

剛性行列のブロック対角化原理を用いた 対称性に起因する多重分岐点の反復精算法

Block-Diagonalized Stiffness Matrix and Pinpointing the Multiple Bifurcation Point due to Symmetry

藤井文夫¹⁾, 池田清宏²⁾, 岡澤重信³⁾

Fumio Fujii¹⁾, Kiyohiro Ikeda²⁾ and Shigenobu Okazawa³⁾

1) Dr.-Ing. 岐阜大学工学部 (〒501-11 岐阜市柳戸 fax 058-293-2404)

2) Ph.D. 東北大学工学部 (〒980-77 仙台市青葉区 fax 022-217-7418)

3) 工修 日本学術振興会特別研究員, 名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程
(〒464-01 名古屋市千種区不老町 fax 052-761-3834)

The multiple-bifurcation is one of the tough problems in computational bifurcation theory. When the stability point has to be located precisely, the toughness of the stability problem is due to the non-uniqueness of the eigenvectors for the multiple eigenvalues of the stiffness matrix and the non-predictability of the eigenvalue sensitivity during iterations. As a remedy for this computational problem, the block-diagonalization of the stiffness matrix is used during iterations to well separate the multiple eigenvalues due to the dihedral group symmetry of structural systems. In the block-diagonalized stiffness matrix, the stiffness equations have to be solved for the primary path block, while each of the multi-eigenvalues will be computed from a block stiffness matrix for the bifurcation solution. Simple, but tough multiple bifurcation models are computed in numerical examples in order to demonstrate the usefulness and capability of the present method.

Key Words: Multiple Bifurcation, Pinpointing, Group-theoretic Bifurcation Theory, Computational Bifurcation Theory, Symmetry

1. はじめに

構造系の有限変位・分岐問題のなかで解法難易度が高く、それ故に魅力的な研究課題のひとつに多重分岐現象がある。多重分岐点の強い特異性が数値的な障壁となり易く、また複数本の分岐経路が枝分かれするため、分岐つり合い解をもれなく探索することが多重分岐では重要となる。

これまで第1・第3著者(藤井・岡澤)が目指して来た計算分岐理論[2,3,5,6,7,8]のなかでは、多重分岐解の探索法は一応完成し、実用に供することができる。しかし多重分岐点の反復精算法についてはまったく未完成のままであった。単純特異点の反復精算法では、特異点でクリティカルとなる固有ペアの連続的な変化を、固有値の感度公式を用いて特異点に至るまで追跡する。多重分岐点の反復計算が機能しなくなる原因は明確で、ニュートン・ラフソン法(以下NR法と略称する)の反復点において剛性行列の固有値が多重根となり、対応する固有ベクトルが一意に特定できなくなるからである。

一方、第2著者(池田)は群論的分岐理論と言う全く別個の観点から対称構造系の分岐理論の展開を試みている[11,12,13,14,16,17]。群論的分岐理論を構造解析に用いた研究としては、Zlokovic [18]、分岐経路探索に適用した例としては、Chang and Hearley[19]、Hearley and Treacy [20]、Gatermann [21,22,23,24]などがあげられる。特にGatermannは数学ソフトReduceを用いた正六角形ドーム(半谷モデル)の詳細な分岐解析を行っている。この群論的分岐理論で扱える問題は群対称性を有する構造系のみであるが、現実の多くの多重分岐現象が対称性の喪失(Symmetry-Breaking)を伴うことから広範な多重分岐現象に対して、分岐枝の階層構造に関する先験的な見通しを与えてくれる。例えば多重分岐点において枝別れる分岐経路の本数も、クリティカルとなる固有ベクトルの対称性に基づき先験的に求まるのである。さらに、多段階の分岐に伴う対称性の喪失の仕組みを表す群の階層図(図-1および図-3)も系の対称性から求めることもできる。このため多重分岐解の探索等において五里

霧中に陥り易い計算分岐理論にとっての道標となり、群論的分岐理論と計算分岐理論とは相互に補完し得る立場にある。特に剛性行列のブロック対角化手法[14,15,16,18,19,20]は、適当な座標変換により剛性行列を、主経路解と分岐解にそれぞれ対応した小規模サイズのブロック剛性行列に分離できることから、問題の縮小化を図る事ができ、並列計算も可能となる。

本論文は、これまで全く別個に進められてきた群論的分岐理論と計算分岐理論との融合を図り、統合的に分岐問題に対処しようとする最初の試みである。群論的分岐理論における剛性行列のブロック対角化原理を併用することにより、計算分岐理論でこれまで困難とされてきた多重分岐点の反復計算を可能とした。剛性行列の固有値の多重性は、すべて構造系のつり合い形状の対称性に起因するものとする。すなわち主経路上の正則つり合い点においてはもとより、任意の反復点（非つり合い点）においても、多重固有値が発生する原因は、すべてこの群対称性に基づくものとする。試験的に計算した応用例題そのものは比較的小さな多重分岐モデルではあるが、理論の本質は捉えている。分岐点の反復計算法とブロック対角化は、これまで別個に実用的なスケールの例題に応用されており、大規模系の解析においても特に問題はなく今後の発展が期待できるものである。

2. 単純分岐点の反復精算法

従来の単純分岐点の反復精算法[3]のアウトラインを簡単にレビューしておく。目標の分岐点の近くで、特異つり合い点が満たすつり合い方程式、

$$E(u, p) = 0 \quad (2.1)$$

および固有値の拘束条件式、

$$\lambda = 0 \quad (2.2)$$

をNR法で解くことを考える。式(2.1)で u と p は、それぞれ節点変位ベクトルと荷重変数で、式(2.2)の入は剛性行列の、目標の特異点でゼロとなるような固有値である。各種変数の詳細な定義は文献[3]を参照されたい。現在の反復点で式(2.1)を線形化して

$$K\delta u - \delta p e = -E \quad (2.3)$$

これを解いて変位修正子は

$$\delta u = \delta u_E + \delta p \delta u_e \quad (2.4)$$

となる。ただし、

$$\delta u_E = -K^{-1}E \quad (2.5)$$

$$\delta u_e = +K^{-1}e \quad (2.6)$$

である。式(2.4)の変位修正子による剛性行列の変化分 ΔK は、

$$\Delta K = \Delta K_E + \delta p \Delta K_e \quad (2.7)$$

で、ここで差分近似

$$\Delta K_E = \frac{1}{\varepsilon_E} \{K(u_C + \varepsilon_E \delta u_E) - K(u_C)\} \quad (2.8)$$

$$\Delta K_e = \frac{1}{\varepsilon_e} \{K(u_C + \varepsilon_e \delta u_e) - K(u_C)\} \quad (2.9)$$

