

剛性行列の固有値制御による弾塑性分岐点の精算法

AN EIGENVALUE-CONTROL TO TRACE THE EQUILIBRIUM PATH
TO COMPUTE AN ELASTOPLASTIC BIFURCATION POINT

岡澤重信 *, 藤井文夫 **, 宇佐美勉 ***

Shigenobu OKAZAWA, Fumio FUJII and Tsutomu USAMI

* 工修 日本学術振興会特別研究員 名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程
(〒464-01 名古屋市千種区不老町)

** Dr.-Ing. 岐阜大学助教授 工学部土木工学科 (〒501-11 岐阜市柳戸)

*** D.Sc. 工博 名古屋大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)

A new method to compute bifurcation points in elastoplastic large deformation finite element analysis is presented. The proposed idea is to stepwise control the critical eigenvalue of the tangent stiffness matrix to attain the elastoplastic bifurcation point. The procedure can well trace the equilibrium path up to the zero eigenvalue point, the elastoplastic bifurcation point. The stress integration in elastoplasticity is consistent. In numerical examples, elastoplastic truss structures are computed for demonstration.

Key Words : eigenvalue control, elastoplastic bifurcation, large deformation, finite element analysis

1. 序論

有限変位挙動を示す構造系のつり合い経路上に出現する座屈点は、分岐点と荷重極限点とに分類される。このうち荷重極限点については、特異点を直接的に扱わなくても主経路のみを追跡するだけで座屈解析が可能となる。それに対してつり合い経路が枝分かれする分岐点は数理的扱いがより困難とされているが、構造系の安全性評価を的確に行うためには、この解析困難な分岐不安定挙動の解明は不可欠となる。しかも現実の弾塑性挙動を解明するためには、幾何学的な非線形性のみならず、弾塑性材料モデルによる材料非線形性をも含めた計算が必要になる。

弾塑性材料の応力状態は一般に過去の履歴に依存するため、そのつり合い解は経路依存型となり、全ポテンシャルエネルギーを定義することはできない。そのために、分岐構造を解明するために確立された全ポテンシャルエネルギーの停留条件に起因する一般安定理論^{1),2)}は経路依存性のない弾性構造系に用いることはできても、弾塑性の場合には直接適用することは不可能である。このため、弾塑性分岐現象の数理的研究は遅れているのが現状である。

Hill³⁾により提案された増分解に対する唯一性の定理は、弾塑性分岐に関する研究の基盤を成すものであり、

この定理をベースにした弾塑性分岐の研究もある。例えば、後藤ら^{4),5)}はこのHillの定理を離散化形式に書き改め、有限要素法による弾塑性分岐解析を試みている。

実際の分岐解析において必要となるものの1つに、任意の構造系について分岐点の位置(座標)を精算するノウハウがある。ステップサイズを徐々に小さくしながら2分法などで分岐点を挟み込む bracketing の方法は、不自然に負荷・除荷を繰り返し経路依存性を乱すため有効でない⁶⁾。またこの経路依存性を保つために、分岐点直前のつり合い点における応力状態を更新せずに記憶しておいて、そこからステップサイズを試行錯誤的に調節して目標点に到達する bracketing を修正した手法(modified bracketing)も考えられるが、煩わしい手続きが必要な割には、十分な精度を得ることが困難であるため効果的ではない。また Wriggers ら^{7),8)}は反復計算により分岐点に直接的に収束させることのできる Extended System を提案しているが、これは本来は弾性構造系を対象とした理論であり、Extended System で必要とされる不釣り合い力の全体量の評価や、負荷・除荷の応力履歴を忠実に再現することが不可能であるため、弾塑性の場合には用いることができない。結局、弾塑性分岐点を精算する方法は現在までのところ存在しないのが実状である。

本研究では、藤井、内藤、岡澤^{9),10)}による弾性分岐点の

ピンポイント法の計算スキームを経路依存型の場合においても適用できるように改良し、それをもとにして弾塑性分岐点を直接的に精算できる方法を提案する。これは剛性行列の固有値を制御しながらつり合い経路を追跡する新たな方法である。固有値を段階的に規定し、規定された値の固有値を持つようなつり合い点を連続的に計算して最終的には固有値がゼロとなる分岐点に到達することができる。これは制御(規定)するパラメーターが固有値である点を除けば通常の弧長法と全く同様で、先に述べたピンポイント法と違って、一種のつり合い経路の追跡法であるから、これまでの応力経路の記憶を破壊することもない。また従来の弾性分岐点のピンポイント法がニュートン・ラフソン法の収束を保証する範囲内でしか機能しない局所的な精算法であるのに対して、本研究で提案する方法は大域的な収束性を有することがその最大の特徴である。固有値制御による弾塑性分岐点の精算方法の妥当性を弾塑性トラス系の例題計算を通して検証する。

2. 弾塑性分岐の発生条件

ここでは弾塑性分岐の発生条件について述べる。分岐挙動をより本質的に捉えるためには文献(2)で行われたような高次項を用いた議論が必要であるが、実務計算においては高次項の評価は困難であり、又不要^{11),12)}であるので、高次項を用いないより簡便な議論でとどめる。

2.1 安定性の判別

N 個の自由度 u 、荷重変数 p における構造系の、任意のつり合い状態から微小増分変位ベクトル du ($du \neq 0$)により系内部に蓄えられるひずみエネルギーである、図-1の斜線部によって示される面積 ΔS を、増分過程の間は構造系の剛性行列 K が一定であるとして、2次形式を用いて表現すると

$$\Delta S = \frac{1}{2} du^T K du \quad (1)$$

通常、弾塑性有限要素解析においては、塑性化した断面各点の、現実の負荷・除荷のパターンを反映した整合性のある剛性行列 K を生成する必要がある¹³⁾。分岐点付近にある現在のつり合い点の安定性を判別するにあたっては、現在のつり合い点から次のつり合い点に向いたときの負荷・除荷のパターンに基づいて評価された整合性のある剛性行列を用いるのではなく、ひとつ前のつり合い点から現在のつり合い点に至るまでの負荷・除荷のパターンをそのまま引き継ぐことにより安定性の議論を行う。このことは、塑性化した材料各点について、た

