

周期的曲げを受ける薄肉鋼 I 形断面はりの局部振動の不安定問題

LOCAL DYNAMIC INSTABILITY PROBLEM OF I-SHAPED STEEL BEAMS
UNDER PERIODIC BENDING MOMENT

黄 曉 競 * , 深 澤 泰 晴 ** , 岡 村 美 好 ***

Xiaojing HUANG , Yasuharu FUKASAWA and Miyoshi OKAMURA

*工修 山梨大学大学院 工学研究科博士後期課程 (〒400 甲府市武田 4 丁目 3 番 1 1 号)

**工博 山梨大学工学部教授 土木環境工学科 (〒400 甲府市武田 4 丁目 3 番 1 1 号)

***工修 山梨大学工学部助手 土木環境工学科 (〒400 甲府市武田 4 丁目 3 番 1 1 号)

Consider of the problem of a train passing through a plate girder bridge, out-plane local vibration of the plate girder should occur on the bridge by periodic force. Such kind of vibration will become the source of structural noises and will cause fatigue failure at the joined parts. It is concerned with the dynamic instability problem of thin walled I-shaped cross section beams. Up to now, the problem has always been investigated by the way in which the web has been treated as an independent thin-walled plate. In our research, the influence of the flange is considerable. As such, it must be included in the calculation. Higher order finite strip method, harmonic balance method and Newmark's β method has been applied in the present research to find out the instability regions and thier characteristics.

KeyWords: I-shaped cross section, local vibration, dynamic instability,
higher order finite strip method

1. はじめに

プレートガーダー橋には、列車荷重のような動的荷重が作用すると、けた全体としての鉛直曲げ振動や曲げねじり振動が発生するばかりでなく、プレートガーダーを構成するフランジやウェブに、しばしば局部的な面外振動が卓越することが知られている。この局部振動は、構造騒音の放射源となったり、フランジとウェブを接合する溶接部の疲労破壊の原因となるなど、種々の不都合をもたらすものである。したがって、この局部振動を抑制する効果的な方策を案出することは、工学上重要な課題といえる。

そこで、この局部振動の発生メカニズムと特性を解明することがまず必要となる。そのための解析手法としては、種々のアプローチが考えられるが、外力の周期性に起因する動的不安定問題として捉えるのも一つの方法である。平板や薄肉断面はりの動的不安定問題については過去多数の研究者によって手掛けられてきた^{1),2)}。しかしながら薄肉ばりの場合は、そのほとんどが断面形不変の仮定に基づいた解析にとどまっている³⁾。

前述のような局部振動の動的不安定問題に関しては、

高橋ら⁴⁾及び倉西ら⁵⁾の研究が挙げられる。両者とも、ウェブの一部を取り出し、四辺の境界条件をヒンジ又は固定とする独立した長方形板モデルに置き換え、周期的面内曲げに伴って発生する面外曲げ振動の不安定現象として解析している。前者は振動次数の和が奇数の結合共振が支配的であることなど、不安定領域の諸特性を明らかにしており、後者は初期変形と振動応答の不安定性との関係を究明している。

本研究は、周期的な曲げを受ける単純支持の薄肉鋼 I 形断面はりにおいて、フランジ及びウェブに局部的に発生する面外曲げ振動の不安定性を解明しようとするものである。解析には高次有限帯板要素法⁶⁾を用い、フランジとウェブの相互連成作用を検討する意味あいからも、はり全体を一括して解析対象とする。

具体的には、局部振動の不安定性の解析に先立ち、その基礎となる局部振動の固有振動特性及び純曲げによる局部座屈特性、とりわけ局部変形モード特性について精査する。それらの成果を踏まえて、局部振動の不安定領域を解析し、不安定性に係わる諸因子の影響度合いも明らかにする。

2. 解析モデルと解析方法

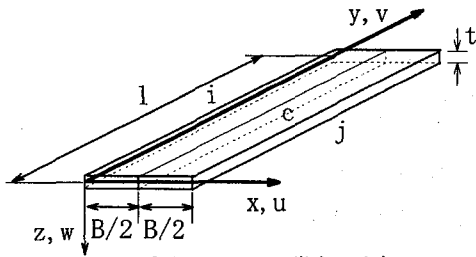


図-1 H03帯板要素

解析には、図-1に示すような有限帯板要素法の高次帯板要素⁷⁾ (H03モデル)を用いる。長さ l 、幅 B 、板厚 t 、はり軸方向の両端を境界節線 i, j 、中央を補助節線 c とする。両端単純支持の場合、変位の軸方向の変化を $Fourier$ 級数で近似すれば、ある帯板要素内任意点の x, y, z 軸方向の変位成分 u, v, w は次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} \langle N_p \rangle \sin k_m y & 0 & 0 \\ 0 & \langle N_p \rangle \cos k_m y & 0 \\ 0 & 0 & \langle N_b \rangle \sin k_m y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{Bmatrix} \quad \dots (1)$$