を用いた。

ΔK による 固有値の変動量 $\delta \lambda$ は

$$\delta \lambda = \delta \lambda_E + \delta p \delta \lambda_e \quad (2.10)$$

で線形近似され、ここに

$$\delta \lambda_E = \theta^T \Delta K_E \theta \quad (2.11)$$

$$\delta \lambda_e = \theta^T \Delta K_e \theta \quad (2.12)$$

である。式(2.2)を線形近似した

$$\delta \lambda = -\lambda \quad (2.13)$$

に、式(2.10)を代入して

$$\delta p = -\frac{\lambda + \delta \lambda_E}{\delta \lambda_e} \quad (2.14)$$

したがって

$$\delta u = \delta u_E + \delta p \delta u_e \quad (2.15)$$

となり、新しい反復点が

$$p \leftarrow p + \delta p \quad (2.16)$$

$$u \leftarrow u + \delta u \quad (2.17)$$

と更新される。式(2.11-12)の固有ベクトルは前の反復点での固有ペアと連続的に接続されている必要があり、注目する固有ペアは各反復点間で連続的に変化するものでなければならない。

3. 多重分岐点の反復精算法の問題点

多重分岐点の反復精算が機能しなくなる原因は明確で、反復点において剛性行列の固有値が多重根となり、着目するクリティカルな固有ベクトルが一意に特定できず（多重固有値の固有ベクトルもあり、またその線形

結合もある), 着目すると決めた固有ペアの, 目標点に至るまでの連続的な変化を反復の途中で追跡できなくなるためである. したがって目標点に至るまでの反復点において, 着目する固有ペアを何らかの方法で, 常に一意に特定できるような操作を導入するか, あるいは注目する固有値が他の固有値と分離できるなら (注目しない固有値は多重根であっても構わない), 通常の単純分岐点の反復精算法が使えるはずである. 系の対称性による多重分岐点に対し, このような状況を作為的に作り出そうと言うのが本論文の着眼点である.

多重分岐点は群論的な成因に依るものと, パラメトリックな成因に依るものとに大別される. 前者は系の対称性によるものであり, 本論文で用いるブロック対角化法は前者に対する手法であり, 解析例もこの種の多重分岐に相当する. 後者は複数の単純特異点の位置が一致することにより発生するものであり, 例としては文献[38]の図-4のL型フレームがある. このパラメトリックな多重分岐の取り扱いについては, 文献[40]で別途発表の予定である.

4. ブロック対角化原理

ブロック対角化とは構造系が明らかな対称条件を満たすとき, 群論の先験情報により剛性方程式を主経路解と分岐解に応じて, 相互に分離されたいくつかの方程式群にグループ化することを言う.

群論的分岐理論を次に簡単に紹介する (詳細は文献[16,17,25,26,27]を参照のこと). つり合い式の対称性を記述するにあたり, (鏡映や回転等を表す) 変換写像 g からなる群 G を考える. 群 G の元 g がベクトル u (または E) に作用すると, u が $T(g)u$ (または E が $T(g)E$) に変換されるとする. ここに $T(g)$ はこの座標変換の仕組を表す表現行列である. 群 G の全ての元 g が引起こす座標変換に対して,

$$T(g)E(u, p) = E(T(g)u, p), \quad g \in G \quad (4.1)$$

が成り立つとき, つり合い方程式 (2.1) は群 G に対して同変であると呼ばれる. 解 u の不変性は, 式 (4.1) とは全く異なる概念であり, $T(g)u = u \quad (g \in G)$ が成り立つとき, u は G 不変であると呼ぶ. 条件式 (4.1) は,

もし (u, p) が非線形つり合い方程式 (2.1) の解であれば, $(T(g)u, p)$ も解であることを表す多価性の条件となっている. G 不変な u に対し接線剛性行列

$$K = \frac{\partial E}{\partial u} \quad (4.2)$$

は式 (4.1) により

$$T(g)K = KT(g) \quad (g \in G) \quad (4.3)$$

という対称条件を満たし, 適当な座標変換によりブロック対角化可能である. ある群に対して同変性 (4.1) を有するつり合い方程式も適当な座標変換により, その群の既約表現に対応する式に分解できる. どのような既約表現が存在するかは群毎の個別論であるので, 後で具体例に即して述べる.

変換行列は

$$H = [\dots, H^\mu, \dots] \quad (4.4)$$

と各既約表現に対応するブロック H^μ に分解でき, この行列により接線剛性行列を

$$\tilde{K} = \text{diag}[\dots, \tilde{K}^\mu, \dots] \quad (4.5)$$

とブロック対角化できる. ここに $\text{diag}[\dots]$ は, $[\cdot]$ 内の対角ブロックから成るブロック対角行列を表す. 既約表現に対応する座標系

$$w = [\dots, (w^\mu)^T, \dots]^T \quad (4.6)$$

を

$$u = \sum_{\mu} H^\mu w^\mu \quad (4.7)$$

と定義する. 式 (4.7) により座標変換すると剛性方程式 (2.3) は,

$$\tilde{K}^\mu \delta w^\mu - \delta p \tilde{e}^\mu = -\tilde{E}^\mu \quad (4.8)$$

$$\tilde{K}^\mu \delta w^\mu = 0, \quad \mu \neq \mu^* \quad (4.9)$$

と既約表現に対応する形に分解できる. ここに式 (4.8) の μ^* は単位表現であり, 主経路に対応する.

一方, 式 (4.9) は $\tilde{K}^\mu$ が正則である場合には自明解

$$\delta w^\mu = 0 \quad (4.10)$$

を与え, 特異となる場合には分岐モード δw^μ を与える.

式 (4.9) の $\tilde{K}^\mu$ が特異行列となる分岐点でも主経路は式 (4.8) から何等支障なく求まることと [17,25], 式 (4.8) と式 (4.9) のブロック分解が特異点の分類に対

応すること[17]はブロック対角化法の大きな利点である。

ある群 G に同変な系は分岐に伴い対称性を階層的に喪失することが知られている[13,17,25,26,27]。この種の分岐現象には、群の連鎖構造 $G \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \dots$ が対応する。ここに、 $G_i \rightarrow G_{i+1}$ は G_i 不変な解から G_{i+1} 不変な解が分岐することを示す。この式はこの系の対称性が G 不変な状態から、 G_1 不変、 G_2 不変と低下して行くことに対応している。群 $G, G_1, G_2, \dots$ の分岐構造を各々調べて行くことにより、群 G に同変な系の分岐階層構造を数値解析に先立ち先験的に求めることができる。

対称性の度合いに応じてブロック剛性行列の数は異なるが、当初の剛性行列の対称性に起因する多重固有値も、ブロック対角化された剛性行列のなかでは、すべて一個づつ、別々の剛性ブロックに属するため、一個のブロック内では単一の固有値となる。したがって反復過程では常に同じ分岐ブロックに着目すれば、必然的に注目すべき固有ペアが一意に決まる。これが群論的分岐理論のブロック対角化原理を計算分岐理論に取り込む際のメリットである。

