

剛性行列の固有ペアの数理と 特異剛性行列を係数行列に持つ連立方程式の解法

EIGENPAIRS OF THE STIFFNESS MATRIX AND SOLUTION METHOD OF THE SINGULAR STIFFNESS EQUATIONS

藤井文夫¹⁾, 岡澤重信²⁾
Fumio Fujii¹⁾ and Shigenobu Okazawa²⁾

1) Dr.-Ing. 岐阜大学工学部 (〒501-11 岐阜市柳戸, fax 058-293-2404)

2) 工修 日本学術振興会特別研究員 名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程
(〒464-01 名古屋市千種区不老町 fax 052-761-3834)

The mathematical properties of the eigenpairs of the stiffness matrix are first reviewed briefly and applied to the stabilization of the singular stiffness matrix. The homogeneous and particular solutions, which are necessary to produce the general solution of the singular stiffness equations, may be computed practically from the stabilized stiffness equations. The solution method of the singular stiffness equations are applied to the eigenvector sensitivity analysis in a simplified iterative computation of stability points, slider mechanism motion analysis and hill-top branching problems of structures.

Key Words: Eigenvalue and Eigenvector, Sensitivity, Slider Mechanism Motion, Contact Problem, Stabilization of the Singular Stiffness Matrix, Bifurcation

1. はじめに

構造系の有限変位理論, 座屈安定解析, それに感度解析において, 剛性行列の固有ペア (固有値と固有ベクトル) が非線形応答の解析や特異点の精算, それに形状の最適化等に活用されるようになってきた[13, 14, 18, 20]. 固有ペアの数理を考える理由のひとつは, 現象を固有ベクトル空間で観察することにより, 現象に対する見通しを立て易くするためである. 剛性行列の対角化によって, 安定性に関する情報を抽出でき, また剛性行列に射影行列を付加して固有値を作為的に制御することもできる. しかしながら通常の線形代数における固有値問題に関する記述は, 極めて基礎的な事項に留まっており, 工学において実用的に使うには程遠い内容となっている.

本論文では力学的応用を念頭に入れ, まず正則および特異剛性行列の固有ペアのもつ数理的特質を, 新しい見識を交えて考察する. つぎに剛性方程式の解法との関連から, 特異剛性行列を係数行列にもつ連立方程式 (以下, 「特異剛性方程式」と略称) の一般解の構成方法と評価方法を提示する. 特異剛性方程式の解法は画一的に不可能であると考えられるよりも, むしろどのような状況なら解

が存在するかを考えることの方が重要であり新しい発見につながる姿勢であり, この議論は膜構造・適応構造・展開構造など新しい構造形態の解析に不可欠となる. 応用例として, 従来の特異点の反復計算法に代わり, 計算負荷を軽減した簡易反復法を考案する. また機構運動の接触問題を, 固有ベクトルを用いて解析できることも示す. そして頂上分岐方向について新たに理論的考察を加える. これらの応用例はすべて, 特異剛性方程式の解法がポイントとなり, 一般解を構成する余解と特解の評価問題に帰着される.

2. 剛性行列の標準固有値問題

N次元の対称剛性行列 K の標準固有値問題

$$K\theta_j = \lambda_j \theta_j \quad (2.1)$$

の実数固有値 λ_j , それに

$$|\theta_j| = 1 \quad (2.2)$$

と正規化された固有ベクトル θ_j ($j=1, \dots, N$) を考える. 固有値の並べ方 (j の番号付け) については, 符号も考慮して値の大きい順に並べ, 入軸の左側 (負側) から

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N \quad (2.3)$$

であるとしておく。当面は固有値はすべて正であるとし、最小固有値と最大固有値をそれぞれ、 λ_1 および λ_N とする。その後いくつかの固有値が負となり、特異剛性行列に関する議論の中では絶対値最小の固有値とその固有ベクトルを (λ_s, θ_s) とする。

3. 近似固有ベクトルと残差ベクトルの直交性

式 (2.1) の固有値問題を解いて得られた近似固有ベクトルを $(\bar{\lambda}, \bar{\theta})$ とする。ただし $\bar{\theta}$ については

$$|\bar{\theta}| = 1 \quad (3.1)$$

と正規化しておき、 $\bar{\lambda}$ はレイリー商で

$$\bar{\lambda} = \bar{\theta}^T K \bar{\theta} \quad (3.2)$$

と求めておく。近似の度合を、残差ベクトル r

$$r = K\bar{\theta} - \bar{\lambda}\bar{\theta} \quad (3.3)$$

で測り、この r を用いて K をつぎのように修正する。

$$\bar{K} = K - r\bar{\theta}^T \quad (3.4)$$

このとき $\bar{K}$ は一般に非対称となるが、

$$\bar{K}\bar{\theta} = \bar{\lambda}\bar{\theta} \quad (3.5)$$

が成立する。すなわち K の近似固有ベクトル $(\bar{\lambda}, \bar{\theta})$ は、 $\bar{K}$ の厳格な固有ベクトルになっている。しかも、

$$\bar{\theta}^T r = 0 \quad (3.6)$$

が成立し、近似固有ベクトル $\bar{\theta}$ は残差ベクトル r に直交する。片山らはこの特質を使って標準固有値問題の解法のための部分空間法[3]を提案している。

4. 剛性行列のスペクトル展開

K のスペクトル分解は

$$K = \sum_{j=1}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \quad (4.1)$$

で、 K が正則行列である場合には、

$$K^{-1} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \theta_j \theta_j^T \quad (4.2)$$

となる。式 (4.1) と 式 (4.2) において、 $\theta_j \theta_j^T$ は射影

行列である。剛性行列では高周波の固有ペアが、たわみ性行列では低周波の固有ペアが支配的であることがわかる。式 (4.1) と 式 (4.2) の両辺をそれぞれ m 乗 (m は正の整数) すると、射影行列の性質から

$$K^m = \sum_{j=1}^N (\lambda_j)^m \theta_j \theta_j^T \quad (4.3)$$

$$[K^{-1}]^m = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^m \theta_j \theta_j^T \quad (4.4)$$

となる。さらに $m \rightarrow \infty$ のとき、式 (4.3) と 式 (4.4) の右辺において、それぞれ支配的な項を採用すれば、近似的に

$$K^m \cong (\lambda_N)^m \theta_N \theta_N^T \quad (4.5)$$

$$[K^{-1}]^m \cong \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^m \theta_1 \theta_1^T \quad (4.6)$$

が成立し、 K^m と $[K^{-1}]^m$ の各列はそれぞれ θ_N と θ_1 の方向を向いてくる。したがって K^m と $[K^{-1}]^m$ の右からそれぞれ θ_N と θ_1 に直交しない任意の非ゼロベクトルをかけると、 θ_N と θ_1 が取り出せる。これがべき乗法と逆べき乗法の原理である。