ここに、 r は $Fourier$ 級数の採用項数であり、 $k_m = m\pi/l$ である。 $\langle N_p \rangle$ 、 $\langle N_b \rangle$ は形状関数で、 $\eta = x/B$ とすると以下のように表される。

$$\langle N_p \rangle = \begin{pmatrix} 1-3\eta+2\eta^2 & 4\eta-4\eta^2 & -\eta+2\eta^2 \end{pmatrix} \quad \dots (2)$$

$$\langle N_b \rangle = \begin{pmatrix} 1-23\eta^2+66\eta^3-68\eta^4+24\eta^5 \\ x(1-6\eta+13\eta^2-12\eta^3+4\eta^4) \\ 16(\eta^2-2\eta^3+\eta^4) \\ 8x(-\eta+4\eta^2-5\eta^3+2\eta^4) \\ 7\eta^2-34\eta^3+52\eta^4-24\eta^5 \\ x(-\eta+5\eta^2-8\eta^3+4\eta^4) \end{pmatrix}^T \quad \dots (3)$$

また、 $\{U_m\}$ 、 $\{V_m\}$ 、 $\{W_m\}$ は $Fourier$ 級数の第 m 項に対する節線 i, c, j の節線変位ベクトルであり、時刻 t に関して次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \{U_m(t)\} \\ \{V_m(t)\} \\ \{W_m(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i,m}(t) & v_{i,m}(t) & w_{i,m}(t) & \theta_{i,m}(t) & u_{c,m}(t) & v_{c,m}(t) \\ w_{c,m}(t) & \theta_{c,m}(t) & u_{j,m}(t) & v_{j,m}(t) & w_{j,m}(t) & \theta_{j,m}(t) \end{pmatrix}^T \quad \dots (4)$$

式(1)の変位場を仮想仕事原理に適用すれば、帯板要素に対する運動方程式が求められる。これらの局所座標系に関する各マトリクスを全体座標系に関する量に変換し、

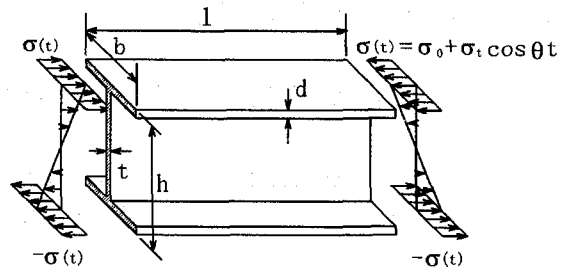


図-2 解析モデル立体図

変位の適合条件と力の釣り合い条件に従ってすべての帯板要素について重ね合わせることで、薄肉はりに対する運動方程式を求めることができる。

運動方程式は式(1)に含まれる $Fourier$ 級数の直交性により各項ごとに独立した方程式に分解される。結局、第 m 項に対応する運動方程式は、変位速度に比例する減衰項を加えて、次のように表される⁸⁾。

$$[M_m]\{\ddot{d}_m(t)\} + [C_m]\{\dot{d}_m(t)\} + [K_m]\{d_m(t)\} = \{F_m(t)\} \quad \dots (5)$$

ここで、 $[M_m]$ 、 $[C_m]$ 、 $[K_m]$ は順に質量、減衰、剛性のマトリクスであり、 $\{F_m(t)\}$ は外荷重ベクトル、 $\{d_m(t)\}$ 、 $\{\dot{d}_m(t)\}$ 、 $\{\ddot{d}_m(t)\}$ はそれぞれ有限集合体の節線の変位ベクトル、速度ベクトル、加速度ベクトルである。

減衰マトリクスについては、次式を用いる⁹⁾。

$$[C_m] = [M_m] \left(\sum_{n=1}^N \frac{2\xi_n \omega_n}{M_n} \{\Phi\}_n \{\Phi\}_n^T \right) [M_m] \quad \dots (6)$$