5. 分岐点の分類について

Thompson/ Hunt [28] は全ポテンシャルエネルギーの高次項の消失により特異点を分類している。この分類によると、分岐点における分岐経路の傾きがゼロのとき ($dp=0$) に対称分岐、ゼロでないとき ($dp \neq 0$) には非対称分岐点と分類される。この分類方法自体は理論的に完結しており、計算分岐理論もこの分類に従い何等問題はない。しかし実際の分岐経路の探索にあたっては、分岐経路の傾きが完全にゼロであるか否かを数値的に確認することは容易ではなく、プロットされた分岐経路の形状も参考にして判断しているのが実情である。実際に本論文でも、図-5の三角トラストームの計算についてもこのように判断している。

一方、池田等 [13]は一本の分岐経路について、分岐点の両側で互いに逆方向に伸びる片側経路(half branch)が、ともに同一の物理現象に対応している場合には対称分岐点、そうでない場合には非対称分岐点と分類してい

る。この分類方法を数学的に記述すると、クリティカルな固有ベクトル θ_j ($\lambda_j=0$ のときの K の固有ベクトルで、2重分岐点では分岐経路の方向を指すように取る) に対して、

$$T(g)\theta_j = -\theta_j, \exists g \in G \quad \text{対称分岐} \tag{5.1}$$

$$T(g)\theta_j \neq -\theta_j, \forall g \in G \quad \text{非対称分岐} \tag{5.2}$$

となる。この定義によると対称分岐点では、一方向に枝別れする解 (u, p) が求まると、逆方向に分岐する解は、 $(T(g)u, p)$ により自明に求まるので、片側方向の分岐解のみを計算すればよいことになる。一方、非対称分岐経路については、両方向に伸びる分岐枝を求める必要がある。このように、群論的分岐理論におけるこの分類定義は分岐探索の手順と整合していると言う利点があり、またその判別も非常に容易である。本論文で取り扱う D_n 不変系の特異点を、Thompson/ Hunt [28]および池田等 [13]の分類法により分類すると、表1のようになる。

表-1 D_n 不変な系の分岐点の分類 ^{注)}			
固有ベクトルの対称性	D_n	C_n $D_{n/2}$ or $D^2_{n/2}$	C_m
特異点の分類	荷重極限点	単純分岐点	2重分岐点
池田等の分類 [13] (群論的分岐理論)	荷重極限点	対称分岐点	n/m =偶数 対称分岐 n/m =奇数 非対称分岐
Thompson/ Hunt の分類 [28] (計算分岐理論)	荷重極限点	対称分岐点	$n/m=3$ 非対称分岐 $n/m \geq 4$ 対称分岐
分岐解の対称性	D_n	C_n , $D_{n/2}$ or $D^2_{n/2}$	D_m^j ($j=1, \dots, n/m$)
^{注)} $D_{n/2}$ と $D^2_{n/2}$ は n が偶数の時のみ存在する			

特に2重分岐点については、 n/m が5以上の奇数である場合には、両分類法では対称・非対称分岐の判別が異なるので注意を要する。Thompson/Hunt の定義がより一般的であるが、数値解析において分岐点の種類を分類する際には池田等の定義の方が簡便である。両定義法を適宜使い分ける必要があるといえよう。

ここに正 n 角形状の対称性を表す二面体群 D_n は、

$$D_n = \left\{ e, r\left(\frac{2\pi}{n}\right), \dots, r\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right), s, sr\left(\frac{2\pi}{n}\right), \dots, sr\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \right\} \tag{5.3}$$

と定義される。ここで $\{\cdot\}$ は括弧内の元からなる群を、 $\mathbf{e}$ は恒等変換を表す。 $\mathbf{s}$ は XZ 平面に関する鏡映、 $r(\varphi)$ は反時計回りの $\varphi(0 \leq \varphi < 2\pi)$ の回転 (図-4 の原点 0 回り) である。また D_n の部分対称性を表す D_n の部分群は、

$$D_m^j = \left\{ \mathbf{e}, r\left(\frac{2\pi}{m}\right), \dots, r\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right), sr\left(\frac{j-1}{n}2\pi\right), sr\left(\left(\frac{j-1}{n} + \frac{1}{m}\right)2\pi\right), \dots, sr\left(\left(\frac{j-1}{n} + \frac{m-1}{m}\right)2\pi\right) \right\}, \quad j=1, \dots, \frac{n}{m} \quad (5.4)$$

$$C_m = \left\{ \mathbf{e}, r\left(\frac{2\pi}{m}\right), \dots, r\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right) \right\} \quad (5.5)$$

と定義される。ここで $D_m = D_m^1$ とし、位数 m の二面体群 D_m^j は m 本の線対称軸に関する線対称モードを、巡回群 C_m は角度 $\frac{2\pi}{m}$ に対する回転対称モードを、 C_1 は非対称モードをそれぞれ表す。

6. ブロック対角化原理の適用例

図-4 に示す D_4 不変コーン型 4 本材トラス構造系の群対称性を考察する。 D_4 は正方形の対称性を表す群であり、

$$D_4 = \left\{ \mathbf{e}, r\left(\frac{\pi}{2}\right), r(\pi), r\left(\frac{3\pi}{2}\right), \mathbf{s}, sr\left(\frac{\pi}{2}\right), sr(\pi), sr\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right\} \quad (6.1)$$

と定義される。群 D_4 の部分群は

$$D_2^j = \left\{ \mathbf{e}, r(\pi), sr\left(\frac{\pi}{2}(j-1)\right), sr\left(\frac{\pi}{2}(j+1)\right) \right\}, \quad j=1, 2 \quad (6.2)$$

$$D_1^j = \left\{ \mathbf{e}, sr\left(\frac{\pi}{2}(j-1)\right) \right\}, \quad j=1, \dots, 4 \quad (6.3)$$

$$C_4 = \left\{ \mathbf{e}, r\left(\frac{\pi}{2}\right), r(\pi), r\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right\} \quad (6.4)$$

$$C_2 = \{ \mathbf{e}, r(\pi) \} \quad (6.5)$$

$$C_1 = \{ \mathbf{e} \} \quad (6.6)$$

と表される。この場合の座標変換行列 $\mathbf{H}$ は

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_{D_4}^1, \dots, \mathbf{H}_{D_4}^6] \quad (6.7)$$

と定義できる。ここに各既約表現に対応するブロック $\mathbf{H}_{D_4}^j$ ($j=1, \dots, 6$) はつぎにのような対称性を持つように取れる。

$$\Sigma \mathbf{H}_{D_4}^1 = D_4, \quad \Sigma \mathbf{H}_{D_4}^2 = C_4, \quad \Sigma \mathbf{H}_{D_4}^3 = D_2 \quad (6.8-10)$$

$$\Sigma \mathbf{H}_{D_4}^4 = D_2^2, \quad \Sigma \mathbf{H}_{D_4}^5 = D_1^1, \quad \Sigma \mathbf{H}_{D_4}^6 = D_1^3 \quad (6.11-13)$$