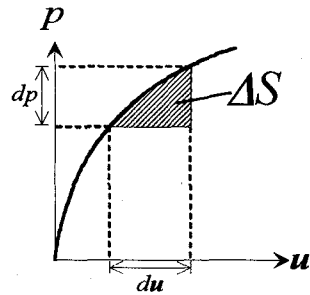


図-1 系内部に蓄えられるひずみエネルギー ΔS の定義

とえ塑性化した点が除荷される場合でも便宜上、負荷剛性を使えることを意味し、このような材料を Hill³⁾の線形比較体と呼ぶ。そして、このときすべての変位増分ベクトル du に対して、 ΔS の値が正となるようであれば、構造系はそのつり合い状態において安定である。ゆえに構造系が安定であるための十分条件は、すべての du に対して

$$du^T K du > 0 \quad (2)$$

となることである。逆にこの安定性の前提が最初に崩れるのは、内部エネルギーを放出するような変位増分ベクトル du がただ1つでも存在する場合であり、このとき構造系が不安定となる。ゆえに構造系が不安定であるための十分条件は

$$du^T K du < 0 \quad (3)$$

となる du がただ1つでも存在することである。

このような構造系が不安定となる du のモードを詳しく調べるために、いま N 自由度の構造系の K をその固有値 λ と固有ベクトル θ を用いて、スペクトル展開すると

$$K = \sum_{j=1}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \quad (4)$$

これは K が特異行列の場合でも成立する。また基底ベクトルとして固有ベクトル θ を用いて、 du を表現すると

$$du = \sum_{j=1}^N (\theta_j^T du) \theta_j \quad (5)$$

式(4)、(5)を式(3)の中の不等式に代入し、固有ベクトルの直交性を考慮すると、式(3)の不等式は

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j (\theta_j^T du)^2 < 0 \quad (6)$$

式(6)の左辺において $(\theta_j^T du)^2$ はゼロまたは正値をとる。したがって、不安定条件が成立するためには少なくとも1個は K に負の固有値が存在しなくてはならない。例えば $\lambda_m < 0$ のとき θ_m と同じ方向を向く変位増分 du に対し

て系は明らかに不安定となる。これとは逆に、安定であるためには $\mathbf{K}$ のすべての固有値が正值でなくてはならない。よって $\mathbf{K}$ の負の固有値の有無によって安定・不安定を判別でき、その限界点ではゼロ固有値が発生する。この限界点は座屈点と呼ばれ、分岐点と荷重極限点に分類される。

2.2 座屈点の分類

座屈点の分類を行うために、現在点において座標変換を行い、 $\mathbf{K}$ の対角化を試みる。いま座標変換前の変位増分ベクトルを $d\tilde{\mathbf{u}}$ 、荷重ベクトルを $\tilde{\mathbf{e}}$ として次式で与えられるような変換行列 $\mathbf{H}$ を導入する。

$$d\mathbf{u} = \mathbf{H}d\tilde{\mathbf{u}} \quad (7)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{e}} \quad (8)$$

$\mathbf{K}$ を対角化するためには、 $\mathbf{K}$ の正規化された N 個の固有ベクトルを用いてつぎのように $\mathbf{H}$ を設定する。

$$\mathbf{H} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_N] \quad (9)$$

荷重増分および荷重ベクトルをそれぞれ dp 、 $\mathbf{e}$ とした場合の線形化方程式

$$\mathbf{K}d\mathbf{u} = dp\mathbf{e} \quad (10)$$

に、式(7)と式(8)を代入すると、

$$\mathbf{KH}d\tilde{\mathbf{u}} = dp\mathbf{H}\tilde{\mathbf{e}} \quad (11)$$

式(11)の両辺の左側から、 $\mathbf{H}^T$ をかけて、固有値 λ を用いて表せば

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} d\tilde{\mathbf{u}} = dp\tilde{\mathbf{e}} \quad (12)$$

ここで、例えば座屈点において $\lambda_1=0$ の場合を考えれば、 $d\tilde{\mathbf{u}}$ と $\tilde{\mathbf{e}}$ の第1成分をそれぞれ $d\tilde{u}_1$ 、 $\tilde{e}_1$ とすると、式(12)の第1行目の方程式は

$$0 \times d\tilde{u}_1 = dp\tilde{e}_1 \quad (13)$$

となる。これが解 $d\tilde{u}_1$ を持つためには、右辺項 $dp\tilde{e}_1$ について

$$dp\tilde{e}_1 = 0 \quad (14)$$

が成立し、式(13)はつぎの形式をとらねばならない。

$$0 \times d\tilde{u}_1 = 0 \quad (15)$$

式(14)を固有ベクトル θ_1 と荷重ベクトル $\mathbf{e}$ を用いて表わすと

$$dp\theta_1^T \mathbf{e} = 0 \quad (16)$$

となる。このとき式(12)の解 $d\tilde{\mathbf{u}}$ は

$$d\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} c \\ dp \frac{\theta_1^T \mathbf{e}}{\lambda_1} \\ \vdots \\ dp \frac{\theta_N^T \mathbf{e}}{\lambda_N} \end{bmatrix} \quad (17)$$

となる。ただし

$$d\tilde{u}_1 = c \quad (18)$$

で c は式(15)における (0/0) による不定解である。

式(17)をさらに $d\mathbf{u}$ に変換すると

$$d\mathbf{u} = c\theta_1 + dpd\mathbf{u}_p \quad (19)$$

ただし、右辺の第1項、第2項はそれぞれ余解 ($c\theta_1$)、特解 ($dpd\mathbf{u}_p$) を表わし、

$$d\mathbf{u}_p = \sum_{j=2}^N \left(\frac{\theta_j^T \mathbf{e}}{\lambda_j} \right) \theta_j \quad (20)$$

また

$$\mathbf{K}\theta_1 = 0 \quad (21)$$

$$\mathbf{K}d\mathbf{u}_p = \mathbf{e} \quad (22)$$

である。すなわち $\mathbf{K}$ が (λ_1, θ_1) をクリティカルな固有ペアとして持つ特異行列のとき、式(16)が成立するならば、式(10)の一般解は式(19)のようになる。

つぎに式(16)の条件を考える。まず

$$\theta_1^T \mathbf{e} \neq 0 \quad \text{および} \quad dp = 0 \quad (23)$$

のとき、式(10)は同次連立方程式

$$\mathbf{K}d\mathbf{u} = 0 \quad (24)$$

に帰着され、自明解以外の解は明らかに

$$d\mathbf{u} = c\theta_1 \quad (25)$$

となる。これは式(19)で $dp=0$ としても求まる(特解の消滅)。式(24)が成り立つ座屈点でのつり合い経路の接線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{u} \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