ここに、 N は固有振動モード総数、 $\{\Phi\}_n$ 、 ω_n 、 ξ_n はそれぞれ第 n 次固有振動モードに対応している固有マトリクス、固有円振動数と減衰定数であり、

$$M_n = \{\Phi\}_n^T [M_m] \{\Phi\}_n$$

$y=0 \sim l$ のはりの両端に図-2モデルのように静的応力 σ_0 と周期的に変動応力 $\sigma_1 \cos \theta t$ (θ : 励振円振動数)の和からなる応力 $\sigma(t)$ が作用すると、安定を失った直後のはりの運動方程式は微小変形理論に基づき式(5)を書き換えて次のようになる。

$$[M_m]\{\ddot{d}_m(t)\} + [C_m]\{\dot{d}_m(t)\} + ([K_m] - \sigma(t)[K_{Gm}])\{d_m(t)\} = 0 \quad \dots (7)$$

ここに、 $[K_{Gm}]$ は $\sigma(t)$ の断面内分布を考慮した幾何剛性マトリクスである。

式(7)の減衰項と応力項をゼロとおくことにより局部振動の固有方程式が得られる。また、局部座屈を解析する方程式は、式(7)の減衰項と慣性力項と変動応力項を無視

することにより得られる。式(7)の解を次のように仮定する。

$$\{d_m(t)\} = e^{\lambda t} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{a}_k \sin k\theta t + \mathbf{b}_k \cos k\theta t) \right\} \quad \dots(8)$$

ここに、 λ は未定定数、 $\mathbf{b}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$ は時間に無関係な定数ベクトルである。式(8)を式(7)に代入し、調和バランス法を適用すれば、次のような同次方程式系が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[[M_m] \lambda^2 + \lambda [C_m] + [K_m] - \sigma_0 [K_{Gm}] \right] \mathbf{b}_0 - \sigma_1 [K_{Gm}] \mathbf{b}_1 = 0 \\ & \left[(\lambda^2 - k^2 \theta^2) [M_m] + \lambda [C_m] + [K_m] - \sigma_0 [K_{Gm}] \right] \mathbf{a}_k \\ & - k \theta (2\lambda [M_m] + [C_m]) \mathbf{b}_k - \frac{1}{2} \sigma_1 [K_{Gm}] (\mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_{k+1}) = 0 \end{aligned} \quad \dots(9)$$

式(9)は、 λ を含む係数行列 $[D]$ と $\mathbf{b}_0, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$ ($k=1, 2, \dots, \infty$)からなるベクトル $\{X\}$ で次のように表される。

$$[D]\{X\} = \{0\} \quad \dots(10)$$

ここに

$$[D] = [A_0] - \lambda [A_1] - \lambda^2 [A_2] \quad \dots(11)$$

$$\{X\} = \langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \rangle^T \quad \dots(12)$$

式(11)の $[A_0], [A_1], [A_2]$ については $k=3$ までの場合を末尾の補遺に示す。

ここで、新しいベクトル $\{Y\} = \lambda \{X\}$ を導入すれば、式(7)は次式のような2倍サイズの固有値問題に変換される¹⁰⁾。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [A_2]^{-1}[A_0] & -[A_2]^{-1}[A_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad \dots(13)$$

式(13)から得られた固有値 λ の実数部 $R_r(\lambda)$ の値がすべて負、あるいはゼロならば、式(7)の一般解に含まれる $e^{\lambda t}$ が発散しないために振動安定、逆に一つでも正ならば $e^{\lambda t}$ が発散するために振動不安定となる。これらの判定を適用することにより、局部振動の不安定領域が確定される。

3. 固有振動解析と座屈解析

3.1 解析モデルの断面寸法と要素分割

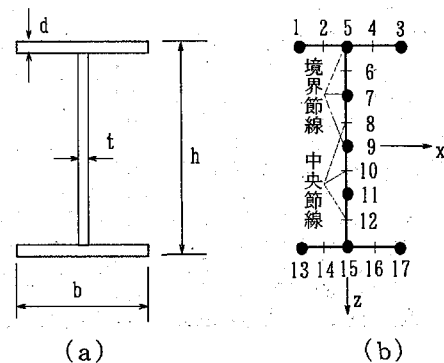


図-3 断面寸法と要素分割

I形はりの断面寸法を図-3の(a)に示す。図-3の(b)はモデルの要素分割断面図である。帯板要素は上フランジ2要素、下フランジ2要素、腹板4要素の計8要素、節線数17とし、丸点が境界節線、短線が中間補助節線を示す。