つぎに K の固有ベクトルを用いて、単位行列 I をスペクトル展開することを考える。まず N 次元空間の各座標軸方向の単位ベクトルを e_i とすると、

$$I = \sum_{i=1}^N e_i e_i^T \quad (4.7)$$

この単位ベクトル e_i を固有ベクトル θ_j で表現すると

$$e_i = \sum_{j=1}^N (\theta_j^T e_i) \theta_j \quad (4.8)$$

となる。したがって、

$$I = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^N (\theta_j^T e_i) \theta_j \right] \left[\sum_{k=1}^N (\theta_k^T e_i) \theta_k^T \right] \quad (4.9)$$

すなわち、

$$I = \sum_{j,k=1}^N \left[\sum_{i=1}^N (\theta_j^T e_i) (\theta_k^T e_i) \right] \theta_j \theta_k^T \quad (4.10)$$

である。ところで θ_j と θ_k について

$$\sum_{i=1}^N (\theta_j^T e_i) (\theta_k^T e_i) = \delta_{jk} \quad (4.11)$$

であるから、式 (4.10) は結局、つぎのようになる。

$$I = \sum_{m=1}^N \theta_m \theta_m^T \quad (4.12)$$

ここで K の対角成分を λ^* だけ変化させた行列

$$\hat{K} = K + \lambda^* I \quad (4.13)$$

をスペクトル展開すると、式 (4.1) と式 (4.12) から

$$\hat{K} = \sum_{j=1}^N (\lambda_j + \lambda^*) \theta_j \theta_j^T \quad (4.14)$$

となる。したがってこの $\hat{K}$ の標準固有値問題

$$\hat{K} \hat{\theta}_j = \hat{\lambda}_j \hat{\theta}_j \quad (4.15)$$

の固有ペアについては、

$$\hat{\lambda}_j = \lambda_j + \lambda^* \quad (4.16)$$

$$\hat{\theta}_j = \theta_j \quad (4.17)$$

である。すなわち式 (4.13) の操作によって、固有ベクトルに変化はないが、すべての固有値が一律に λ^* だけずれる。これが shifting である。

一方、 K を修正して

$$\tilde{K} = K + \lambda_s^* \theta_s \theta_s^T \quad (4.18)$$

をつくと、

$$\tilde{K} = (\lambda_s + \lambda_s^*) \theta_s \theta_s^T + \sum_{j=1, j \neq s}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \quad (4.19)$$

となり、 $\tilde{K}$ の標準固有値問題

$$\tilde{K} \tilde{\theta}_j = \tilde{\lambda}_j \tilde{\theta}_j \quad (4.20)$$

の固有ペアについては、

$$\tilde{\lambda}_j = \lambda_j + \lambda_s^* \delta_{js} \quad (4.21)$$

$$\tilde{\theta}_j = \theta_j \quad (4.22)$$

である。式 (4.18) の操作は固有ベクトルに変化をもたらさず、ある特定の固有値 λ_s のみを λ_s^* だけずらす制御が可能である。これが deflation の背景にあるアイデアである。通常 deflation とは、 K の固有ペア (λ_s, θ_s) を計算した後、式 (4.18) において $\lambda_s^* = -\lambda_s$ として固有値を抜き取り、 $(\tilde{\lambda}_s = 0, \tilde{\theta}_s = \theta_s)$ を固有ペアに持つ特異行列 $\tilde{K}$ を作る操作を指す。しかし本論文では、この全く逆の操作（逆deflation）の効用に注目して、特異行列を正則行列にする安定化技法の有用性に着眼する。

5. 剛性方程式の解と固有ペア

剛性方程式

$$Ku = p \quad (5.1)$$

の右辺項 p を

$$p = \sum_{j=1}^N (\theta_j^T p) \theta_j \quad (5.2)$$

と固有ベクトルで展開すると、式 (4.2) からただちに解ベクトル u は

$$u = \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j^T p}{\lambda_j} \theta_j \quad (5.3)$$

で与えられる。

6. 修正剛性方程式の解

固有ベクトル θ_s を用いて剛性行列 K を次のように修正する。

$$\tilde{K} = K + \lambda_s^* \theta_s \theta_s^T \quad (\text{式(4.18)の再掲}) \quad (6.1)$$

ここに λ_s^* は規定する値である。式 (5.1) の代わりに、この $\tilde{K}$ を係数行列にもつ剛性方程式

$$\tilde{K} \tilde{u} = p \quad (6.2)$$

を考えると、その解は

$$\tilde{u} = \left(\frac{\theta_s^T p}{\lambda_s + \lambda_s^*} \right) \theta_s + \sum_{j=1, j \neq s}^N \frac{\theta_j^T p}{\lambda_j} \theta_j \quad (6.3)$$

となる。この $\tilde{u}$ と式 (5.3) の u とを比較すると、解ベクトルにおける θ_s の混入度のみが変化を受けることがわかる。これは重要な認識である。

ここからいくつかの固有値が負となった、より一般的な固有値の並びを想定して、絶対値最小の固有値とその固有ベクトルを (λ_s, θ_s) とする。

7. 特異剛性行列

剛性行列 K の特異性をただ単に

$$\det K = 0 \quad (7.1)$$

と定義するよりは、

$$\det K = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_N \quad (7.2)$$

を配慮して、クリティカルな固有ペア (λ_s, θ_s)

$$\lambda_s = 0 \quad (7.3)$$

$$K \theta_s = 0 \quad (7.4)$$

を特定して、 K の特異性を特徴付ける方が応用的である。 K のランクが $(N-1)$ よりも下がったときには、複数組の固有ペアを用いて特異性を特徴付けることができる。ここでは (λ_s, θ_s) のみをクリティカルな固有ペアと

して持つような特異剛性行列を考える。このとき、

$$K = \sum_{j=1, \neq s}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \quad (7.5)$$

であるから、 K の各列に θ_s が混入せず、 K のすべての列、したがって K のすべての行と θ_s とは直交する。式(7.4)からも分かるこの直交性は、後述の特異剛性方程式の解の存在条件の等価性、すなわち式(11.3)と式(11.9)の等価性の証明の際に役立つ。

K が特異行列のとき、 K^{-1} は定義できないが、 K が徐々に特異行列に近づくにつれ($\lambda_s \rightarrow 0$)、式(4.2)の右辺では $\frac{1}{\lambda_s} \theta_s \theta_s^T$ が支配的となり、 K^{-1} の各列は近似的に

θ_s の方向を向く。したがって座屈点付近では K^{-1} の右から θ_s と直交しない任意の非ゼロベクトルをかけるだけで容易に θ_s を取り出せる(ただし分岐点付近では後述の荷重モード e は θ_s に直交するので注意を要する)。

野口・久田[24]はこの特質に注目し、分岐点付近の最後の反復ステップで、 K^{-1} の右からつくり合い力をかけて得られる変位修正子が固有ベクトルに近似する(式(7.4)が近似的に成立する)ことを利用し、これを適当にスケールしたscaled correctorを分岐方向予測子として採用している。

総じて特異剛性行列 K の列(行)からは、 θ_s のみが排除される。反対に K が限りなく特異剛性行列に近づくとき、その逆行列 K^{-1} の各列(行)には、他のすべての固有ベクトルは排除され θ_s のみが残留する。これも工学的に有用な認識である。