となる。 c は不定であるがどのような c に対しても接線ベクトル $(d\mathbf{u}, dp)$ が同じ固有ベクトル θ_1 の方向を向くことになるので、経路の伸びる方向の唯一性(枝分かれなし)を保証し、しかも荷重変数 p の折り返し点 ($dp=0$) である。すなわち、このような座屈点は荷重極限点である。つぎに

$$\theta_1^T \mathbf{e} = 0 \quad \text{および} \quad dp \neq 0 \quad (27)$$

の場合を考える。式(27)のため、式(22)の特解 $d\mathbf{u}_p$ は存在し、式(19)の一般解 $d\mathbf{u}$ は多価性を有して、主経路の

解 du_I 以外にも、別の解 du_{II} が存在する。ただし

$$du_I = c_I \theta_1 + dp du_p \quad (28)$$

$$du_{II} = c_{II} \theta_1 + dp du_p \quad (29)$$

これは、つり合い経路が主経路 (du_I, dp) とは異なる別の方向 (du_{II}, dp) にもつり合い解が存在する可能性を示すもので、このような座屈点は分岐点となる。つまり分岐の発生条件は、先述の主経路の安定性の判別に用いた剛性行列 K の固有値のうち少なくとも1つがゼロとなり、しかもクリティカルな固有ベクトルと荷重ベクトルが直交する場合であることが分かる。ただし、式(10)の剛性行列 K は必ずしも分岐方向について評価されたものではないので、式(29)は分岐方向を与えるものではない。

3. 固有値制御法による経路追跡

弾塑性構造系のつり合い経路の追跡には、予測子ステップと修正子ステップとを1サイクルとした弧長法が通常用いられる。この弧長法では制御するパラメータの違いにより、荷重制御法、変位制御法、弧長制御法、それにある種の仕事量を制御する方法などこれまで数多く提案されている^{14), 15), 16), 17), 18)} が、これらの方法では分岐点に収束するように解を制御することは不可能である。そこで本研究では、制御するパラメータとして剛性行列 K の固有値に着目する。分岐点においてゼロとなる固有値を制御しながらつり合い経路を追跡すれば、目標点である分岐点に安定に到達させることができる。

3.1 予測子

予測子はつり合い経路の追跡の際に、解を前に押し進める推進力となる。いま任意のつり合い点を現在点 s とし、その現在点における固有値の値を λ_s 、つぎの目標点 g での固有値の値を λ_g とすると(図-2)、予測子 (du, dp) の $(N+1)$ 個の未知量を求めるために解くべき方程式は、つぎの $(N+1)$ 本である。

$$K du - dp e = 0 \quad (30)$$

$$d\lambda = \lambda_g - \lambda_s \quad (d\lambda < 0) \quad (31)$$

実際の予測子の計算ではまず単位荷重増分 $dp = +1.0$ に対して、つぎの方程式を解き

$$K du_g = e \quad (32)$$

任意の dp に対して

$$du = dp du_g \quad (33)$$

とする。ここで du_g による固有値の変動量 $d\lambda_g$ は、1次のオーダーでつぎのように予測できる¹⁹⁾。

$$d\lambda_g = \theta_g^T \Delta K \theta_g \quad (34)$$

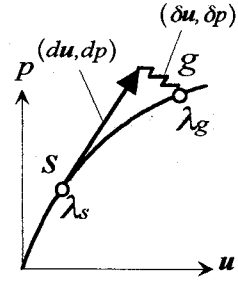


図-2 出発点とつぎの目標点での固有値の値

ここで θ_g は制御する固有値に対応する現在点 s での固有ベクトルである。また ΔK は du_g による K の変動量で、インターバル μ を用いて差分近似により

$$\Delta K = \frac{1}{\mu} \{ K(u_s + \mu du_g) - K(u_s) \} \quad (35)$$

と評価できる。ここで u_s は現在点 s での変位ベクトル(全変位)である。荷重増分 dp に対する固有値の変動量 $d\lambda$ は

$$d\lambda = dp d\lambda_g \quad (36)$$

式(36)を式(31)に代入して dp について整理すると

$$dp = + \frac{\lambda_g - \lambda_s}{d\lambda_g} \quad (37)$$

ゆえに予測子 (du, dp) は式(37)、(33)よりつぎのように与えられる。

$$\begin{cases} dp = + \frac{\lambda_g - \lambda_s}{d\lambda_g} \\ du = dp du_g \end{cases} \quad (38)$$

式(38)による予測子の先端の点は、つり合い点でないことはもちろんであり、しかも

$$\lambda \neq \lambda_g \quad (39)$$

である。これは幾何学的非線形性、材料非線形性を扱っているにもかかわらず、式(35)の差分近似と式(34)の固有値の感度公式とが線形近似に基づいていることに加えて、 λ が従属変数であるためである。このため式(31)で規定するステップサイズを大きくとりすぎると線形近似の範囲を逸脱し、予測された固有値は λ_g と著しく違ったものとなる恐れがある。これを避けるためにも式(31)のステップサイズは極力小さくとる必要がある。すなわち、この固有値制御法では一気に分岐点を目指すのではなく、分岐点までの道のりをいくつかの区間に分割して注意深く徐々に分岐点へ近づいていく。

3.2 修正子

予測子ベクトルの先端点はつり合い経路から逸脱し、

しかも $\lambda \neq \lambda_g$ である。この非つり合い点を、 $\lambda = \lambda_g$ であるつり合い点 g に引き戻すために、修正子 $(\delta u, \delta p)$ による反復計算を行う(図-2)。

以後、式の展開のためにつぎのような記号を導入する。

$$\Delta u = du + \sum \delta u \quad (40)$$

$$\Delta p = dp + \sum \delta p \quad (41)$$

ここで Σ は、複数回の修正子による総和量を意味する。ゆえに式(40)、(41)の $(\Delta u, \Delta p)$ はつり合い点 s からの変化量を示す。