ここに $\Sigma \{\cdot\}$ は括弧の中の行列の列ベクトルの対称性を表す群を意味する。しかし図-4 のトラス構造系は

中央節点での 3 自由度しか持たないために上の 6 個のブロック $\mathbf{H}_{D_4}^j$ ($j=1, \dots, 6$) のうち、3 ブロックしか成分を持たず、

$$\mathbf{H}_{D_4}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{H}_{D_4}^2 = \phi, \quad \mathbf{H}_{D_4}^3 = \phi \quad (6.14-16)$$

$$\mathbf{H}_{D_4}^4 = \phi, \quad \mathbf{H}_{D_4}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{H}_{D_4}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (6.17-19)$$

となる。ここに ϕ は対応するブロックが存在しないことを示す。このように自由度が少ない系ではブロック構造の退化が発生する。式 (6.14)~式 (6.19) から明らかに、この場合には接線剛性行列は最初からブロック対角行列であり、

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \text{diag}[\tilde{\mathbf{K}}_{D_4}^1, \tilde{\mathbf{K}}_{D_4}^5, \tilde{\mathbf{K}}_{D_4}^6], \quad \tilde{\mathbf{K}}_{D_4}^5 = \tilde{\mathbf{K}}_{D_4}^6 \quad (6.20-22)$$

が成り立つ。

表-2 分岐解の分類 注)			
(a) D_4 不変コソ型 4 本部材トラス構造系 (図-4)			
$\det \tilde{K}_{D_4}^j = 0$ を満たす j	1	5 および 6	
特異点の 種類	荷重 極限点	2 重対称 分岐点 注)	
固有ベクトル の対称性	D_4	C_1	
(分岐) 解の 対称性	D_4	D_1^j ($j=1,2,3,4$)	
(b) D_3 不変トラスドーム (図-5)			
$\det \tilde{K}_{D_4}^j = 0$ を満たす j	1	2	3 および 4
特異点の 種類	荷重 極限点	単 純 対 称 分岐点 注)	2 重非対称 分岐点 注)
固有ベクトル の対称性	D_3	C_3	C_1
(分岐) 解の 対称性	D_3	C_3	D_1^j ($j=1,2,3$)
注) 表-2 で言う「対称分岐」、「非対称分岐」とはそれぞれ、池田等[13]の呼称による。これは通常、分岐点が分岐経路の荷重極限点と一致するか否かで、それぞれ「対称分岐」、「非対称分岐」とする Thompson/Hunt[28]の呼称とは異なるので注意を要する。			

特異点で特異となる対角ブロックの種類に応じて、表-2(a)に示すように特異点を分類できる。 $\tilde{\mathbf{K}}_{D_4}^1$ が特異となる点は単純特異点であり、荷重の極大・極小点に対応する。2 個の同一の対角ブロック $\tilde{\mathbf{K}}_{D_4}^5$ と $\tilde{\mathbf{K}}_{D_4}^6$ が同時に特異となる特異点は群論的 2 重分岐点である。この分岐点ではゼロ固有値に対応する 2 個の固有ベクトルの線

形和はある特定の方向を除いては C_1 不変, すなわち対称性を持たないが, 分岐解は $D_1^j (j=1,2,3,4)$ 不変な方向にのみ存在することが知られている[13]. D_4 不変な主径路を求めるにはブロック $\tilde{K}_{D_4}^1$ だけを用いればよく,

D_1 不変な分岐解を求めるにはブロック $\tilde{K}_{D_4}^1$ と $\tilde{K}_{D_4}^5$ だけを用いればよいので, 数値解析上非常に有利である. このことは D_4 不変な変形を表す空間は, $H_{D_4}^1$ の列ベクトル (この場合は1本) により張られるのに対し, D_1 不変な変形を表す空間は, $H_{D_4}^1$ と $H_{D_4}^5$ の列ベクトルの和により張られることに対応する. これは D_4 不変な変形は D_1 不変性を, その部分対称性として持っていることによる (この詳細については, 文献[29]の既約表現に対応する最大空間を参照のこと) .

図-1 にこの D_4 不変ドームの分岐の仕組みを示す. 図中の実線の矢印はこのドームに起こり得る分岐を表し, 破線の矢印は, D_4 不変系には存在するが, ブロック構造の退化のために, このドームには存在しない分岐を表す. このように自由度の少ない系では, 群論的分岐理論により求めた分岐の仕組みをブロック構造の退化を考慮して書き直すことが必要になる.

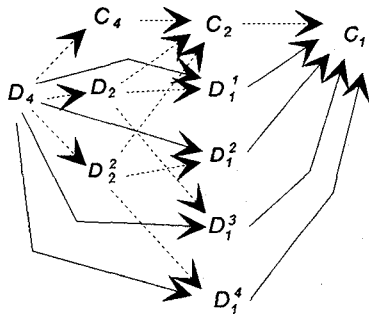


図-1 D_4 同変な系の分岐階層構造

次に図-5 に示す D_3 不変なトラスドーム構造系について考える. D_3 は

$$D_3 \equiv \left\{ e, r\left(\frac{2\pi}{3}\right), r\left(\frac{4\pi}{3}\right), sr\left(\frac{2\pi}{3}\right), sr\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right\} \quad (6.23)$$

と, 群 D_3 の部分群は

$$D_1^j \equiv \left\{ e, sr\left(\frac{2\pi}{3}(j-1)\right) \right\}, \quad j=1, \dots, 3 \quad (6.24)$$

$$C_3 \equiv \left\{ e, r\left(\frac{2\pi}{3}\right), r\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right\} \quad (6.25)$$

$$C_1 \equiv \{e\} \quad (6.26)$$

と定義される.

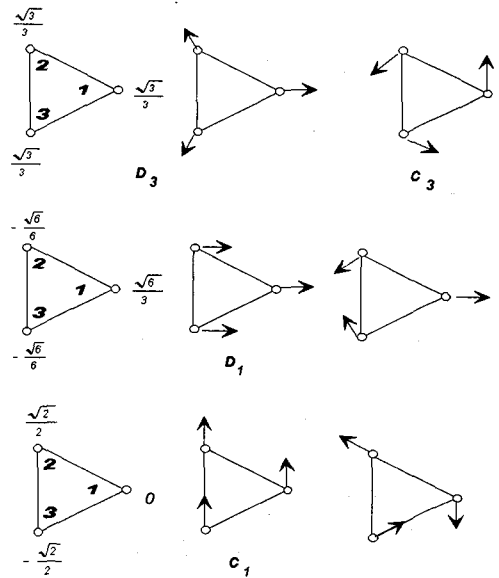


図-2 D_3 不変分岐モデル (図-5) の変形モード

図-2 に各モードが表す対称性の例を示す. ここに図中の数字は鉛直方向の変位を, 矢印は水平方向の変位をそれぞれ表す. この場合の座標変換行列 H は

$$H \equiv [H_{D_3}^1, \dots, H_{D_3}^4] \quad (6.27)$$

と定義できる. ここに各既約表現に対応するブロック $H_{D_3}^j (j=1, \dots, 4)$ は次のような対称性を持つように取る.