8. 特異剛性方程式の解

特異剛性方程式

$$Ku = p \quad (8.1)$$

の解法を考える。式(8.1)が解を持つためには、式(5.3)における θ_s の重みのうち、分母の λ_s がゼロであるから分子についても

$$\theta_s^T p = 0 \quad (8.2)$$

が成立しなければならない。このとき式(8.1)の一般解はつぎのように構成される。

$$u = u_0 + u_p \quad (8.3)$$

ここに u_0 と u_p はそれぞれ余解と特解で

$$u_0 = C \theta_s \quad (8.4)$$

$$u_p = \sum_{j=1, \neq s}^N \frac{\theta_j^T p}{\lambda_j} \theta_j \quad (8.5)$$

であり、

$$Ku_0 = 0 \quad (8.6)$$

$$Ku_p = p \quad (8.7)$$

を満たす。式(8.4)の中の不定係数 C については、例えば後述の式(12.12)や式(14.7)など、解くべき問題に応じた決定方法がある。また u_p のなかに θ_s は含まれないので、

$$u_0^T u_p = 0 \quad (8.8)$$

でもある。

9. 余解と特解の計算

余解 u_0 はクリティカルな固有ベクトル θ_s そのものであるから、計算上の問題は特になく、特解 u_p の評価については、式(8.5)が θ_s 以外のすべての固有ベクトルを必要としている。しかし非線形有限要素解析では K のすべての固有ベクトルを計算することは非現実的であり、式(8.5)は単に理論上の興味に過ぎない。一方、式(8.7)を用いて u_p を評価するにしても K は特異行列である。そこで式(6.1)の要領で安定化剛性行列 $\tilde{K}$ を作り

$$\tilde{K} \tilde{u}_p = p \quad (9.1)$$

を解くと、式(6.3)から

$$\tilde{u}_p = \left(\frac{\theta_s^T p}{\lambda_s^*} \right) \theta_s + \sum_{j=1, \neq s}^N \frac{\theta_j^T p}{\lambda_j} \theta_j \quad (9.2)$$

となる。ここで式(8.2)と式(8.5)とを考慮すると

$$u_p = \tilde{u}_p \quad (9.3)$$

となる。すなわち式(6.1)における設定値 λ_s^* の影響は全く消滅する。これが一つの新しい重要な見識である。

10. 射影行列と解の存在条件

K をスペクトル展開した式(4.1)の右辺における各項 $\lambda_j \theta_j \theta_j^T$ の物理的意味を、剛性方程式(5.1)の解法との関連から考える。剛性方程式(5.1)の右辺の任意の荷重ベクトル p は、式(5.2)のように固有ベクトルの線形結合として表現できるが、固有ベクトルに分解された

個々の荷重モード $(\theta_j^T \mathbf{p}) \theta_j$ に対する変位応答ベクトル $\mathbf{u}_j$ を決める剛性項は $\lambda_j \theta_j \theta_j^T$ のみで,

$$\lambda_j [\theta_j \theta_j^T] \mathbf{u}_j = (\theta_j^T \mathbf{p}) \theta_j \quad (10.1)$$

を解いて変位応答ベクトル $\mathbf{u}_j$ は

$$\mathbf{u}_j = \frac{\theta_j^T \mathbf{p}}{\lambda_j} \theta_j \quad (10.2)$$

と直ちに決まり,他の射影剛性の項は全く関与して来ない(行列の対角化).したがって $\mathbf{K}$ が, $\lambda_s=0$ となる特異剛性行列でも,射影剛性 $\lambda_s \theta_s \theta_s^T$ が分担すべき荷重モード $(\theta_s^T \mathbf{p}) \theta_s$ が恒等的にゼロベクトルであるならば,すなわち荷重条件 $\mathbf{p}$ のなかにクリティカルな固有ベクトル θ_s が混入しない

$$\theta_s^T \mathbf{p} = 0 \quad (\text{式(8.2)の再掲}) \quad (10.3)$$

の場合に限り,解の存在が保証される.式(10.3)には明確な力学的背景がある.

このことを図-1のピストン-自由端のはり要素(線形)の無次元化剛性行列(軸変形の自由度は排除)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 12 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

について示す.この運動学的な系に節点荷重 $\mathbf{p}$ が作用するときの無次元化剛性方程式

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (10.5)$$

の解ベクトル

$$\mathbf{u}^T = (\theta_A, v_B, \theta_B) \quad (10.6)$$

の存在を検証する.特異剛性行列のクリティカルな固有ベクトル

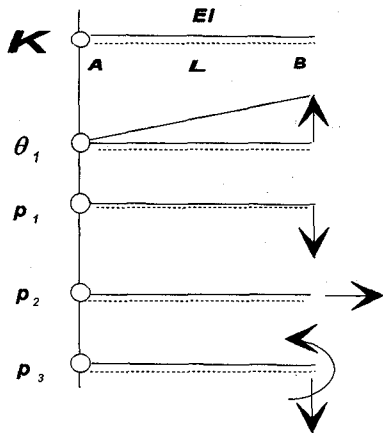


図-1 解が存在する場合と解が存在しない場合

$$\theta_1^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \quad (10.7)$$

のモードを図-1に示したが,これは不安定な系の剛体変位モードを与える.これに対して3本の異なる荷重ベクトル

$$\mathbf{p}_1^T = (0, -1, 0), \quad \mathbf{p}_2^T = (0, 0, 0), \quad \mathbf{p}_3^T = (0, -1, 1) \quad (10.8-10)$$

を設定する.明らかに

$$\theta_1^T \mathbf{p}_1 \neq 0, \quad \theta_1^T \mathbf{p}_2 = 0, \quad \theta_1^T \mathbf{p}_3 = 0 \quad (10.11-13)$$

であるから, $\mathbf{p}_1$ に対しては解は存在しないが, $\mathbf{p}_2$ と $\mathbf{p}_3$ については一般解を構成することができる.このとき,解の存在を判別する条件式(10.3)は,外力系 $\mathbf{p}$ の自己つり合いを判別する仮想変位の原理を詠ったものである.すなわち外力系 $\mathbf{p}$ にクリティカルな固有ベクトル θ_1 を仮想変位として与え,このときの外力仕事を計算しているに過ぎない.仮想内力仕事は θ_1 が剛体変位モードであるためゼロである.これが特異剛性行列の特徴付けと解の存在性の判定に,固有ペアを用いる方が工学的であるとする理由である.解の存在条件の認識は,分岐解析や新しい構造形態の考案にとって重要である.

1 1. 解の存在条件の等価性

$\mathbf{K}$ が特異剛性行列で

$$\text{rank}(\mathbf{K}) = N-1 \quad (11.1)$$

のとき,連立一次方程式

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (11.2)$$

の解 $\mathbf{u}$ が存在するための必要十分条件は線形代数[4,8,30]によれば,すべて一律に

$$\text{rank}(\mathbf{K}) = \text{rank}([\mathbf{K}, \mathbf{p}]) \quad (11.3)$$

とある.ここで $[\mathbf{K}, \mathbf{p}]$ は剛性行列 $\mathbf{K}$ に右辺項 $\mathbf{p}$ を抱き込んだ N 行 $(N+1)$ 列の拡大行列である.