フランジ幅の広さによって、はりの断面は Type I, Type IIと Type IIIの3つのタイプとする。すべてのタイプにおいて、高さ $h=30\text{cm}$ 、フランジ厚 $d=h/30$ 、腹板 $t=h/30$ とし、Type Iははり断面の幅 $b=h/3$ 、Type IIははり断面の幅 $b=h/2$ 、Type IIIははり断面の幅 $b=2h/3$ とした。また、両端単純支持とし、半波長 $L=l/m$ 、材料定数は、ヤング定数 $E=206\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、単位質量 $\rho=0.784 \times 10^4 \text{kg/m}^3$ とする。

3.2 H03 モデルにおける解析の精度

本解析モデルの解析精度を把握するため、辺長 $l=100\text{cm}$ 、板厚 $t=0.5\text{cm}$ 、単位質量 $\rho=0.802 \times 10^4 \text{kg/m}^3$ の全辺単純支持正方形板モデルについて、有限帯板要素法の高次モデル(H03)、有限帯板要素法の低次モデル(L02)で計算した結果、および平板

表-1 L02, H03 モデルによる正方形板の固有円振動数 ω 単位:rad/sec

分割 モード	要素数				平 板 理論値
	H03	LO2			
	8	8	16	25	
(1, 1)	152. 831	152. 831	152. 831	152. 831	152. 831
(2, 1)	382. 077	382. 077	382. 077	382. 077	382. 077
(1, 2)	382. 077	382. 141	382. 081	382. 078	382. 077
(2, 2)	611. 323	611. 364	611. 326	611. 324	611. 323
(3, 1)	764. 154	764. 154	764. 154	764. 154	764. 154
(1, 3)	764. 154	764. 965	764. 205	764. 163	764. 154
(3, 2)	993. 400	993. 426	993. 402	993. 400	993. 400
(2, 3)	993. 400	993. 029	993. 440	993. 407	993. 400
(4, 1)	1299. 062	1299. 060	1299. 060	1299. 060	1299. 062
(1, 4)	1299. 063	1303. 630	1299. 360	1299. 110	1299. 062
(3, 3)	1375. 477	1375. 950	1375. 510	1375. 480	1375. 477
(4, 2)	1528. 308	1528. 330	1528. 310	1528. 310	1528. 308
(2, 4)	1528. 309	1532. 260	1528. 560	1528. 350	1528. 308

表-2 LO2,HO3モデルによるI形はりの
固有円振動数 ω 単位:rad/sec

分割 次数	要素数					
	LO2				HO3	
	8	16	24	32	40	8
1	801.139	800.860	800.860	800.826	800.823	800.821
2	1363.284	1362.588	1362.540	1362.530	1362.527	1362.53
3	1409.484	1408.558	1408.499	1408.489	1408.486	1408.48
4	1944.522	1940.605	1940.882	1940.541	1940.518	1940.51
5	2037.078	2035.398	2035.505	2035.378	2035.371	2035.37
6	2295.234	2292.065	2292.261	2292.031	2292.021	2292.02
7	2654.836	2648.348	2648.735	2648.279	2648.259	2648.25
8	2948.057	2945.000	2944.770	2944.727	2944.714	2944.72
9	3429.988	3419.656	3416.804	3416.039	3415.726	3415.59
10	3450.624	3423.666	3423.235	3423.158	3423.136	3423.13
11	3779.487	3767.399	3766.590	3766.447	3766.407	3766.38
12	3974.372	3943.260	3941.407	3941.071	3940.971	3940.96

理論での計算値の比較を行った。その結果を表-1に示す。モード(m,n)は、板の荷重方向の半波数 m 、それと直角方向の半波数 n を意味する。LO2モデルでは要素数8,16,25,HO3モデルでは要素数8の結果を示す。LO2モデルでの要素数25の結果より、HO3モデルでの要素数8の方が、平板理論値に近く、十分な精度の結果が得られている。