$$\Sigma H_{D_3}^1 = D_3, \quad \Sigma H_{D_3}^2 = C_3, \quad \Sigma H_{D_3}^3 = D_1, \quad \Sigma H_{D_3}^4 = C_1 \quad (6.28-31)$$

接線剛性行列のブロック対角形は

$$\tilde{K} = \text{diag}[\tilde{K}_{D_3}^1, \tilde{K}_{D_3}^2, \tilde{K}_{D_3}^3, \tilde{K}_{D_3}^4] \quad (6.32)$$

となる. 座標変換行列を適当に取ることにより

$$\tilde{K}_{D_3}^3 = \tilde{K}_{D_3}^4 \quad (6.33)$$

が成り立つ. 特異点で特異となる対角ブロックの種類に応じて, 表-2(b)に示すように特異点を分類できる. $\tilde{K}_{D_3}^1$ または $\tilde{K}_{D_3}^2$ が特異となる点は単純特異点である. $\tilde{K}_{D_3}^1$ は荷重の極大・極小点に対応し, $\tilde{K}_{D_3}^2$ は C_1 不変な解が分岐する単純対称分岐点に対応する. 2 個の同一の対角ブロック $\tilde{K}_{D_3}^3$ と $\tilde{K}_{D_3}^4$ が同時に特異となる特異点は群論的 2 重分岐点である. この分岐点ではゼロ固有値に対応する 2 個の固有ベクトルの線形和はある特定の方向を除いては C_1 不変, すなわち対称性を持たないが, 分岐解は $D_1^j (j=1,2,3,4)$ 不変な方向にのみ存在することが知られ

ている[13]。\$D_3\$不変な主経路を求めるにはブロック \$\tilde{K}_{D_3}^1\$ だけを用いればよく、\$D_1\$不変な分岐解を求めるにはブロック \$\tilde{K}_{D_3}^1\$ と \$\tilde{K}_{D_3}^3\$ だけを用いればよい。図-3に \$D_3\$同変な系の分岐の仕組みを示す。

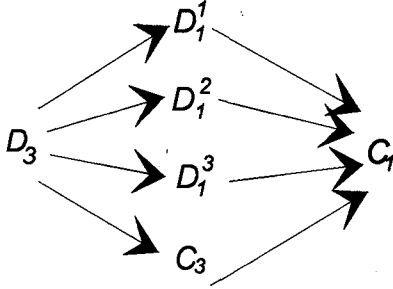


図-3 \$D_3\$同変な系の分岐階層構造

ブロック対角化のポイントである座標変換行列 \$\mathbf{H}\$ のより具体的な表現を、計算例の図-4と図-5にある多重分岐モデルについて求めておく。いずれも3Dトラスであるので、鉛直および水平方向の変形モードに大別し、各モデルの任意の変形を表現するのに必要な相互に独立・直交したモードを求めておく。変位ベクトル \$\mathbf{u}\$ のなかで各節点自由度の順序は、節点番号をまず優先し、ひとつの節点番号のなかで \$(U, V, W)\$ の順とする。コーン型モデル(図-4)は、中央節点での並進変位のみであり、剛性行列はすでに対角行列となっている。つぎに図-5にあるような、\$D_3\$-不変な正三角系の任意の変形モードは図-2のような独立モードに分割でき、9行9列の座標変換行列 \$\mathbf{H}\$ は次のようになる。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

7. 群論的分岐理論と計算分岐理論の融合

剛性行列のブロック対角化を取り込んだ多重分岐点の反復精算法の具体的な非線形解法を説明する。式(4.7)の座標変換によって、つり合い方程式と線形化つり合い方程式は、それぞれ

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} \delta \tilde{\mathbf{w}} - \delta p \tilde{\mathbf{e}} = -\tilde{\mathbf{E}} \quad (7.2)$$

と変換される。ここに、ブロック対角化された剛性方程式に関する状態量に波線 \$(\sim)\$ を付け、

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{H}^T \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{H}^T \mathbf{K} \mathbf{H}, \quad \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{H}^T \mathbf{e} \quad (7.3-5)$$

とする。ブロック対角化された剛性行列 \$\tilde{\mathbf{K}}\$ が、例えば3個のブロック剛性行列から成るとき、相互に分離された剛性方程式群は次のようになる。

$$\text{ブロック 1: } \tilde{\mathbf{K}}_1 \delta \tilde{\mathbf{w}}_1 - \delta p \tilde{\mathbf{e}}_1 = -\tilde{\mathbf{E}}_1 \quad (7.6)$$

$$\text{ブロック 2: } \tilde{\mathbf{K}}_2 \delta \tilde{\mathbf{w}}_2 - \delta p \tilde{\mathbf{e}}_2 = -\tilde{\mathbf{E}}_2 \quad (7.7)$$

$$\text{ブロック 3: } \tilde{\mathbf{K}}_3 \delta \tilde{\mathbf{w}}_3 - \delta p \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\tilde{\mathbf{E}}_3 \quad (7.8)$$

このうち例えば、主経路解を与えるブロックがブロック1、分岐解を与えるブロックがブロック2とブロック3であるとする。このとき主経路のブロック1の剛性方程式を解くと、

$$\delta \tilde{\mathbf{w}}_1 = \delta \tilde{\mathbf{w}}_{1E} + \delta p \delta \tilde{\mathbf{w}}_{1e} \quad (7.9)$$

となる。ここに

$$\delta \tilde{\mathbf{w}}_{1E} = -\tilde{\mathbf{K}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_1 \quad (7.10)$$

$$\delta \tilde{\mathbf{w}}_{1e} = +\tilde{\mathbf{K}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (7.11)$$

とおいた。一方分岐ブロックについては

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{0} \quad (7.12-13)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_3 = \mathbf{0} \quad (7.14-15)$$

であるから、対応するブロック剛性行列が特異行列となる分岐点以外では、分岐解は自明解

$$\delta \tilde{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{0}, \quad \delta \tilde{\mathbf{w}}_3 = \mathbf{0} \quad (7.16-17)$$

となる。したがって

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_E + \delta p \delta \mathbf{u}_e \quad (7.18)$$

ここに

$$\delta \mathbf{u}_E = \mathbf{H} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{\mathbf{w}}_{1E} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.19)$$

$$\delta \mathbf{u}_e = \mathbf{H} \begin{Bmatrix} \delta \tilde{\mathbf{w}}_{1e} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

