増分の回転成分がオイラー角のままでは、全体系に座標変換することができない。そこで、式 (6) の逆関係によって、 Δd の回転角成分を次式のように書き直す。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\gamma \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ -\sin\gamma \tan\alpha & 1 & -\cos\gamma \tan\alpha \\ \sin\gamma/\cos\alpha & 0 & \cos\gamma/\cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z \end{Bmatrix} \quad (18)$$

よって、式 (17) の Δd は次式により、 $\Delta \bar{d}$ と関係づけられる。

$$\Delta d = E \Delta \bar{d} \quad (19)$$

ここに

$$E = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$e_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\gamma_i & 0 & \sin\gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\gamma_i \tan\alpha_i & 1 & -\cos\gamma_i \tan\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\gamma_i/\cos\alpha_i & 0 & \cos\gamma_i/\cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1,2)$$

式 (19) を式 (17) に代入して、最終的な接線剛性方程式は次式ようになる。

$$\Delta f = \bar{K}_t \Delta \bar{d}, \quad \bar{K}_t \equiv K_t E \quad (21)$$

ここに $\bar{K}_t$ は弧長増分法で解かれる最終的な接線剛性行列で、この定式化では対称にはならない。これは、局所系と全体系における節点力の関係を、エネルギー原理を用いずに、単純に座標変換を用いて、式 (14) のように関係づけたためと考えられる。Goto ら⁷⁾ は、局所系と全体系での増分仕事を等式で結ぶことにより、 $f_t = [T_o^T \frac{\partial r}{\partial d} + \frac{\partial T_o^T}{\partial d} r] f$ に相当する関係式を導き、これにより、対称な接線剛性行列を得ているが、この関係式の増分式は、 T_o^T の増分式に比べて桁違いに複雑になってしまうので、ここでは、敢えて簡潔な定式化のままで非対称接線剛性行列を用い、数値計算により精度の確認を行う。また、 $\bar{K}_t$ は回転に関しては α, γ, ϕ の関数であるが、式 (21) の解は $\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z$ である。よって、次の荷重増分段階の α, γ, ϕ を求めるためには、式 (18) から $\Delta\alpha, \Delta\gamma, \Delta\phi$ を計算し、前の荷重増分段階の α, γ, ϕ にそれぞれ加えてやればよい。

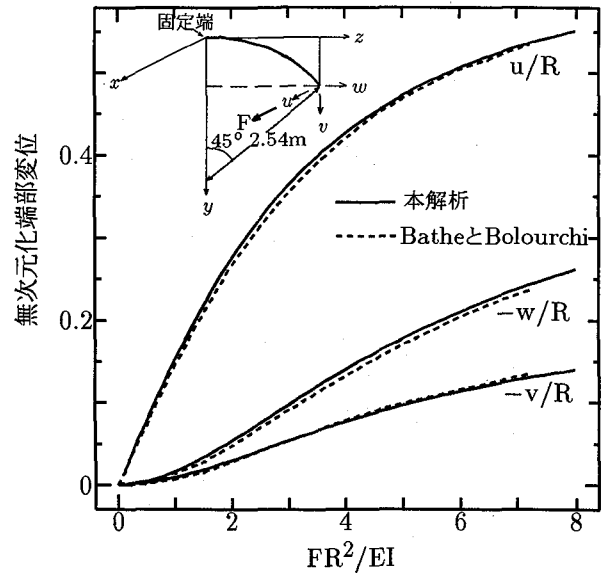


図-5 開角 45° 片持ち曲がり梁

2.6 分岐点の探索と分岐後経路の追跡

分岐点の探索は、式 (21) の接線剛性行列をガウスの消去法で前進消去した時点でできる上三角行列の負の対角項の数が、最初は0個の状態から1個ずつ増える点ごとに特異点を通過したと判断し、その点で分岐するかどうかを試してみる。分岐後の経路への移行は、前述の特異点での変位の固有ベクトルに、適当な倍率を掛けたものを外乱として与えることにより行う。外乱の倍率や、外乱を与える荷重段階は、つり合い状態が移行したかどうかを確認しながら、試行錯誤で決める。