修正子 $(\delta u, \delta p)$ の $(N+1)$ 個の未知量を求めるために解くべき方程式は、つぎの $(N+1)$ 本である。

$$K\delta u - \delta p e = -E^* \quad (42)$$

$$\delta \lambda = \lambda_g - \lambda \quad (43)$$

ここで式(43)の λ は各反復点における固有値である。また式(42)の E^* については出発点 s から測ったつぎのような残差ベクトルを用いた²⁰⁾。

$$E^* = K\Delta u - \Delta p e \quad (44)$$

つぎの2つの方程式

$$K\delta u_e = e \quad (45)$$

$$K\delta u_E = -E^* \quad (46)$$

についてそれぞれ解いて、任意の δp に対して

$$\delta u = \delta u_E + \delta p \delta u_e \quad (47)$$

δu に対する固有値の変動量 $\delta \lambda$ は

$$\delta \lambda = \delta \lambda_E + \delta p \delta \lambda_e \quad (48)$$

$(\delta \lambda_E, \delta \lambda_e)$ は $(\delta u_E, \delta u_e)$ に対する固有値の変動量で、式(34)と同様に

$$\delta \lambda_E = \theta^T \Delta K_E \theta \quad (49)$$

$$\delta \lambda_e = \theta^T \Delta K_e \theta \quad (50)$$

と予測できる。ここで θ は反復点での固有ベクトルであり、レイリー商反復法で容易に求まる。 $(\delta u_E, \delta u_e)$ による K の変動量 $(\Delta K_E, \Delta K_e)$ は差分近似で式(35)と同様に

$$\Delta K_E = \frac{1}{\mu} \{ K(u + \mu \delta u_E) - K(u) \} \quad (51)$$

$$\Delta K_e = \frac{1}{\mu} \{ K(u + \mu \delta u_e) - K(u) \} \quad (52)$$

なお、式(51)、(52)の u については、形式上それぞれの反復点におけるものであるが、応力積分を正しく行うために、実際の計算においては次節にある式(59)のように評価する。

式(48)を式(43)に代入して δp について整理すると

$$\delta p = + \frac{\lambda_g - \lambda - \delta \lambda_E}{\delta \lambda_e} \quad (53)$$

ゆえに修正子 $(\delta u, \delta p)$ は式(53)、(47)よりつぎのように与えられる。

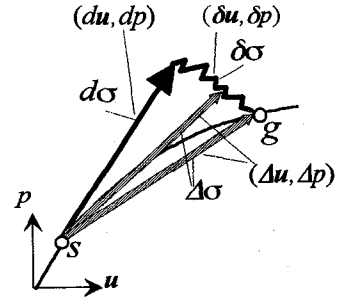


図-3 応力積分法

$$\begin{cases} \delta p = + \frac{\lambda_g - \lambda - \delta \lambda_E}{\delta \lambda_e} \\ \delta u = \delta u_E + \delta p \delta u_e \end{cases} \quad (54)$$

収束判定については、つぎの2つの条件をともに満足した際に収束したと判断する。

$$|E^*| \leq \text{tolerance1}, \quad |\lambda_g - \lambda| \leq \text{tolerance2} \quad (55)$$

ここで tolerance1 , tolerance2 はそれぞれの残差の許容値である。

3.3 応力積分法

上記の1回の予測子ステップと複数回の修正子ステップを1サイクルする過程の中では、応力積分に最も注意を要する。弾塑性構造系においては剛性行列 K が応力にも依存するため、応力積分の影響が K の固有値に敏感に現れる。そのため応力積分を正しく行う必要がある²¹⁾。

いま出発点 s 、目標点 g における応力状態をそれぞれ σ_s , σ_g とすると、応力積分法には2つの方法が考えられる(図-3)。ひとつは予測子 (du, dp) による応力増分を $d\sigma$ 、修正子 $(\delta u, \delta p)$ によるそれを $\delta\sigma$ とした場合、目標点までの応力 σ_g に至るまでに

$$\sigma_g = \sigma_s + d\sigma + \sum \delta\sigma \quad (56)$$

とする方法である。そしてもうひとつは式(40)、(41)で定義した $(\Delta u, \Delta p)$ から計算される応力増分 $\Delta\sigma$ を用いる方法である。 $\Delta\sigma$ は反復計算の間に刻々と変化し、反復中の応力 σ は

$$\sigma = \sigma_s + \Delta\sigma \quad (57)$$

と評価される。式(57)のような応力積分を行えば、反復点が目標点に到達した時にそこでの応力 σ_g は

$$\sigma_g = \sigma_s + \Delta\sigma \quad (58)$$

となる。

式(56)の方法ではすべての反復点を結ぶ経路に渡って応力積分を行っている。そのため明らかに積分経路が実際よりも長く蛇行しており、正しい応力積分となつて

はいない²¹⁾。それに対して、式(58)ではそれぞれの収束
つり合い点を線分で結ぶ経路に沿って応力積分を行っ
ている。隣接するつり合い点間を線分で近似することの
誤差は、ステップサイズを十分小さくすることで解消で
きる。本研究では式(58)による応力積分²¹⁾を用いること
にする。

また弾塑性構造系においては K が応力経路と応力状
態に依存するため、式(35)、(51)、(52)の差分近似による
 K の変化量を求める際は、式(57)の応力積分法を用いな
ければならない。まず式(35)においては μdu_e を Δu とし
て用いればよい。任意の反復点における式(51)、(52)の
評価については、式(40)で表される出発点 s から現在の
反復点までの変位の総和量を Δu_i とすると、式(51)は

$$\Delta K_E = \frac{1}{\mu} \{ K(u_s + \Delta u_i + \mu \delta u_E) - K(u_s + \Delta u_i) \} \quad (59)$$

と表される。式(52)についても同様である。これが弾塑
性問題における正しい応力積分法による剛性行列の変
動量 ΔK の差分近似である。

3.4 負荷・除荷の試行修正における留意点

提案する固有値制御法においても、通常の弾塑性問題
と同様に、塑性化した断面各点について整合性のある負
荷・除荷のパターンの試行修正による決定¹³⁾が必要とな
る。試行修正によって、当初仮定した負荷・除荷のパタ
ーンに変化が見られる場合には、出発点 s (図-2)での固
有値 λ_e も当然影響を受けることになる。その結果、たと
え式(31)の固有値増分 $d\lambda$ を規定しても、当初の目標値
とは異なる固有値を有するつり合い点に収束する可能
性がある。そこでこの対策として実際の計算では、当初
仮定した負荷・除荷のパターンと規定した固有値増分 $d\lambda$
で決まる λ_g を一度設定したら、その後はこの λ_g を固定
する。そうすることによってたとえ負荷・除荷のパター
ンに変化が見られても、目標値 λ_g を有するつり合い点に
到達できる。

4. 例題計算

剛性行列の固有値制御による弾塑性分岐点の精算法
を弾塑性トラス系に適用し、その妥当性を検討する。同
時に弾塑性分岐現象特有の挙動についても簡単に考察
する。増分形式の立体トラス要素の定式化については他
の文献^{22), 23), 24), 25)}に譲るとするが、トラス要素内では
応力状態とひずみ状態が一定であるので、構成則として
材料剛性(応力-ひずみ曲線の勾配)の変化が不連続なも
のをを用いると、剛性行列の固有値の変化が滑らかでなく
なり(固有値の顕著な不連続性)、本研究の方法では不都