である。剛性方程式の解法は、縮小サイズの主経路ブロックの剛性方程式についてのみに必要とされ、荷重変数の変動量 \$\delta p\$ は、つぎのような線形化されたゼロ固有値の条件から決まる。

$$\delta \tilde{\lambda}_2 = -\tilde{\lambda}_2 \quad (7.21)$$

注目する固有値はたとえ多重根であっても、分岐ブロックのブロック剛性行列からそれぞれ一個ずつ計算されてくる。式 (7.21) において $\tilde{\lambda}_2$ はブロック 2 に属する $\tilde{\mathbf{K}}_2$ の固有値である。ここで 式 (7.21) の左辺の固有値の変動量 $\delta \tilde{\lambda}_2$ を評価するために、まず変位変動 $\delta \mathbf{u}$ による剛性行列 $\mathbf{K}$ の変動 $\Delta \mathbf{K}$ を求める。この $\Delta \mathbf{K}$ の評価には 式 (2.7-2.9) がそのまま使える。 $\Delta \mathbf{K}_E$ および $\Delta \mathbf{K}_e$ をブロック対角化したときの、ブロック剛性行列をそれぞれ

$$\Delta \tilde{\mathbf{K}}_E = \text{diag}(\Delta \tilde{\mathbf{K}}_{1E}, \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{2E}, \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{3E}) \quad (7.22)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{K}}_e = \text{diag}(\Delta \tilde{\mathbf{K}}_{1e}, \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{2e}, \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{3e}) \quad (7.23)$$

とすると、

$$\delta \tilde{\lambda}_2 = \delta \tilde{\lambda}_{2E} + \delta p \delta \tilde{\lambda}_{2e} \quad (7.24)$$

ここに固有値の感度式

$$\delta \tilde{\lambda}_{2E} = \tilde{\theta}_2^T \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{2E} \tilde{\theta}_2, \quad \delta \tilde{\lambda}_{2e} = \tilde{\theta}_2^T \Delta \tilde{\mathbf{K}}_{2e} \tilde{\theta}_2 \quad (7.25-26)$$

を用いた。 $\tilde{\theta}_2$ はブロック剛性行列 $\tilde{\mathbf{K}}_2$ の固有ベクトルである。式 (7.24) を式 (7.21) に代入して、荷重増分 δp が、

$$\delta p = - \frac{\tilde{\lambda}_2 + \delta \tilde{\lambda}_{2E}}{\delta \tilde{\lambda}_{2e}} \quad (7.27)$$

と決まる。したがって変位増分も

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_E + \delta p \delta \mathbf{u}_e \quad (7.28)$$

となり、修正量 ($\delta p, \delta \mathbf{u}$) が求まる。

8. 応用計算

8.1 コーン型4本部材トラス

最初に図-4にある4本部材からなるコーン型トラスを考える。これは自由度の数を変えず、部材の本数を変えるだけで分岐経路の本数を操作でき、しかも手計算で分岐解析が可能となる多重分岐のベンチマークモデルのひとつである。式 (6.20) からわかるように剛性行列は主経路に沿って対角行列であり、鉛直方向変位 W のみに依存する。線形化方程式は、

$$\begin{bmatrix} f(W) & 0 & 0 \\ 0 & g(W) & 0 \\ 0 & 0 & h(W) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta V \\ \delta W \end{bmatrix} - \delta p \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3(W) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

ここに

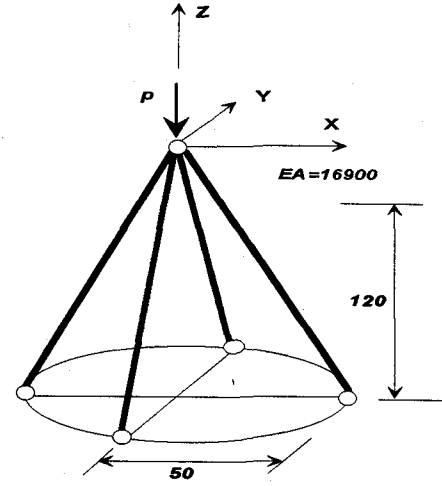


図-4 コーン型4本部材トラス

$$\left. \begin{aligned} f(W) &= 520 \frac{\gamma}{\alpha} + 650000 \frac{1}{\alpha^2} - 650000 \frac{\gamma}{\alpha^3} \\ g(W) &= f(W) \\ h(W) &= 130 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 130 \frac{\gamma \beta^2}{\alpha^3} + 520 \frac{\gamma}{\alpha} \\ E_3(W, p) &= 260 \frac{\gamma \beta}{\alpha} - p(-1) \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2500 + (120 - W)^2} \\ \beta &= -240 + 2W \\ \gamma &= \alpha - 130 \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

である。主経路のブロック剛性方程式を解いて

$$\begin{Bmatrix} \delta U \\ \delta V \\ \delta W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E_3}{h} \end{Bmatrix} + \delta p \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{h} \end{Bmatrix} \quad (8.4)$$

この変位変動による剛性係数 f の変化分 Δf は

$$\Delta f = \Delta f_E + \delta p \Delta f_e \quad (8.5)$$

で、これは固有値の変動分 δf そのものに等しい。したがって

$$\delta f = \Delta f_E + \delta p \Delta f_e \quad (8.6)$$

これを、

$$\delta f = -f \quad (8.7)$$

に代入して

$$\delta p = - \frac{f + \Delta f_E}{\Delta f_e} \quad (8.8)$$

主経路に沿って2重根固有値 ($f = g$) が発生し、両者を分離するのに固有値 f の属するブロックの方のみに着目する。実際に多重分岐点を原点から出発して反復計算した結果、

状態量 ($p, \quad W, \quad \lambda, \quad |E|$)

出発点 (0, 0, 38.46, 0)
 → (5931.55, -13.387, -2.32, 1.6×10^{-2})
 → (5464.52, -12.666, -6.6×10^{-3} , 6.1×10^{-1})
 → (5463.03, -12.664, -5.6×10^{-8} , 5.1×10^{-6})
 → (5463.03, -12.664, -2.2×10^{-11} , 7.0×10^{-16})

と4回の反復で収束し、数値計算上、ゼロ固有値については 10^{-10} の精度で、つり合い条件については 10^{-15} の精度で目標の多重分岐点に到達できた。この分岐点で、分岐解の剛性係数 f はゼロであるが（特異行列），主経路の剛性係数 h はゼロとはならない（正則行列）。

8・2 三角形トラス

つぎの例題は図-5にある多重分岐モデルで、その分岐構造は、文献[16]のなかで池田・室田によってすでに解明されている。図-6と図-7につり合い経路を示す。主経路上に荷重極限2個(LP1, LP2)と分岐点4個(BP1, BP2, BP3, BP4)が出現し、これらの特異点はすべて本報のピンポイント法で精算できた。6個の特異点の座標を表-3にまとめた。4個の分岐点はすべて多重分岐点で、BP1とBP2におけるクリティカルな固有ベクトルを図-8に示す。代表的な反復状況の例をあげると、例えばBP1付近からBP1を狙って3回の反復で収束し、目標点より離れた原点から狙っても4回の反復で目標点に安定に収束している。

多重分岐経路の探索方法については従来の計算分岐理論による方法[2,4,5]により、いずれも3本の経路をすべて検出できた。この本数は群論的分岐理論の予見と一致する[13,16]。BP1とBP4からは、計算分岐理論で言う対称不安定分岐経路（表-2の群論的分岐理論の分類で