式(10.3)と式(11.3)の等価性の証明を試みる.まず式(11.1)より, $\mathbf{K}$ の N 本の列(行)のうち独立なのは, $(N-1)$ 本である.これから $\mathbf{K}$ の N 本の列に対する個々の重みをそのベクトル成分としてもち,

$$\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (11.4)$$

を満たす非ゼロベクトル $\mathbf{w}$ が存在する($\mathbf{w}$ がゼロベクトルであるのは $\mathbf{K}$ の N 本の列が一次独立である場合に限

る).これは定義から固有ベクトルである.すなわち,

$$\theta_s = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \quad (11.5)$$

つぎに,拡大行列のランクが(N-1)であることより,右辺項ベクトル $\mathbf{p}$ も, $\mathbf{K}$ の(N-1)本の列を用いて表現できる.この独立な(N-1)本の列として第 m 列($\mathbf{k}_m$)以外のすべての列を採用して,

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{v} - v_m \mathbf{k}_m \quad (11.6)$$

と表現できる.ここでベクトル $\mathbf{v}$ には各列の重みを収め,その存在は式(11.1)と式(11.3)から自明である. v_m は $\mathbf{k}_m$ の重みである.式(11.6)の両辺に左から θ_s^T を掛け,

$$\theta_s^T \mathbf{K} = \mathbf{0}^T \quad (11.7)$$

であることと, $\mathbf{K}$ のすべての列が θ_s と直交するため

$$\theta_s^T \mathbf{k}_m = 0 \quad (11.8)$$

であることを考慮すれば,

$$\theta_s^T \mathbf{p} = 0 \quad (\text{式(10.3)の再掲}) \quad (11.9)$$

が誘導される.

つぎに逆に式(11.9)が成立するとき,式(11.3)が成立することを示す.

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1, \neq s}^N \lambda_j \theta_j \theta_j^T \quad (11.10)$$

であるから, $\mathbf{K}$ のN本の列のいずれにも θ_s は混入せず, N本の列は θ_s と直交する.したがって $\mathbf{K}$ のN本の列のうち,独立なものは(N-1)本のみであり,式(11.1)式が成立する.つぎに式(11.9)より $\mathbf{p}$ のなかに θ_s は混入せず,

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1, \neq s}^N (\theta_j^T \mathbf{p}) \theta_j \quad (11.11)$$

と(N-1)本の独立なベクトルで表現され,拡大行列 $[\mathbf{K}, \mathbf{p}]$ についても, (N+1)本の列のうち,独立なものは(N-1)本のみである.したがって

$$\text{rank}([\mathbf{K}, \mathbf{p}]) = N-1 \quad (11.12)$$

となり,式(11.3)が成立する.証明終り.

12. 固有ペアの感度

$\mathbf{K}$ に $\Delta \mathbf{K}$ だけの変動(割線方向)があったとき,

$$[(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) - (\lambda_s + \Delta \lambda_s) \mathbf{I}] \{\theta_s + \Delta \theta_s\} = \mathbf{0} \quad (12.1)$$

を満たす固有値の変動分 $\Delta \lambda_s$ と固有ベクトルの変動量

$\Delta \theta_s$ を, $\mathbf{K}$ の固有ペアを用いて線形近似の範囲内で予測評価することを考える.ただし予測すべき固有ベクトル $(\theta_s + \Delta \theta_s)$ については,

$$|\theta_s + \Delta \theta_s| = 1 \quad (12.2)$$

において, 2次項以上の高次項を無視して

$$\theta_s^T \Delta \theta_s = 0 \quad (12.3)$$

である.まず $\Delta \mathbf{K}$ による固有値の変動分 $\Delta \lambda_s$ は,つぎの一次式で近似できる[1].

$$\Delta \lambda_s = \theta_s^T \Delta \mathbf{K} \theta_s \quad (12.4)$$

固有ベクトルの変動量 $\Delta \theta_s$ は

$$\Delta \theta_s = - \sum_{j=1, \neq s}^N \frac{\theta_j^T \Delta \mathbf{K} \theta_s}{(\lambda_j - \lambda_s)} \theta_j \quad (12.5)$$

で与えられるが[15], (λ_s, θ_s) 以外のすべての固有ペアを必要とするので工学的ではない. Wang[21]は複数組の固有ペアを用いて感度 $\Delta \theta_s$ を近似的に計算する陽解法と陰解法とを提案している.

$\Delta \theta_s$ を (λ_s, θ_s) のみで評価するには,まず式(2.1)を $j=s$ について次のように線形化する.

$$[\mathbf{K} - \lambda_s \mathbf{I}] \Delta \theta_s = \mathbf{q}_s \quad (12.6)$$

式(12.6)の右辺項は

$$\mathbf{q}_s = -\Delta \mathbf{K} \theta_s + \Delta \lambda_s \theta_s \quad (12.7)$$

である. $\Delta \lambda_s$ は式(12.4)より評価する.式(12.6)の両辺に左から θ_s^T をかけ,式(2.1)($j=s$)を考慮すると

$$\theta_s^T \mathbf{q}_s = 0 \quad (12.8)$$

となり,解 $\Delta \theta_s$ の存在は保証される.式(12.6)の左辺の係数行列は特異行列であるため,式(12.6)を直接解くことはできないが, $\Delta \theta_s$ の一般解は余解 θ_s と特解 $\mathbf{v}_q$ とから構成され,

$$\Delta \theta_s = c \theta_s + \mathbf{v}_q \quad (12.9)$$

$$[\mathbf{K} - \lambda_s \mathbf{I}] \theta_s = \mathbf{0} \quad (12.10)$$

$$[\mathbf{K} - \lambda_s \mathbf{I}] \mathbf{v}_q = \mathbf{q}_s \quad (12.11)$$

が成立する.式(12.3)の直交性より, $\Delta \theta_s$ のなかに θ_s が含まれないので,

$$c = 0 \quad (12.12)$$

で,式(12.9)は

$$\Delta \theta_s = \mathbf{v}_q \quad (12.13)$$

となり,解 $\Delta \theta_s$ は特解 $\mathbf{v}_q$ のみから構成される.

式 (12.6) の解法として, Nelson[18]はまず余解 θ_s のなかでの絶対値最大の成分番号 k を選び, その第 k 成分がゼロに規定されるようなベクトル $\mathbf{v}$ を求めるために, 特異係数行列と右辺項をつぎのように分割・修正した.

$$\begin{bmatrix} [K - \lambda_s I]_{11} & 0 & K_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ K_{21} & 0 & [K - \lambda_s I]_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (12.14)$$

この解ベクトル $\mathbf{v}$ は一般に余解 θ_s を含んでいるので, その混入度を $\theta_s^T \mathbf{v}$ で測り, 式 (12.3) を用いて, $\mathbf{v}$ から θ_s を排除する (直交化する) ことにより, $\Delta \theta_s$ はつぎのように完全に決まる.

$$\Delta \theta_s = (-\theta_s^T \mathbf{v}) \theta_s + \mathbf{v} \quad (12.15)$$

以上が Nelson の解法であるが, 本研究の論旨から, 式 (12.6) の係数行列を

$$[(K - \lambda_s I) + \lambda_s^* (\theta_s \theta_s^T)] \mathbf{v}_q = \mathbf{q}_s \quad (12.16)$$

と正則化し, 特解 $\mathbf{v}_q$ を直接求めることもできる. ただしこの際, 式 (12.16) で係数行列のバンド構造は一般に消滅する (対称性は保持される).