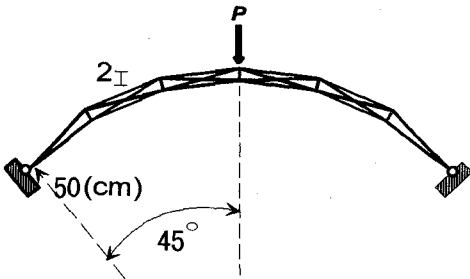


図-4 2D トラスアーチ

表-1 分岐点の精算状況

	$P(N)$	$Disp.(cm)$	λ
START	+10652.600	+0.16938205	+31.324878
$\Delta\lambda=-10.000000$			
<1,2>	+10663.932	+0.16993434	+21.324883
$\Delta\lambda=-10.000000$			
<2,2>	+10676.679	+0.17067817	+11.324885
$\Delta\lambda=-10.000000$			
<3,2>	+10691.877	+0.17137488	+1.3248908
$\Delta\lambda=-1.3248908$			
<4,1>	+10693.812	+0.17150330	+1.0E-5

合が生じる。そこで弾性域から塑性域への移行が滑らか
となるように Richard-Abbott²⁶⁾による構成則(付録1)を
適用した。なおすべての例題について、構造系の材料パ
ラメーターを、弾性係数 $E=20580000(N/cm^2)$ 、断面積
 $A=1.0(cm^2)$ 、降伏応力 $\sigma_Y=23520(N/cm^2)$ 、見かけ上のひず
み硬化率 $E_p=E/100$ と設定した。

4.1 2D トラスアーチ

最初は図-4に示す2D トラスアーチである。まず第2
著者(藤井)ら^{27), 28)}によってすでに提案されている汎用
的な軌道追跡法でつり合い経路を追跡する。そして目標
点でクリティカルとなるような固有値がある程度小さ
くなった時点で、本研究で提案する固有値制御法に切り
替えた。よって通常の軌道追跡法の最中には固有値のモ
ニターが必要となる。剛性行列のすべての固有値を逐次
求めるのは実用的でなく、工学的には数組の固有ベアが
必要とされる場合がほとんどであるので、固有値のモニ
ターにはレイリー商反復法を用いた。経路依存性を乱さ
ないためにはつり合い経路の後戻り(不自然な除荷)を
避けなくてはならない。そのためには注目する固有値が
負になる前に(分岐点を通過する前に)固有値制御法に
切り替える。表-1がその計算結果である。ここで1列目
の表示< i , j >は、予測子のステップ番号 i, 必要とし
た修正子の反復回数 j を示す。ここでは制御パラメータ
すなわち固有値の増分を -10.0 として次の収束点での
固有値を設定し、それに対応するつり合い点を逐次計算
する。そして最後の4ステップ目における残差固有値の