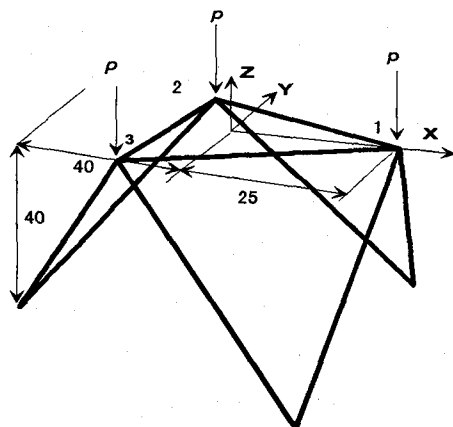


図-5 三角形トラス (EA=1.0)

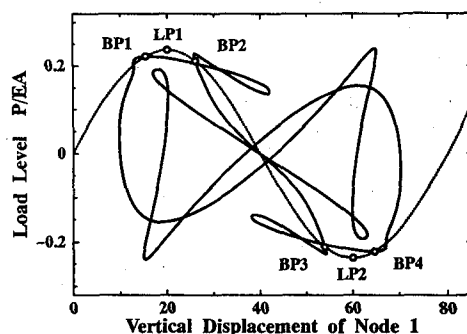


図-6 主経路と1本のループ状の分岐経路

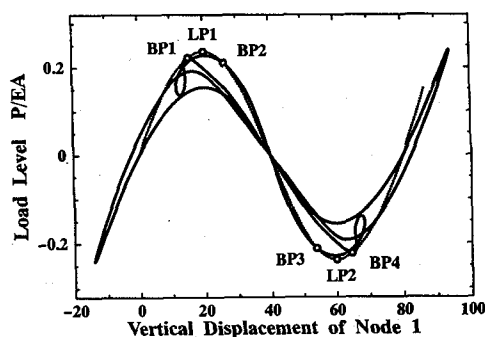


図-7 主経路と2本のループ状の分岐経路

は非対称分岐経路) が3本, BP2とBP3からは、計算分岐理論で言う非対称分岐経路（表-2の群論的分岐理論の分類でも非対称分岐経路) が3本派生している。4個の多重分岐点から派生しているこれら3本の分岐経路は相互に接続し3本のループを形成していることが確認できた。このようなループ状の分岐経路は[30]においても報告されている。図-3に示す可能な枝別れのうち、実際の計算では $D_3 \rightarrow D_1^j$ の分岐が確認された。

表-3 精算された特異点の座標
(W₁: 節点1の鉛直変位)

特異点	p	W ₁
BP1	+0.2219	-5.4131
LP1	+0.2363	-20.034
BP2	+0.2112	-26.077
BP3	-0.2112	-53.921
LP2	-0.2363	-59.965
BP4	-0.2219	-64.586

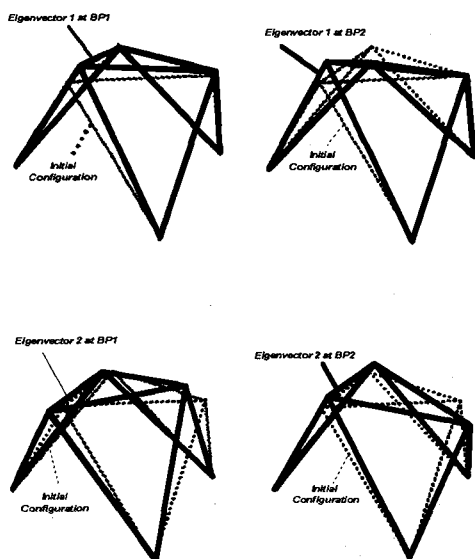


図-8 固有ベクトルの示す変形モード

9. 結語

群論的分岐理論のブロック対角化原理を、計算分岐理論の特異点反復精算法の中に取り入れ、これまで困難であった多重分岐点の反復精算法を考案した。この多重分岐点の反復精算法の特徴と本論の結論は次の通りである。

- 系の対称性に起因する任意多重度の固有値に対しても着目する固有ペアを他のものと区別でき、反復中にいわゆる固有ベクトルの不本意な切り替わりは発生しない。
- 主経路上の多重分岐点を反復精算するには、主経路に対応するブロック剛性方程式の解法と、分岐解のブロック剛性行列の固有値解析とを必要とする。
- 目標の分岐点に収束するにつれ剛性行列 K が特異行列に近づく。このため従来の反復精算法では、収束条件を厳しく設定し過ぎたり、目標点の周りの擬特異の範囲が広い問題の場合には、収束一步手前の反復ステップで剛性方程式が悪条件となり、収束が悪化する傾向も見られることがある。一方ブロック対角化を併用した多重分岐点反復精算法では、主経路に対応するブロック剛性行列は目標の多重特異点でも正則行列のままで、数値的不安定は起こらず最後まで極めて安定に目標点に到達できる。

- 主経路上の荷重極限点を反復精算するには、主経路に対応するブロック剛性方程式の解法と同じブロック剛性行列の固有値解析を必要とする。
- 剛性方程式の解法と固有値解析はいずれも、縮小サイズの剛性行列について行うため、数理計算上有利であり、並列解析にも適している。
- 剛性行列のブロック対角化は、行列成分ごとに行うことも可能であり、数理計算上大きな負荷とはならない。
- 今後ブロック対角化を非線形有限要素解析のなかに取り込むためには、座標変換行列 H を自動生成する汎用プログラムが必要である。
- 計算された多重分岐モデルの分岐点はすべて多重分岐点でしかも、少自由度の故に、また挙動が複雑な割には、その解がすべてわかっているためベンチマークモデルとしては最適である。
- 実際に計算分岐理論によって解明された分岐構造と分岐経路の接続関係はすべて群論的分岐理論により事前に予見された分岐階層によって説明ができる。
- 対称性を持つ系の分岐現象は非常に複雑であるが、その仕組みは理論的に解明し得るものである。分岐解析においてもその仕組みを理解し、その先験情報を活用することが望ましい。本論文で提案する群論的分岐理論（定性論）と計算分岐理論（定量論）との融合は、その端緒となるものである。
- 近年、土、コンクリート、金属等の変形・破壊現象を分岐不安定現象として取り扱う研究も行われるようになってきており、材料非線形挙動を理解する上での一助となっている[31-36]。この種の材料不安定現象を解明するにあたり、塑性分岐解析手法の開発は緊急の課題[37]である。