次に、図-2に示した基本的な解析モデルにおいて、I形断面はりの高さは $h=30\text{cm}$ 、幅 $b=h/2$ 、フランジ厚 $d=1.5h/100$ 、腹板 $t=h/100$ 、半波長 $L=2h$ 、 $m=1$ としたときの両端単純支持 I形薄肉断面はりの固有振動数を、HO3モデルとLO2モデルを用いて計算した。LO2モデルで要素分割数を8,16,24,32,40とした場合、およびHO3モデルで要素分割数を8とした場合の計算結果を表-2に比較して示す。HO3モデルの8要素分割での計算結果は、LO2モデル40要素分割での計算結果とほぼ一致している。このことより、LO2モデルよりHO3モデルの方が精度がよいといえる。以上より、ここではHO3モデルを採用する。

3.3 固有振動解析

固有振動は、動的不安定領域と密接に関連しているため、その基本的な性状を把握することは重要である。解析においては、固有振動数、固有振動数と半波長の関係、あるいは固有振動数に対応している固有振動モードに着目した。

まず、I形断面はりの固有円振動数を求める。表-3は、 $L/h=1$ 時のType I, II, IIIの第6次までの断面変形モードおよび第*i*次固有円振動数 ω_i を示す。

Type Iは第1,3,5次モードが弱軸回りの曲げ振動、第2,4,6次モードが曲げねじり振動である。Type II, IIIのそれぞれの振動パターンは、第1,3次モードが弱軸回りの曲げ振動、第2,6次モードが曲げねじり振動、第4次モードが強軸回りの曲げ振動、第5次モードが縦振動である。Type IIとType IIIの各次数ごとの変形モードはよく似ているが、Type Iの変形モードは第4次からType II, IIIとは一致していない。

表-3 タイプ別の固有振動モードと

固有振動数 ω_i ($L/h=1$)

次数	1	2	3	4	5	6
Type I						
ω_i	3715	7697	11163	11603	12141	16314
Type II						
ω_i	3728	5989	7280	10537	10813	11089
Type III						
ω_i	3544	4534	5639	6751	6827	10759

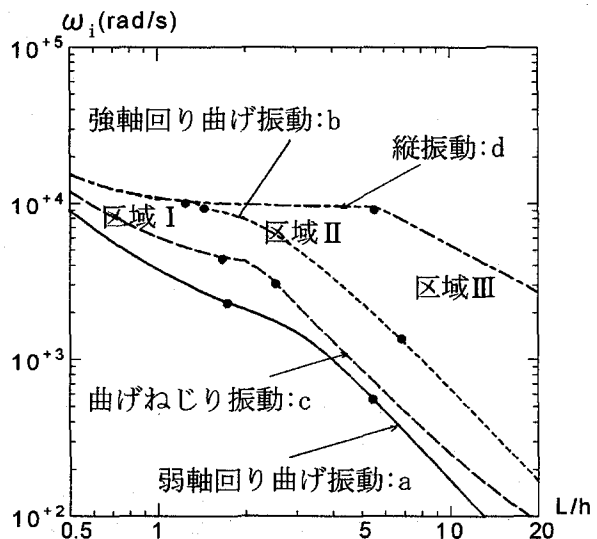


図-4 固有円振動数と半波長の関係 (Type II)

図-4は、Type IIのパターン別最低次固有円振動数と無次元半波長の関係図である。縦軸は第*i*次固有円振動数 ω_i 、横軸は半波長 L と桁高 h の比で、両対数目盛で表示している。実線が弱軸回りの曲げ振動(曲線a)、点線が強軸回りの曲げ振動(曲線b)、鎖線がねじり振動(曲線c)、一点鎖線が縦振動(d)の各最低次曲線を表し、“●”は各曲線の変曲点を表す。曲線上の相隣る3点から曲線の凹凸を判断し、変曲点を推定した。各曲線は2つの変曲点を持っているので、左側の変曲点より左側は区域Iとし、二つの変曲点の間は区域IIとし、右側の変曲点より右側は区域IIIとする。

表-4 図-4の各区域における振動モード (Type II)

	区域 I	区域 II	区域 III
a			
b			
c			
d			

表-4は、図-4に示した各曲線の各区域の振動変形モードを表す。変曲点の両側で変形が異なり、各曲線の区域 I は局所的な変形であり、区域 III は全体的な変形であり、区域 II は局所的な変形と全体的な変形両方の変形特徴を持っている。半波長が長くなると、変形が局所的な変形から全体的な変形に移行することがわかる。