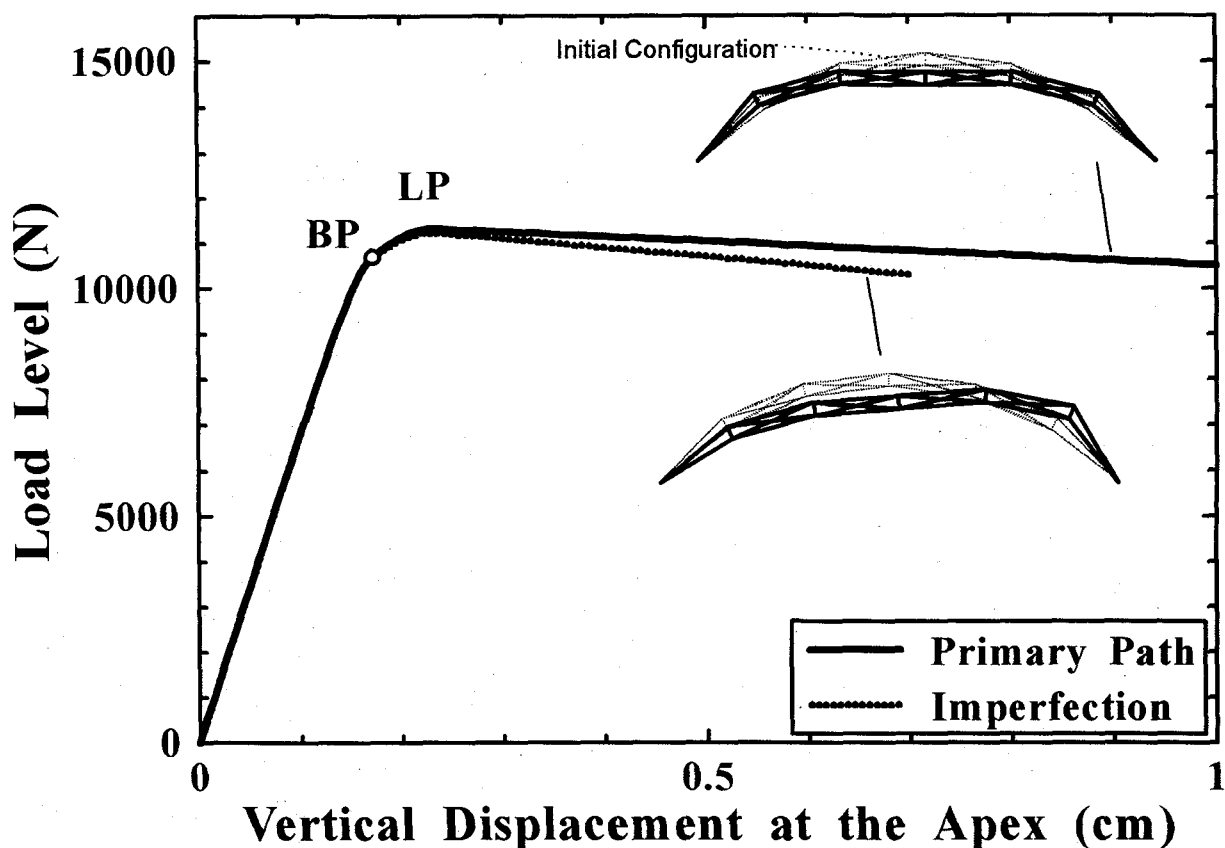


図-5 2D トラスアーチのつり合い経路と変形状態

大きさを制御パラメータ量として設定し、最終的に 10^{-5} のオーダーの誤差で分岐点に到達させることに成功した。なお剛性行列の固有値をこのぐらいのオーダーに落とすと、剛性行列は擬特異状態となり、この種の剛性方程式を健全に解くことが困難となる。又、固有値制御法に切り替えることにより、固有値解析で必要とされる計算時間の増加が見込まれるが、レイリー商反復法を用いることにより計算全体としては実用の範囲内に収めることができる。また分岐点の精算と同時に、計算された分岐点の位置を検証するために、正規化したクリティカルな固有ベクトルを $1/1000$ 倍にスケールダウンしたベクトルを幾何学的形状の初期不整ベクトルとして採用し、そのつり合い経路を追跡することによって近似的な分岐経路を得た。図-5に、主経路と、○印の精算した分岐点(BP)、そして初期不整による近似的な分岐経路を変形図と合わせて示す。変形図については変形の度合いがよく分かるように実際の変形を3倍に拡大してある。この図-5から弾塑性分岐特有の挙動が考察できる。まず分岐経路(ここでは初期不整導入による近似分岐経路)が分岐後、荷重が少し上昇した後に減少している。これは分岐後にすでに降伏しているいくつかの要素が除荷す

ることにより除荷剛性(弾性剛性への復帰)となり、その結果、構造系全体としての剛性が上がるために引き起こされるものであり⁵⁾、弾性の対称不安定分岐には見られない挙動である。又それに伴って分岐点から伸びる Half Branch(片側経路)が互いに滑らかに接続されていないことは容易に想像がつく。さらに、弾塑性トラス構造系においては塑性化が始まると急激に不安定化が進行し、結果的に分岐点と荷重極限点(LP)が極めて密接に接近することになる。この2つの特異点が接近した区間に、さらに他にもいくつもの分岐点が出現する可能性があるような構造系においては、些細な初期不整の違いにより、複雑な後座屈挙動を示す可能性があることを暗示している。この例をつぎに示す。

4.2 3D ドーム

図-6の構造系は半谷²⁹⁾により考案されたもので、それ以後計算例題として頻繁に引用されている。本研究でもこの構造系を弾塑性部材の仮定を導入して計算を試みた。この構造系においては荷重極限点(LP)までに3つの分岐点が存在する。最初の分岐点(BP1)は分岐点においてゼロ固有値が1個となる単純分岐であるので、最初

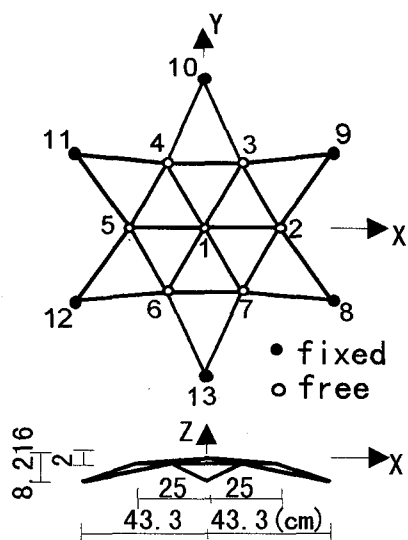


図-6 3D ドーム

Node		1	2	3	4	5	6	7
Load Vector	X	0	0	0	0	0	0	0
	Y	0	0	0	0	0	0	0
	Z	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2

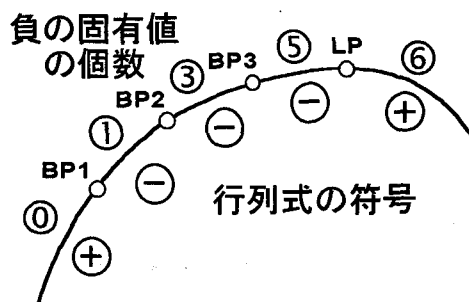


図-7 剛性行列の負の固有値の個数の変化(上側)と行列式の符号の変化(下側)の関係

表-2 分岐点(BP1)の精算状況

	P (N)	$Disp.$ (cm)	λ
START	+3101.6952	+0.088144251	+55.664767
$\Delta\lambda = -10.000000$			
<1,2>	+3102.5760	+0.088366899	+45.664763
$\Delta\lambda = -10.000000$			
<2,2>	+3103.4395	+0.088592400	+35.664753
$\Delta\lambda = -10.000000$			
<3,2>	+3104.2858	+0.088820901	+25.664756
$\Delta\lambda = -10.000000$			
<4,2>	+3105.1151	+0.089052561	+15.664749
$\Delta\lambda = -10.000000$			
<5,2>	+3105.9273	+0.089287549	+5.6647533
$\Delta\lambda = -5.6647533$			
<6,1>	+3106.3832	+0.089422111	+2.0E-6

の2D トラスアーチの場合と同様に、固有値制御法で何ら問題なく精算できた(表-2 及び図-8 の○印)。他の2つの分岐点(BP2,BP3)はゼロ固有値とともに2個の多重分岐点であるため、その精算方法については別の論文^{30),31)}に譲るが、負の固有値の個数の変化によりその存在を確認できた(図-7)。分岐点の通過を確認するために広く用いられている剛性行列の行列式の符号の変化をモニターする方法ではBP1 からLP までその符号に変化が生じないため、分岐点を完全に見落とす危険性がある(図-7)。同じ形状の弾性構造系についても3つの分岐点と荷重極限点の位置関係³²⁾を確認できたが、それと比較しても、弾塑性においては荷重極限点LP と最初の分岐点BP1 が急接近しているため、その危険性はさらに大きい。このように分岐点の通過を確認するためには剛性行列の行列式の符号よりも、負の固有値の個数の変化をモニターの方が分岐点の検出もれが起らない。このことはすでに1980年代初頭から計算安定理論において常用されている²¹⁾。

さらにそれぞれの正規化したクリティカルな固有ベクトルを1/1000倍したものを初期不整として採用し近似的な分岐経路を追跡した(図-8)。なおBP2,BP3については多重分岐のためクリティカルな固有ベクトルが2本で分岐経路はその線形結合方向に複数本存在する³²⁾