謝辞

本研究は、日本学術振興会の特別研究員である第3著者（岡澤重信）の文部省科学研究費補助金（特別研究員奨励費）の一部を用いて行われたことを付記する。

参考文献

- [1] 藤井文夫；連立非線形つり合い方程式の大域的解法について，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第19巻，345-350，1996.
- [2] 藤井文夫，内藤幹夫；任意点よりつり合い経路に到達できる大域的非線形解法，構造工学論文集，Vol. 40A，395-406，1994年3月.
- [3] 藤井文夫，内藤幹夫；特異つり合い点を反復精算するための局所的大域的非線形解法，構造工学論文集，Vol. 41A，455-464，1995年3月.
- [4] 岡澤重信，藤井文夫；検出もれのない多重分岐つり合い解の求解法について，日本機械学会 第8回計算力学講演会（長野市）講演論文集，349-350，1995.
- [5] 岡澤重信，藤井文夫；多重分岐のベンチマークモデルと分岐経路の探索方法について，構造工学論文集，Vol. 41A，465-474，1995年3月.
- [6] Fujii, F. and Choong, K. K.; Branch-Switching in Bifurcation of Structures, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 118, No. 8, 1578-1596, 1992.
- [7] Fujii, F. and Okazawa, S.; Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, March 1997 (to appear).
- [8] Fujii, F. and Ramm, E.; Computational Bifurcation Theory - Path-tracing, Pinpointing and Path-Switching, *Invited Lecture, Int. Conf. on Stability of Structures, Coimbatore*, June 1995, *Proceedings*, 177-191, 1995.
- [9] Fujii, F. and Okazawa, S.; Multi-Bifurcation Models in Nonlinear Elasticity, *Proceedings of Int. Conf. on Computational Methods in Structural and Geotechnical Engineering, Hong Kong*, Vol. II, 583-588, 1994.
- [10] Fujii, F. and Okazawa, S.; Global and Local Procedures to Compute the Stability Point, *ICTAM, Lecture Session "Stability of Structures"*, Kyoto, 1996.
- [11] 有尾一郎，池田清宏，鳥居邦夫；ブロック対角化法による平面構造物の有限要素並列解析，構造工学論文集，Vol. 38A，317-324，1992.
- [12] 池田清宏，中沢正利，和知聡；長方形板の分岐階層構造の境界条件による退化，土木学会論文集，No. 507, /I-30, 65-75, 1995.
- [13] Ikeda, K., Murota, K., and Fujii, H.; Bifurcation Hierarchy of Symmetric Structures, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 27, No. 12, 1551-1573, 1991.
- [14] Ikeda, K., Ario, I., and Torii, K.; Block-Diagonalization Analysis of Symmetric Plates, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 29, No. 22, 2779-2793, 1992.
- [15] Ario, I., Ikeda, K., and Murota, K.; Block-Diagonalization Method for Symmetric Structures with Rotational Displacements, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol. 11, No. 1, 1-10, JSCE, 1994.
- [16] Ikeda, K., and Murota, K.; Bifurcation Analysis of Symmetric Structures using Block-Diagonalization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 86, No. 2, 215-243, 1991.
- [17] Murota, K. and Ikeda, K.; Computational Use of Group Theory in Bifurcation Analysis of Symmetric Structures, *SIAM. J. of Sci. & Statistical Computing*, Vol. 12, No. 2, 273-297, 1991.
- [18] Zlokovic, G.; *Group Theory and G-vector Spaces in Structural Analysis*, John Wiley and Sons, Chichester, 1989.
- [19] Chang, P. and Healey, P.; Computation of Symmetry Modes and Exact Reduction in Nonlinear Structural Analysis, *Computers & Structures*, Vol. 28, No. 2, 135-142, 1988.
- [20] Healey, T.J. and Treacy, J.A.; Exact Block Diagonalization of Large Eigenvalue Problems for Structures with Symmetry, *Int. J. for Numerical Methods and Engineering*, Vol. 31, 265-285, 1991.
- [21] Gatermann, K. and Hohmann, A.; Symbolic Exploitation of Symmetry in Numerical Path-following, *Impact of Computing in Science and Engineering*, 3, 330-365, 1991.
- [22] Gatermann, K. and Hohmann, A.; Hexagonal Lattice Dome - Illustration of a Non-trivial Bifurcation Problem, *Konrad-Zuse-Zentrum, Preprint*, SC91-8, 1991.
- [23] Gatermann, K.; Computation of Bifurcation Graphs, in *Exploiting Symmetry in Applied and Numerical Analysis*, eds. Allgower, E., Georg, K. & Miranda, R., *AMS Lectures in Applied Mathematics*, 1993.
- [24] Gatermann, K. and Werner, B.; Group Theoretical Mode Interactions with Different Symmetries, *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, Vol. 4, No. 1, 177-191, 1994.
- [25] Fujii, H. and Yamaguti, M.; Structure of Singularities and its Numerical Realization in Nonlinear Elasticity, *J. Math. Kyoto Univ.*, 20, 498-590, 1980.
- [26] Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G.; *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [27] Golubitsky, M., Stewart, I., and Schaeffer, D.G.; *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [28] Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W.; *General Theory of Elastic Stability*, John Wiley and Sons, 1973.
- [29] Fujii, H., Mimura, M., and Nishiura, Y.; A Picture of the Global Bifurcation Diagram in Ecological Interacting and Diffusing Systems, *Physica, D.*, 5, 1-42, 1982.
- [30] Nishino, F., Ikeda, K., Sakurai, T. and Hasegawa, A.; A Total Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Trusses, *Proc. of JSCE.*, No. 344/I-1, 39-53, 1984.
- [31] Ikeda, K. and Goto, S.; Imperfection Sensitivity for Size Effect of Granular Materials, *Soils and Foundations*, Vol. 33-2, 157-170, 1993.
- [32] Ikeda, K., Murota, K. and Nakano, M.; Echelon Modes in Uniform Materials, *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 31-19, 2709-2733, 1994.

- [33] Asaoka, A. and Noda, T.; *Imperfection-sensitive Bifurcation of Cam-clay under Plane Strain Compression with Undrained Boundaries*, *Soils and Foundations*, Vol. 35-1, 83-100, 1995.
- [34] Ikeda, K., Maruyama, K., Ishida, H. and Kagawa, S.; *Bifurcation in Compressive Behavior of Concrete*, *Materials Journal, ACI*, 1997 (to appear).
- [35] Ikeda, K., Chida, T. and Yanagisawa, E.; *Imperfection Sensitive Strength Variation of Soil Specimens*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1997. (to appear)
- [36] Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y. and Yanagisawa, E.; *Mode Switching and Recursive Bifurcation in Granular Materials*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1997. (to appear)
- [37] 岡沢重信, 藤井文夫, 宇佐美勉 ; 剛性行列の固有値制御による弾塑性分岐点の精算法, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997.
- [38] 藤井文夫, 北川竜三 ; 弾性分岐問題における分岐方向の予測について, 構造工学論文集, Vol. 39A, 323-332, 1993.
- [39] 藤井文夫, 岡沢重信 ; 構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的非線形解法, 日本機械学会論文集 (A編)「ハイパーフォーマンスコンピューティング」特集号, 62 巻 603 号, 48-55, 1996
- [40] Fujii, F., Ikeda, K. and Okazawa, S.; *Modified Stiffness Iteration to Compute the Multiple Bifurcation Point*, *IASS Int. Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures, Taipei*, 1997 (to be presented)

(1996年9月6日受付)