3.4 純曲げによる局部座屈の解析

純曲げによる局部座屈の解析も固有振動解析と同様に行った。表-5は、Type I, II, IIIの小さい順から第6次までの座屈値 (σ_{cr}/E) および座屈断面変形モードを示したものである。座屈断面変形モードは固有振動断面変形モードとは異なり、圧縮側フランジの変形が大きい。

表-5 タイプ別の座屈モードと

無次元座屈値 σ_{cr}/E ($L/h=1$)

次数	1	2	3	4	5	6
Type I						
σ_{cr}/E	0.021	0.048	0.108	0.144	0.697	0.724
Type II						
σ_{cr}/E	0.012	0.040	0.053	0.118	0.470	0.562
Type III						
σ_{cr}/E	0.007	0.016	0.051	0.153	0.279	0.292

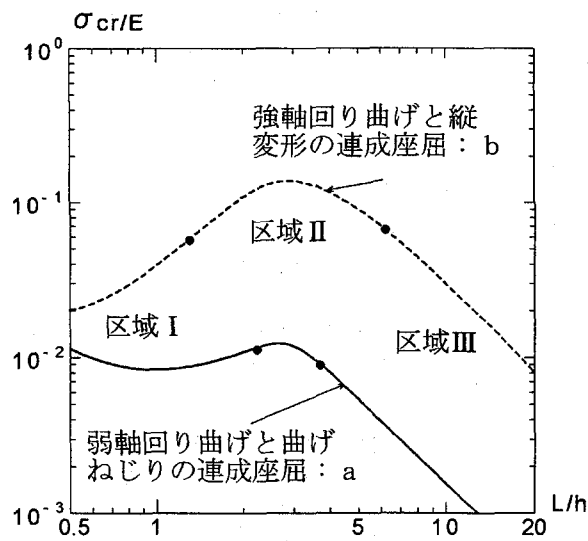


図-5 座屈応力と半波長の関係 (Type II)

表-6 図-5の各区域における座屈モード (Type II)

	区域 I	区域 II	区域 III
a			
b			

図-5は、Type IIのパターン別の座屈応力と半波長の関係図である。縦軸は座屈応力とヤング率の比 σ_{cr}/E 、横軸は半波長 L と桁高 h の比で、両対数目盛で表示している。実線が弱軸回りの曲げと曲げねじりの連成座屈曲線 (曲線 a)、点線が強軸回りの曲げと縦変形の連成座屈曲線 (曲線 b) の各連成座屈パターンの最小値を表す。

“●”は変曲点を表す。図-4と同じように各曲線は2つの変曲点を持ち、3つの区域に分けることができる。

表-6は図-5に示す各曲線の各区域の座屈断面変形モードを表す。振動曲線の変曲点場合と同じように座屈曲線の変曲点に対する両側での断面変形も異なる。半波長が長くなると、断面変形が局所的な変形から全体的な変形に移行していく。

4. 動的不安定領域と動的応答計算

4.1 動的不安定領域の解析

以下の解析は次の条件で行った。両端単純支持の薄肉ばりに、外力としては純曲げを作用させ、静的応力 $\sigma_0=0$ 、周期応力の最大値 σ_t は、最低座屈応力 σ_{cr} の0.5倍とし、