1.3. 特異点の簡易精算法

特異つり合い点の満たす特異点方程式

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = 0 \quad (13.1)$$

$$\lambda = 0 \quad (13.2)$$

をNR法により直接的に求める反復計算[27]では, 各反復点での固有ベアの計算が計算負荷を高める原因である. ここでは負荷を軽便にした簡易反復法を考える.

まず従来の反復法において, 反復点Cからつぎの反復点Dに至る代表的な反復ステップの手続きだけを簡単にまとめておく

ステップ① 反復開始点Aの設定

ステップ② K_A の固有ベア(λ_A, θ_A)の計算

添字は固有ベア番号ではなく, 点の属性を表す. 開始点Aを現在の反復点Cと読み替え, つぎの反復点Dを行先点とする.

ステップ③ 反復点Cでの線形化剛性方程式の解法

$$K \delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{p} \mathbf{e} = -\mathbf{E} \quad (13.3)$$

ここに $\mathbf{e}$ は荷重ベクトルで, これを解いて

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_E + \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{u}_e \quad (13.4)$$

ただし,

$$\delta \mathbf{u}_E = -K^{-1} \mathbf{E} \quad (13.5)$$

$$\delta \mathbf{u}_e = +K^{-1} \mathbf{e} \quad (13.6)$$

ステップ④ 剛性行列の変動分 ΔK の評価
 $\delta \mathbf{u}$ による剛性行列の変化分は, K の方向微分を線形近似して

$$\Delta K = \Delta K_E + \delta \mathbf{p} \Delta K_e \quad (13.7)$$

ただし差分近似

$$\Delta K_E \approx \left(\frac{1}{\varepsilon_E} \right) \{ K(\mathbf{u} + \varepsilon_E \delta \mathbf{u}_E) - K(\mathbf{u}) \} \quad (13.8)$$

$$\Delta K_e \approx \left(\frac{1}{\varepsilon_e} \right) \{ K(\mathbf{u} + \varepsilon_e \delta \mathbf{u}_e) - K(\mathbf{u}) \} \quad (13.9)$$

を用いた.

ステップ⑤ 固有値の変動量 $\delta \lambda$ の予測

$$\delta \lambda = \delta \lambda_E + \delta \mathbf{p} \delta \lambda_e \quad (13.10)$$

ここに

$$\delta \lambda_E = \theta^T \Delta K_E \theta \quad (13.11)$$

$$\delta \lambda_e = \theta^T \Delta K_e \theta \quad (13.12)$$

ステップ⑥ 荷重変数の修正量 $\delta \mathbf{p}$ の決定

式 (13.10) を

$$\delta \lambda = -\lambda \quad (13.13)$$

に代入して

$$\delta \mathbf{p} = -\frac{\lambda + \delta \lambda_E}{\delta \lambda_e} \quad (13.14)$$

したがって

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_E + \delta \mathbf{p} \delta \mathbf{u}_e \quad (13.15)$$

ここまでの過程で現在点Cの固有ベア(λ, θ)を必要とした.

ステップ⑦ 反復点の更新

$$\mathbf{p}_D = \mathbf{p}_C + \delta \mathbf{p} \quad (13.16)$$

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_C + \delta \mathbf{u} \quad (13.17)$$

これでつぎの反復点D (行先点) が決まる.

ステップ⑧ 新しい反復点Dを現在点Cとする

ステップ⑨ 現在点での K の固有ベアの計算

ここで注目する固有ベアが不本意に切り替わらないよう注意すること.

ステップ⑩ 収束判定

計算された λ は十分小さいか?

ステップ⑪ 未収束ならステップ③へ

ステップ⑫ 反復終了 (目標点に到達)

以上が従来の反復精算法であるが, より軽便で簡易的な反復法で妥協できるなら, 反復点での固有ベアの計算を, 反復開始点Aでの固有ベアの感度解析で代用することができる. ステップ⑨を, つぎの新ステップ⑨と交換して簡易反復法となる.

新ステップ⑨ 開始点Aでの固有ベアの感度解析

K_A と固有ベア(λ_A, θ_A)を用いて,

$$\tilde{K}_A \Delta \theta_{CA} = -\Delta K_{CA} \theta_A + (\theta_A^T \Delta K_{CA} \theta_A) \theta_A \quad (13.18)$$

から固有ベクトルの変動分 $\Delta \theta_{CA}$ が評価できる. ここで

$$\tilde{K}_A = K_A - \lambda_A I \quad (13.19)$$

で, すべての変動量は定点点Aから割線方向に測った量であるから,

$$\Delta K_{CA} = K_C - K_A \quad (13.20)$$

である. K_C は現在の反復点Cの剛性行列

である。点Cにおける固有ベクトル θ_c を

$$\theta_c \cong \theta_A + \Delta\theta_{cA} \quad (13.21)$$

とし、固有値 λ_c はレイリー商から

$$\lambda_c \cong \theta_c^T K_c \theta_c \quad (13.22)$$

で求める。

式 (13.18) の係数行列 $\tilde{K}_A$ は特異行列ではあるが、これを正則化して特解を求める際には一定行列で、右辺の ΔK_{cA} のみが各反復点に対して更新されるだけである。開始点AはNR法の意味でも、また固有ペアの線形感度解析の意味でも目標点の“近傍”にある必要がある。

1 4. 頂上分岐方向

頂上分岐（または丘上分岐, Hill-Top Branching）とは、主経路の荷重極限点において発生する分岐現象である。式 (5.1) の解ベクトル u と右辺項 p をそれぞれ増分量の du と dp に置き換えて

$$Kdu = dp \quad (14.1)$$

とする。 (λ_1, θ_1) がクリティカルな固有ペアとなる分岐点においてこの特異剛性方程式の解を考える。ただし解の存在条件として

$$dp \theta_1^T e = 0 \quad (14.2)$$

が成立している。分岐点において、主経路と分岐経路に対する接線ベクトルをそれぞれ $(du_I, 0)$ および (du_{II}, dp_{II}) とすると、頂上分岐の場合（図-2 参照）、 du_I と θ_1 は平行となり、特解 du_p は正則化した剛性行列を係数行列にもつ連立方程式の解として求められる。さらに2本の接線ベクトル $(du_I, 0)$ と (du_{II}, dp) とが直交する頂上分岐点（経験的には頂上分岐の多くがこのタイプである）では、

$$du_I^T du_{II} = 0 \quad (14.3)$$

が成立するので、

$$du_I = C_I \theta_1, \quad (C_I \neq 0) \quad (14.4)$$

$$du_{II} = C_{II} \theta_1 + du_p \quad (14.5)$$

を式 (14.3) に代入し、余解と特解の直交性

$$\theta_1^T du_p = 0 \quad (14.6)$$

を考慮すると、

$$C_{II} = 0, \quad (C_I \neq 0) \quad (14.7)$$

となる。したがってこの場合の頂上分岐方向は、規定さ

れた荷重増分とそれに対する特解のみで表現でき、

$$\left\{ \frac{du_{II}}{dp} \right\} = \left\{ \frac{du_p}{dp} \right\} \quad (14.8)$$