3. 数値解析

3.1 開角 45° 片持ち曲がり梁

前章で導いた定式化の精度を確認するため、図-5に示すような、端部に面外荷重を受ける片持ち曲がり梁の三次元大変位問題を解析する。梁の諸元は、1辺 2.54 × 10⁻² m の正方形断面で、曲率半径 R は 2.54 m、開角は 45°、ヤング率は 68.948 GN/m²、せん断弾性係数は 34.474 GN/m²、部材軸は yz -平面に横たわり、荷重 F は x の正の方向に作用する。曲げ剛性 EI で無次元化した端部変位を、図-5に Bathe と Bolourchi³⁾ の結果と併せて示す。尚、本解析では 64 要素で計算した。本数値解は、Bathe と Bolourchi の解とよく一致している。

3.2 グリーンヒル問題の解析

特徴的な座屈後挙動を示す代表的な三次元有限変位問題としてグリーンヒル問題¹⁰⁾を解析する。グリーンヒル問題は、端部にねじれ外力を受ける片持ち梁の座屈および座屈後挙動の問題である。但し、ここでは端部の並進

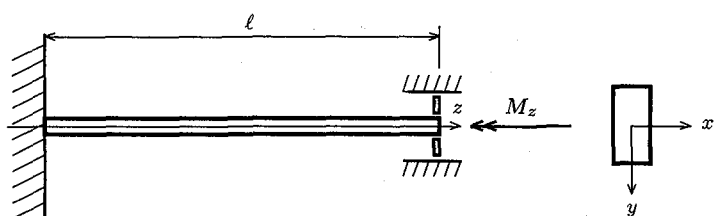


図-6 グリーンヒル問題の境界条件

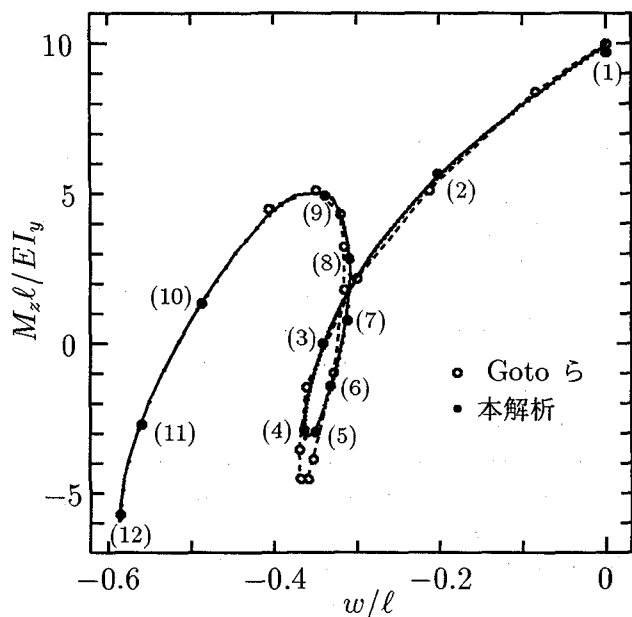


図-7 荷重-軸位変曲線

変位は図-6 のように軸方向のみを自由とした境界条件で解析する。この問題は近年、多くの研究者が計算しているが、比較のため、まずGoto ら⁷⁾と同じ諸元の矩形断面の梁を解析する。材料の諸元は、断面は 1.0 mm × 3.0 mm の矩形で、部材長は 1.0 m、ヤング率は 71.24 GN/m²、せん断弾性係数は 27.19 GN/m² である。荷重-軸変位曲線を図-7に、それぞれの荷重点(図中(1)~(12))に対応する梁の変形図を図-8に示す。本解析は 64 要素の結果である。無次元化座屈荷重はGoto らでは 10.0、本解析では 9.95 となり、比較的よく一致している。