が、それらすべてを求めることは本研究の趣旨ではないので、代表例として2つのクリティカルな固有ベクトルうちの1つのみを採用して、複数のうちの1本のみ近似的な分岐経路を得た。変形図については変形を3倍に拡大してある。ここでは3つの分岐点と荷重極限点が密接になり、初期不整に敏感な後座屈挙動を示すことが分かる。さらに重要な点は、つり合い経路の原点における剛性行列の最小固有値に対応する固有モードが、最初の座屈点(BP1)での座屈モードとは一致しない点であり、原点において最小であった固有値は荷重極限点LPにおいて初めてクリティカルとなる。この構造系は弾性的の場合においても同じような状況となる³²⁾が、幾何学的非線形性に材料非線形性も加わった場合、塑性化が進行するに連れて固有値の大きさの順序が急激に入れ替わるため、安定問題の計算においては細心の注意を要する。後座屈挙動を解析する際には単純に初期不整を有する不完全系を扱うだけでは不十分であり、分岐現象を本質的に捉えるためには完全系を扱う必要がある。そのためには今後、単純/多重弾塑性分岐経路への実用的な経路切り換え法の開発が急務の課題である。

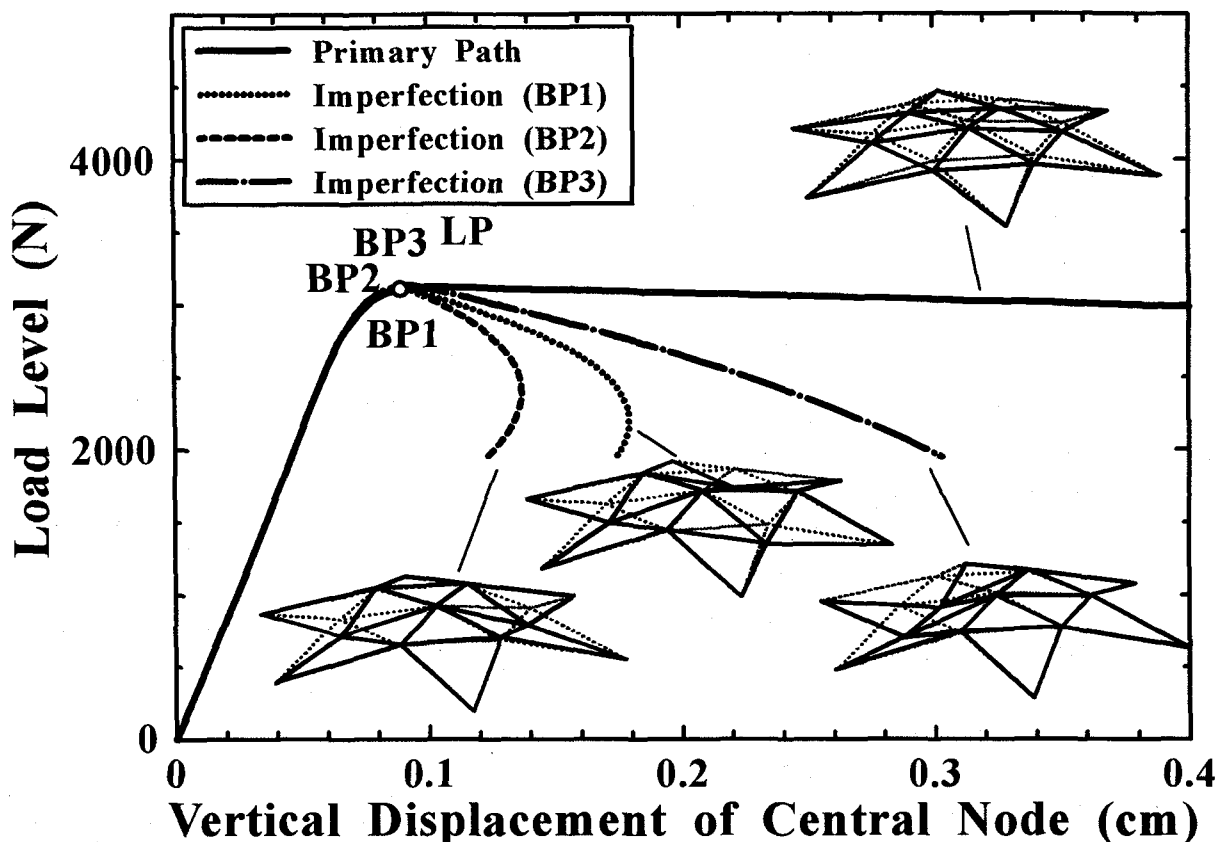


図-8 3D ドームのつり合い経路と変形状態

5. 結論

弾塑性分岐点の位置を可能な限り精確に求める軌道追跡法(大域的非線形解法)を提案した. この方法は剛性行列のクリティカルな固有値を制御パラメータとして選択し, それがゼロとなるように徐々に制御して目標点に到達でき, なおかつ弾塑性問題に特有な経路依存性を乱さない軌道追跡法である. そして提案した手法の正当性を弾塑性トラス系を用いて確認した. さらに弾塑性分岐挙動の特色についていくつかの考察を行い, 弾性分岐に比べてその不安定挙動ははるかに複雑なものになることを示した.

今後の課題としては, 実用的でかつ経路依存性を乱さない分岐経路への切り換え法や, 例題の中でも遭遇した弾塑性多重分岐点を処理できる数理論^{30), 31)}の構築が挙げられるが, これらについても合理的な方法をすでに開発して簡単な例題への適用に成功しており, 機会があれば別途発表したいと考えている.

付録.1 本研究で用いた構成則

本研究では, 弾性域から塑性域への移行が滑らかになるように Richard-Abbott²⁶⁾による構成則(図-A.1)を用い

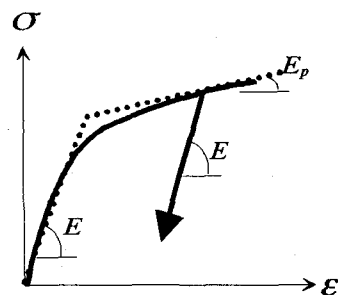


図-A.1 Richard-Abbott による構成則

た. その応力 σ とひずみ ε の関係は

$$\sigma = \frac{(E - E_p)\varepsilon}{\left(1 + \left|\frac{(E - E_p)\varepsilon}{\sigma_Y}\right|^n\right)^{\frac{1}{n}}} + E_p\varepsilon \quad (\text{A. 1})$$

ここで E は弾性係数で E_p は見かけ上のひずみ硬化率, σ_Y は降伏応力である. n は滑らかさの度合いを表すパラメーターで小さければ滑らかさが増し, 大きくなるほど Bi-linear に近づくもので本研究では $n=10$ とした. そして任意の点での材料剛性 E_t は