となる。ここに $\overline{dp}$ は規定された荷重増分である。特解 du_p も式(9.1)～式(9.3)の要領で評価できる。さらに主経路と分岐経路ともに $dp=0$ であるような頂上分岐については、2組の固有ペアがクリティカルとならなければならない[28,29]。

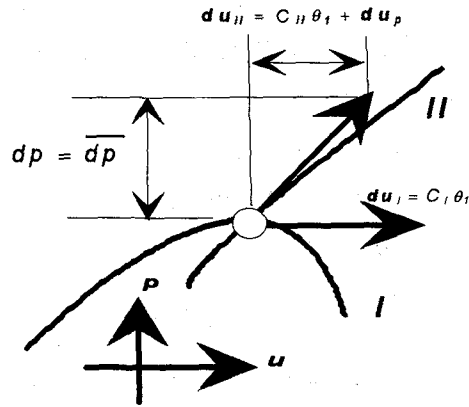


図-2 頂上分岐

1 5. 応用例

15.1 簡易 分岐点反復精算法

図-3にある平面トラスについて、従来の単純特異点の反復計算法と簡易反復法の両者による比較計算を試みる。反復開始点を目標の分岐点付近に取り（図-4のつり合い経路を参照）、従来の反復法（各反復点で固有ペアを計算）と簡易反復法（反復開始点で固有ペアの感度解析で代用）の結果をまとめたものがそれぞれ表-1と表-2である。図-5に固有ベクトルを示す。この例題では、分岐点でのみゼロ固有値が2個出現し、それに

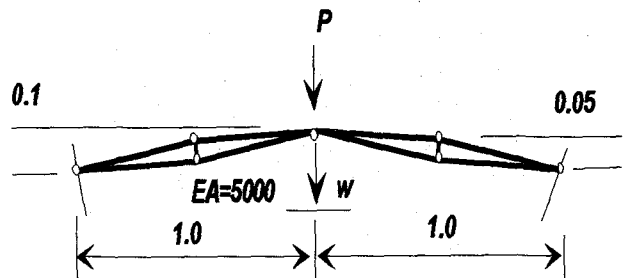


図-3 2次元トラス

表-1 従来の特異点反復精算法 (目標の分岐点付近で反復開始)				
反復	荷重 p	変位 w	$ E $	固有値 λ
0回目	+3.4997078	+0.02964452	0.5144×10^{-4}	- 0.27173
1回目	+3.4901906	+0.02944763	0.10506×10^{-3}	+0.38985 $\times 10^{-3}$
2回目	+3.4901237	+0.02944791	0.2135×10^{-9}	+0.12231 $\times 10^{-6}$
3回目	+3.4901237	+0.02944791	0.8693×10^{-10}	-0.19857 $\times 10^{-7}$

表-2 簡易特異点反復精算法 (目標の分岐点付近で反復開始)				
反復	荷重 p	変位 w	$ E $	予測された固有値 λ (真の固有値)
0回目	+3.4997078	+0.02964452	0.51445×10^{-4}	- 0.27173 (-0.27173)
1回目	+3.4901906	+0.02944763	0.10506×10^{-3}	0 (+0.38986 $\times 10^{-3}$)
2回目	+3.4901100	+0.02944762	0.32219×10^{-11}	0 (+0.38992 $\times 10^{-3}$)
3回目	+3.4901100	+0.02944762	0.17539×10^{-11}	0 (+0.38995 $\times 10^{-3}$)

表-3 従来の特異点反復精算法 (原点で反復開始)				
反復	荷重 p	変位 w	$ E $	固有値 λ
0回目	0	0	0	+37.547646
1回目	+5.3103386	+0.027057729	1.96073	+3.2253946
2回目	+3.5080293	+0.029536009	0.01712	-1.2163168
3回目	+3.4901469	+0.029448058	0.17508×10^{-4}	-0.204656 $\times 10^{-3}$
4回目	+3.4901237	+0.029447910	0.61341×10^{-10}	+0.214569 $\times 10^{-6}$

表-4 簡易特異点反復精算法 (原点で反復開始)				
反復	荷重 p	変位 w	$ E $	予測された固有値 λ (真の固有値)
0回目	0	0	0	+37.547646 (+37.547646)
1回目	+5.3103386	+0.027057729	1.9607	0 (+3.2253946)
2回目	+3.3586518	+0.027011632	0.8241×10^{-4}	0 (+3.2261392)
3回目	+3.3586428	+0.027016324	0.686×10^{-10}	0 (+3.2261392)
3回目	+3.3586428	+0.027016324	0.100×10^{-11}	0 (+3.2261392)

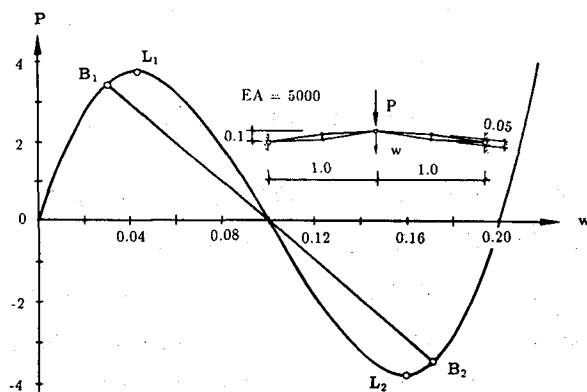


図-4 つり合い経路

至るまでの反復点では単一の固有値である。目標の分岐点の正確な座標は $(p, w) = (3.4901237, 0.029447910)$ である。表-1と表-2の結果はどちらもきわめて安定に特異点に収束している。表-2の固有値の列では、反復開始点から予測した値の他にも、参考までに各反復点で

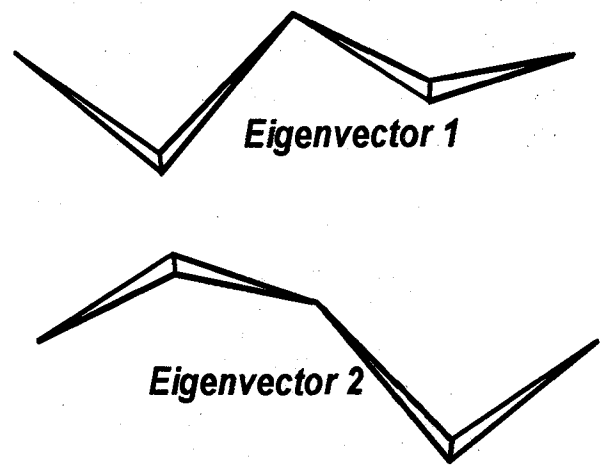


図-5 固有ベクトル

の真の固有値を括弧の中に示す。簡易反復精算法でも $(p, w) = (3.4901100, 0.02944762)$ に収束しており、十分に実用に耐え得る精算法である。つぎにより不利な状況での反復精算を試みた。反復の開始点を原点に取り、従来の反復法と簡易反復法の結果をまとめたものがそ