座屈後の径路についても、Goto らとほぼ同様の結果が得られている。次に、Nour-Omid と Rankin⁵⁾や紙田と近藤⁶⁾が解析しているのと同じ諸元の二軸対称断面の梁に対して、対称条件から梁の半分だけを解析(以下、半解析と呼ぶ)する。この問題に対して、Nour-Omid と Rankin は、全体解析を、紙田と近藤は半解析を行なっているが、本解析では半解析を行う。というのは、二軸対称断面に対するグリーンヒル問

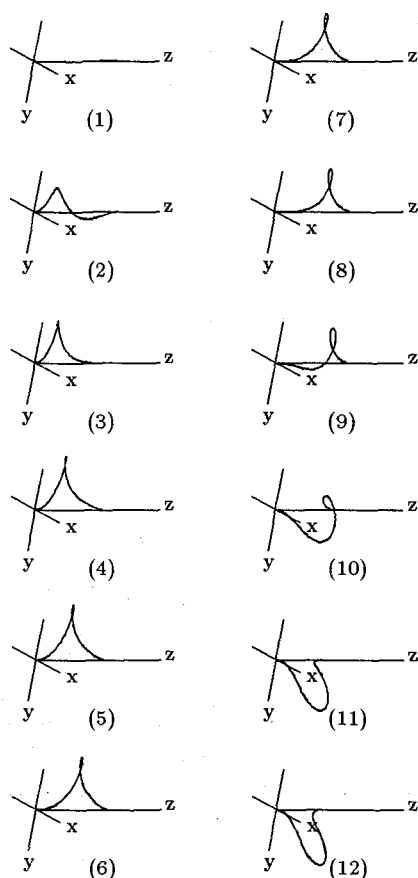


図-8 変形形状

題を全体解析しようとする、Goto らも指摘しているように、接線剛性行列の二つの対角項が同時に零になってしまうため、前章で述べた座屈点探索、座屈後挙動追跡の手法では解析が困難となるからである。尤も、この問題に関しては、他の二件の研究では特に言及されていない。半解析の境界条件は、図-9のように梁中央(対称面)での x -軸方向の変位と x -軸回りの回転を拘束する。こうすることにより、最大面外変位の発生する方向は、常に y -方向に限定される。材料の諸元は、断面二次モーメントが 0.0833 mm⁴、ねじれ定数は 2.16 mm⁴、部材長は 240 mm、ヤング率は 71.24 GN/m²、せん断弾性係数は 27.19 GN/m² である。二軸対称断面として、例えば円形断面や正方形断面を考えた場合、ねじれ定数は断面二次モーメントに対して高々、数倍の数値であることを考えると、これは、ねじれ剛性が極端に大きい仮想的な断面と捉えることができるが、ここでは比較のため、同じ値のまま計算する。荷重-ねじれ角曲線を図-10に、それぞれの荷重点(図中1~5)に対応する梁の変形図を xy -, yz -, zx -平面に投影して図-11に示す。本解析は 20 要素の結果である。座屈荷重、座屈後の径路ともに本解析は、Nour-Omid と Rankin や紙田と近藤とほぼ同様の結果を与えている。