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E - E_p}{\left(1 + \left|\frac{(E - E_p)\varepsilon}{\sigma_Y}\right|^n\right)^{\frac{n+1}{n}}} + E_p \quad (\text{A. 2})$$

で評価できる²⁶⁾。なお除荷剛性については E を用いた。この構成則は単調荷重状態における応力・ひずみ関係を曲線で近似するもの(図-A. 1)であり、いわば最初から塑性変形が始まっているかのような挙動を示す。よって繰り返し荷重下においての応力・ひずみ関係を表現するのは不可能である。本研究での単調荷重が作用する構造系においては、荷重極限点以前においてもいくつかの部材が除荷となるが、それらの部材が再度ひずみ硬化を起こす領域には到達せず、弾塑性分岐点を精算するにはこの構成則で全く問題はない。また初期不整導入による近似分岐経路や、荷重極限点以後の後座屈挙動においても、いずれも再度ひずみ硬化を起こさないような初期後座屈領域のみを対象としているため、不都合は生じない。

謝辞：本研究を進行するにあたっては、慶応義塾大学理工学部の野口裕久助教授より、弾塑性有限要素法のさまざまな数理論について親切で有益な助言をいただきました。ここに感謝の意を表します。また本研究は第1著者(岡澤重信)の文部省科学研究費補助金(特別研究員奨励費)の一部を用いて行った。

参考文献

- 1) Koiter, W.T. : *On the Stability of Elastic Equilibrium Thesis*, Polytechnic Institute, Delft H.T., Paris, Amsterdam, 1945.
- 2) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. : *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, London, 1973.
- 3) Hill, R. : A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.6, pp.236-249, 1958.
- 4) Goto, Y. and Suzuki, S. : Analysis of Critical Behavior of Semi-rigid Frames with or without Load History in Connections, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.27, pp.467-483, 1991.
- 5) 後藤芳顕, 大鹿克敏, 川西直樹, 小畑誠 : 多自由度離散系の弾塑性分岐挙動の解析法とトラス構造物への適用, 土木学会論文集, No. 446, pp. 117-126, 1992.
- 6) Shi, J. : Computing Critical Points and Secondary paths in Nonlinear Structural Stability Analysis by the Finite Element Method, *Computers & Structures*, Vol.58, pp.203-220, 1996.
- 7) Wriggers, P., Wagner, W. and Miehe, C. : A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.70, pp.329-347, 1988.
- 8) Wriggers, P. and Simo, J.C. : General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.30, pp.155-176, 1990.
- 9) 藤井文夫, 内藤幹夫 : 特異つり合い点をピンポイントするための局所的大域的非線形解法, 構造工学論文集, Vol. 41A, pp. 455-464, 1995.
- 10) 藤井文夫, 岡澤重信 : 構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的非線形解法, 日本機械学会論文集 (A編)「ハイパフォーマンスコンピューティング」特

- 集号, 62 巻 603 号, pp.48-55, 1996.
- 11) Fujii, F. and Okazawa, S. : Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1997. (to appear)
- 12) 岡澤重信, 藤井文夫, 宇佐美勉 : 幾何学的非線形構造系の数値分岐解析法, 土木学会論文集, 1997. (掲載予定)
- 13) 堀 昭夫, 笹川 明 : 試行的な剛性選択法を用いた 1 次元有限要素法による立体骨組の複合非線形解析法, 日本建築学会構造系論文集, 第 490 号, pp. 139-147, 1996.
- 14) Wempner, G.A. : Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solid, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.7, pp.1581-1599, 1971.
- 15) Riks, E. : The Application of Newton's Method to the Problems of Elastic Stability, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.39, pp.1060-1066, 1972.
- 16) Ramm, E. : Strategies for Tracing the Non-linear Response near the Limit Points, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, edited by Wunderlich, W. et al. Springer-Verlag, Berlin, pp.63-89, 1981.
- 17) Chan, S.L. : Geometric and Material Nonlinear Analysis of Beam-Column and Frames using the Minimum Residual Displacement Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.26, pp.2657-2669, 1988.
- 18) Crisfield, M.A. and Shi, J. : A Review of Solution Procedures and Path-following Techniques in Related to the Non-linear Finite Element Analysis of Structures, *Nonlinear Computational Mechanics : State of the art*, edited by Wriggers, P. and Wagner, W., Springer-Verlag, Berlin, pp.47-68, 1992.
- 19) シャトラン, F. : 行列の固有値 (伊理正夫・伊理由美訳), Springer-Verlag, 1993.
- 20) 藤井文夫 : 非線形増分方程式の解法のための篠原法について, 構造工学論文集, Vol. 35A, pp. 195-202, 1989.
- 21) 久田俊明, 野口裕久 : 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- 22) Yang, Y.B. and Kuo, S.R. : *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*, Prentice Hall, 1994.
- 23) 吉田 裕 : 有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題, 土木学会論文集, No. 374, pp. 25-37, 1986.
- 24) McGUIRE, W. and Gallagher, R. H. : *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, 1979.
- 25) Meek, J.L. : *Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1971.
- 26) Richard, R.M. and Abbott, B.J. : Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.101, pp.511-515, 1975.
- 27) Fujii, F. : Scheme for Elasticas with Snap-through and Looping, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.115, pp.2166-2181, 1989.
- 28) Fujii, F., Perez, B.C. and Choong, K.K. : Selection of the Control Parameter in Displacement Incrementation, *Computers & Structures*, Vol.42, pp.167-174, 1992.
- 29) Hangai, Y. and Kawamata, S. : Nonlinear Analysis of Space Frames and Snap-Through Buckling of Reticulated Shell Structures, *Proc. IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames*, Tokyo and Kyoto, pp.803-816, 1971.
- 30) 藤井文夫, 岡澤重信 : 剛性行列の固有ベアの数値と特異剛性行列を係数行列に持つ連立方程式の解法, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997. (掲載予定)
- 31) 藤井文夫, 池田清宏, 岡澤重信 : 剛性行列のブロック対角化原理を用いた対称性起因する多重分岐点の反復精算法, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997. (掲載予定)
- 32) Fujii, F. and Choong, K.K. : Branch Switching in Bifurcation of Structures, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.118, pp.1578-1596, 1992.
- 33) Okazawa, S., Fujii, F. and Usami, T. : Eigenvalue-Controlled Path-Tracing to Compute an Elastoplastic Bifurcation Point, *International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*, Taiwan, 1997. (to be presented)

(1996 年 9 月 6 日受付)