れぞれ表-3と表-4である。表-3の結果は安定に収束し、表-1の結果と同じ解に収束しているが、表-4においては、 $(p, w) = (3.3586428, 0.027016324)$ と近似の度合いが悪化する。表-4では、残差ベクトルのノルム $|E|$ は十分に消滅しているが、原点から予測した固有値はゼロになっているものの、各反復点での実際の固有値（括弧の中の値）は十分に小さくなっていない。このことから、実際に収束した点は分岐点ではなく、その付近にある正則つり合い点であることがわかる。固有ベアの感度解析は線形近似を前提としているため、感度解析を行う点が目標点より遠く離れている場合には精度の劣化は免れない。しかし簡易反復法は、目標点の近くで応用すれば十分に機能する。

15.2 機構解析（接触問題）

機構解析（図-6）とは、運動学的な系の有限の剛体変位運動（メカニズム運動）を追跡することである。機構系について剛性行列を求めると特異行列となるが、このなかから剛体変位モード（余解の固有ベクトル）を抽出する。これを適当にスケーリングして、現在の形状に加算すれば、つぎの剛体変位形状を予測することができる。この予測形状は線形近似によるため誤差としての弾性変形を含み、反復計算でこれを除去し、剛体変位形状をとり出すことができる[25,26]。すなわち、剛体変位を

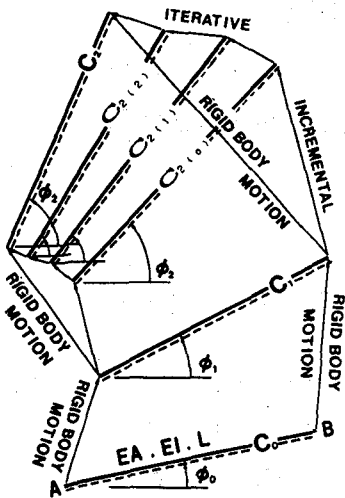


図-6 剛体の有限変位問題としての機構運動

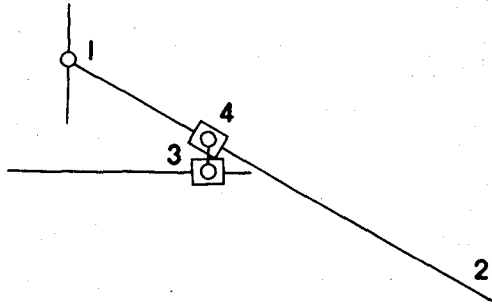


図-7 機構モデル

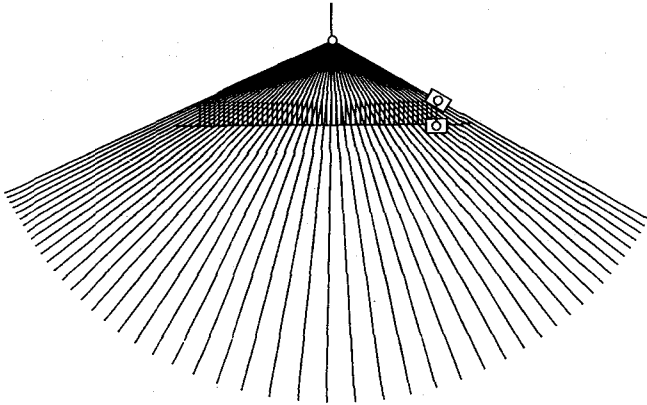


図-8 機構運動の追跡

除去する構造系の有限変位理論とは全く逆の発想で、機構運動を逐次追跡することができる。

図-7の機構モデルはラブソンのかじ取り装置と呼ばれるもので、節点3と節点4はその距離を一定に保ったまま、節点3は水平方向にのみ滑動し、節点4は部材1-2を摩擦なしで自由に滑動するメカニズムである。滑動部分は接触問題として定式化できる。図-7のモデルの機構解析の結果、図-8のような剛体変位運動を追跡できる。収束解における剛性行列は、要素の断面剛性値、要素長さ、それに部材傾斜角に依存するが、実際に弾性変形を除去する反復計算では部材傾斜角のみを更新するだけ十分であり、要素長さは近似的に一定値として扱える。現在の剛体変位形状に加算すべき固有ベクトル

のスケール量を十分小さく規定すれば、残留弾性変形（累積誤差）はプロッターのペン先以下に抑えられる。

15.3 頂上分岐

図-9 のエラスチカフレームは、頂上分岐（荷重極限点で発生する分岐現象）のみが発生するように考案されたモデルである。このモデルについて先の頂上分岐方向の妥当性を検証する。図-10 は、この頂上分岐モデルのつり合い経路を示す。横軸と縦軸にはそれぞれ、無次元化された変位 (V_{11}/L) と無次元化された荷重 (PL^2/EI) とをプロットした。主経路は原点を含む閉曲線となり、全部で4個の荷重極限点 (LP1, LP2, LP3, LP4) が出現する。このうち LP2 と LP4 が頂上分岐点 (LP2=BP1, LP4=BP2) となる。図-11 にそれぞれの頂上分岐点でのクリティカルな固有ベクトルを示す。この2個所の頂上分岐点で、式 (14.8) で与えられる分岐方向予測子を試したが、いずれも微小の荷重増分を規定するだけで、修正子の反復計算をほとんど必要としないまま頂上分岐経路にスムーズに移行できた。

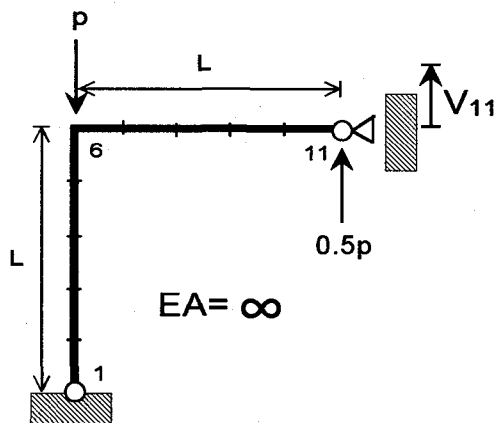


図- 9 頂上分岐モデル（平面エラスチカフレーム）

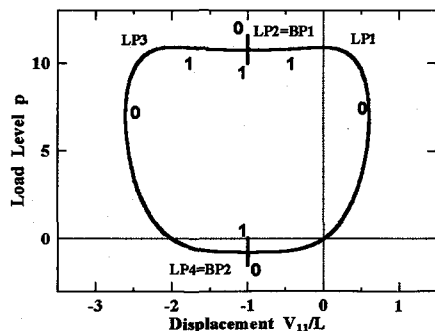
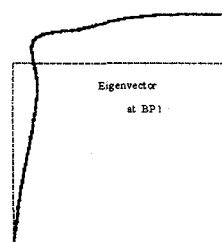
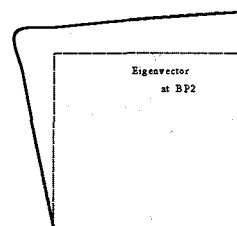