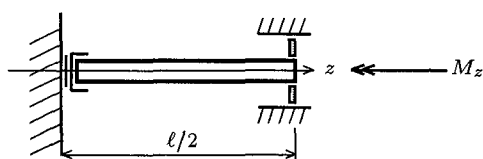


図-9 半解析の境界条件

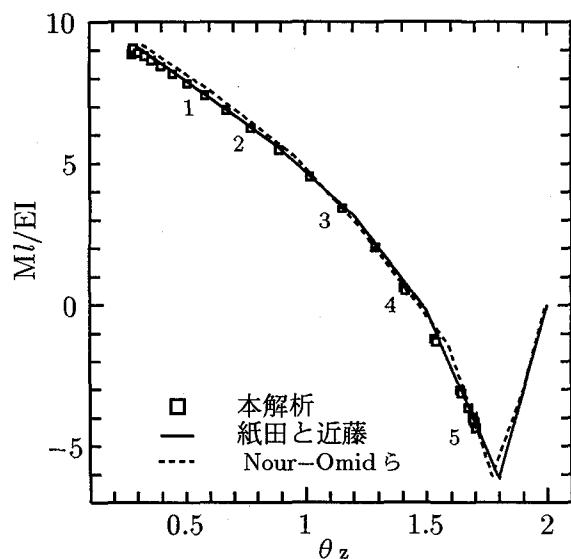


図-10 荷重-ねじれ角曲線

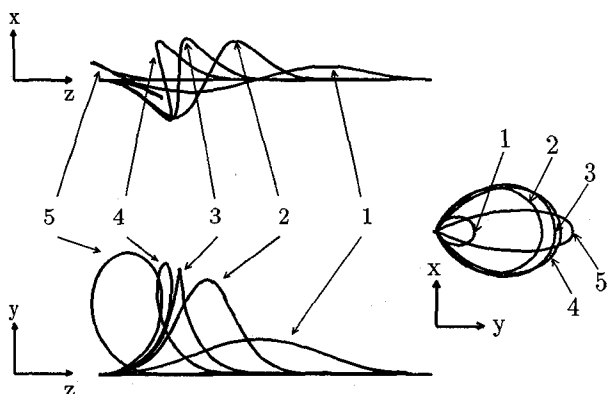


図-11 変形状

4. まとめ

本研究では、回転角の扱いが比較的明快な三次元有限変位解析の定式化を導いた。有限回転角の記述にはオイラー角を用いつつも、接線剛性方程式の回転角成分は、モーメント外力と対応して、空間固定座標三軸回りで

定義した。対称な接線剛性行列を得るためには、エネルギー原理に基づいた定式化をしなければならないが、それをする変位増分式が桁違いに複雑になるので、本研究では簡潔な定式化を優先し、エネルギー原理には基づかず通常座標変換によって剛体変位除去の手法を導入した。その結果、接線剛性行列は非対称になったが、解析例のある既存の例題を解析したところ、既存の解析とほぼ同様の結果が得られ、この程度の十分に細長い梁の有限変位解析には、本定式化でも特に精度上の問題はなかった。

参考文献

- 1) Argyris, J : Excursion into large rotations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32, p. 85-155, 1982.
- 2) Simo, J. C. and Vu-Quoc, L.: A three-dimensional finite strain rod model. Part II: Computational Aspects, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58, p. 79-116, 1986.
- 3) Bathe, K. J. and Bolourchi, S. : Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, p. 961-986, 1979.
- 4) Crisfield, M. A.: A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 81, p. 131-150, 1990.
- 5) Nour-Omid, B. and Rankin, C.C: Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, p. 353-384, 1993
- 6) 紙田 徹、近藤 恭平：梁の3次元大変形の有限要素法解析（第2報）、日本航空宇宙学会誌 43 巻、24-29 頁、1995
- 7) Yoshiaki Goto, Xian-Son LI, Toshihiro Kasugai, and Makoto Obata: Analysis of Greenhill problem by a co-rotational method, JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING, Vol., 41A, p. 411-420. 1995.
- 8) 後藤文彦、倉西 茂、岩熊哲夫：Euler 角および空間固定三軸回りの微小回転角を用いた空間骨組解析、土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集第 1 部、1314-1315 頁、1993
- 9) 細野 透：弧長法による弾性座屈解析（その 2）数値解析法としての弧長法、日本建築学会論文集、第 243 号、21-30 頁、1976
- 10) Greenhill, A.G.: Proc.Inst.Meck.Engrs., 1883.

(1996 年 9 月 6 日 受付)