図- 10 頂上分岐モデルのつり合い経路



頂上分岐点BP1での固有ベクトル



頂上分岐点BP2での固有ベクトル

図- 11 頂上分岐点での固有ベクトル

安定性の判定において注意すべき点は、頂上分岐点の前後で負の固有値の個数に変化が見られないことである（頂上分岐経路が一本のみのとき）。このことは安定解析において、つぎの2つの意味で重要である。まず、単に負の固有値の個数の変化のみを監視するだけでは、頂上分岐を見逃してしまう可能性があること（荷重変数の変化にも注意する）、もうひとつは、頂上分岐の存在によって安定経路・不安定経路に関する経験的判別が裏切られることがあることである。例えば図-10 に負の固有値の個数を示したが、これによれば、必ずしも荷重変数の増加（減少）する経路が安定（不安定）であるとは限らない。

16. まとめ

正則および特異剛性行列の固有ペアの数理について、工学的な応用面から新しい見識を加えて考察してみた。剛性行列に射影行列を付加して、固有ベクトルは変化させずに特定の固有値のみを制御する逆 deflation の有用性に着目した。解の存在条件が満たされる限り、特異剛性行列は容易に正則化でき、剛性方程式の解法には何ら支障を生じない。一般解の構成に必要な余解と特解の工学的計算方法を提示したが、この方法では余解の評価にはゼロ固有値の固有ベクトルの計算、特解の評価には正

則化した係数行列を持つ連立方程式の解法を必要とし、すべての固有ベクトルを計算する必要は全くない。特異行列を係数行列に持つ連立方程式の解は存在しないと画一的に考えるよりも、解が存在する状況が一体何であるかを考えること、ないしは解の存在する状況を積極的に作り出すことの方が発展的な姿勢である。

謝辞 本研究は、日本学術振興会の特別研究員である第2著者(岡澤重信)の文部省科学研究費補助金(特別研究員奨励費)の一部を用いて行われたことを付記する。

参考文献

- [1] F. シャトラ、伊理正夫・伊理由美訳;行列の固有値」, Springer-Verlag, Tokyo, 1993 年
- [2] 村田健郎;線形代数と線形計算法序説, *Information & Science* - 6, サイエンス社,
- [3] 片山拓郎, 清田秀二, 柏木光博, 大脇信一, 平井一男; 残差ベクトルを用いた標準固有値問題の部分空間解法, 日本応用数学会論文誌, Vol.4, No.4, 1994, 299-325
- [4] 井上訳;「線形代数とその応用」, 産業図書, 昭和 53 年 (1978 年), Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, Academic press, New York, 1976,
- [5] 柳井晴夫, 竹内哲;射影行列, 一般逆行列, 特異値分解, 東京大学出版会, 1983年
- [6] 韓 太舜・伊理正夫 著;ジョルダン標準形, 東京大学出版会, U P 応用数学選書 8, 1982年
- [7] 半谷裕彦, 川口健一; 形態解析 一般逆行列とその応用, 計算力学とCAEシリーズ 5, 培風館, 1991 年
- [8] 町田東一, 川上泉, 高橋宣明, 村田勝; マトリクスと連立一次方程式, 東海大学出版会, 「工学のためのマトリクス①」, 1990 年
- [9] 町田東一, 駒崎友和, 松浦武信; マトリクスの固有値と対角化, 東海大学出版会, 「工学のためのマトリクス②」, 1990 年
- [10] 小島紀男, 矢沢志英, 本間光一; マトリクスとシステム, 東海大学出版会, 「工学のためのマトリクス③」, 1990 年
- [11] 伊理正夫ら;第1章行列の構造, 現代応用数学の基礎2, 別冊・数学セミナー, 1987 年, 日本評論社
- [12] 今村勤; 物理と行列, 岩波書店, 物理と数学シリーズ1, 1994 年
- [13] Eriksson, A. ; *Using Eigenvector Projections to Improve Convergence in Nonlinear Finite Element Equilibrium Iterations*, Int. J. for Num. Meth. in Engrng., Vol 24, 497-512, 1987
- [14] Andelman, H.M., and Haftka, R.T. ; *Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems*, AIAA Journals, Vol. 24, NO. 5, May 1986, 823-832
- [15] Watkins, D.S. ; *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, 1991
- [16] Axelsson, O. ; *Iterative Solution Methods*, Cambridge University Press, 1994,
- [17] Sehmi, N.S. ; *Large Order Structural Eigenanalysis, Techniques Algorithms for Finite Element Systems*, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1989
- [18] Nelson, R.B. ; *Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives*, AIAA Journal, Vol.14, Sept. 1976, 1201-1205
- [19] Troger, H. and Steindl, A. ; *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory, An Introduction for Engineers and Applied Scientist*, Springer, New York, 1991
- [20] Waszczyszyn, A. ; Cichon, Cz. and Radwanska, *Stability of Structures by Finite Element Methods*, 1994, 482 pages, Volume 40 Studies in Applied Mechanics, Elsevier
- [21] Wang, B.P. ; *Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics*, AIAA Journal, Vol. 29, No. 6, 1018-1020, 1991
- [22] Wilkinson, J. ; *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford, Clarendon, 1965.
- [23] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. ; *Matrix Computation*, John Hopkins, Uni. Press., Baltimore, MD, 1983
- [24] 野口裕久, 久田俊明; Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.58, No.555, 1992, 2191-2198
- [25] Fujii, F. and Usuda, Y. ; *Stiffness Formulation for Planar Kinematics*, EM, ASCE, Vol.117, No.3, 694-699, 1991
- [26] 藤井文夫; 接触問題としてのスライタ-メカニズムの機構運動追跡法, 日本機械学会論文集(A 編), 「計算固体力学」特集号, Vol.57, No.541, 1991, 260-266
- [27] 藤井文夫, 内藤幹夫; 特異つり合い点をピンポイントするための局所的大域的非線形解法, 構造工学論文集, Vol. 41A, 455-464, 1995 年 3 月.
- [28] Fujii, F. and Okazawa, S. ; *Multi-Bifurcation Models in Nonlinear Elasticity*, Proceedings of Int. Conf. on Computational Methods in Structural and Geotechnical Engineering, Hong Kong, Vol. II, 583-588, 1994.
- [29] Fujii, F. and Okazawa, S. ; *Pinpointing Bifurcation Points and Branch-Switching*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE., March 1997
- [30] 伊理正夫, 阪田省二郎; マトリクス, 理工学基礎講座 3, 応用数学 3, 培風館, 1982
- [31] 藤井文夫, 岡澤重信; 構造系の弾性有限変位・分岐問題における大域的非線形線形解法, 日本機械学会論文集(A 編), 「ハイパフォーマンスコンピューティング」特集号, 62 巻 603 号, 48-55, 1996
- [32] Fujii, F., Ikeda, K. and Okazawa, S.; *Modified Stiffness Matrix Iteration to Compute the Multiple Bifurcation Point*, IASS Int. Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures, Taipei, 1997 (to be presented)

(1996年9月6日受付)