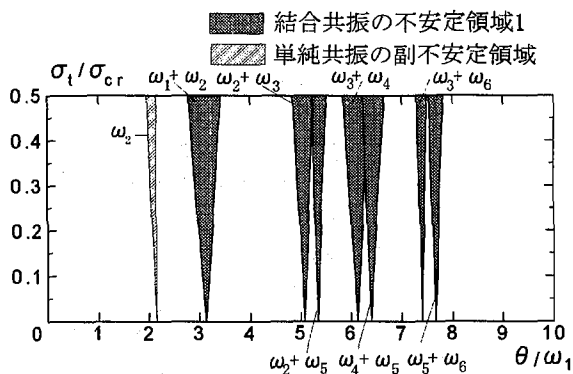
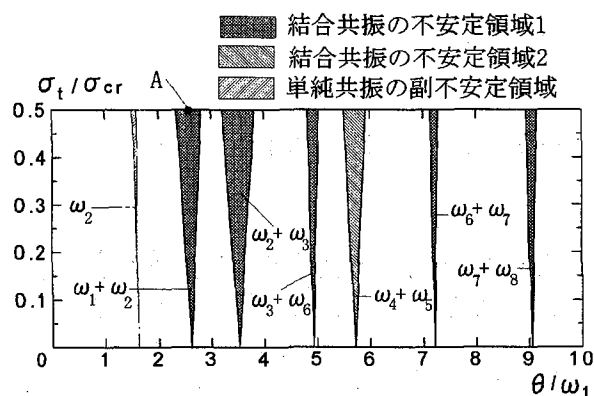
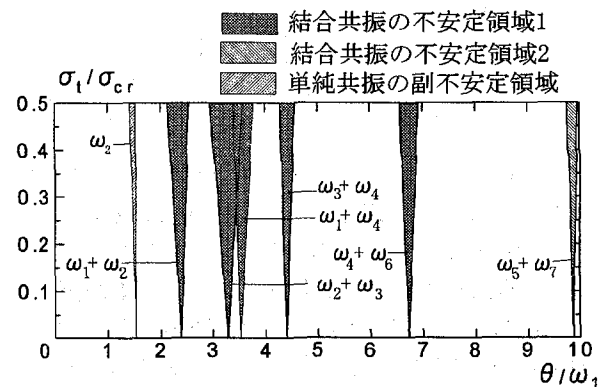


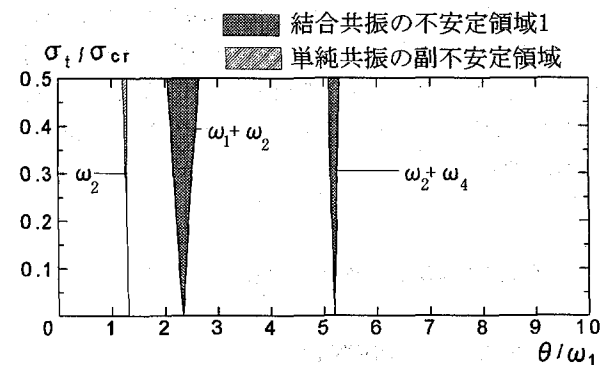
図-6 Type I ($b/h=1/3$), $L/h=1$ の不安定領域



(a) $L/h=1$ の場合



(b) $L/h=3$ の場合



(c) $L/h=6$ の場合

図-7 Type II ($b/h=1/2$)の不安定領域

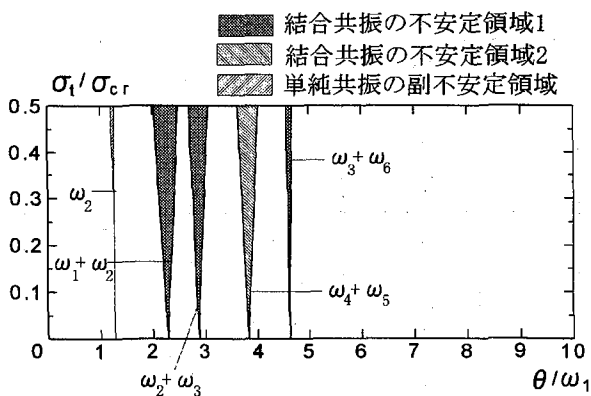


図-8 Type III ($b/h=2/3$), $L/h=1$ の不安定領域

半波数 $m=1$ とする。計算の手法としては、 σ_t / σ_{cr} を固定し、 θ / ω_1 を 0.01 刻みで変化させ、2. の式(13)を用いて、各点の安定性を判断する。式(8)の項数 $k=1$ とする。図には、 $\sigma_t = 0.5\sigma_{cr}$ での不安定領域の幅が 0.1 以上のものを表示し、幅が 0.1 以下のものは省略する。ここでは減衰を考慮していない。

図-6~8に、不安定領域の計算結果の一部を示す。縦軸は周期応力と最低座屈応力の比 σ_t / σ_{cr} であり、横軸は加振振動数 θ と第1次固有円振動数 ω_1 の比 θ / ω_1 である。塗った部分が不安定領域を表す。通常の場合には式(13)から得られた λ の実数部 $R_e(\lambda)$ の値がゼロを境界値とする。 λ が急激に変化する特別の場合は λ の実数部 $R_e(\lambda)$ の負の最小値を境界値とする。

加振振動数 θ 、第 i 次の固有円振動数 ω_i に対して、単純共振は $\theta = 2\omega_i / k$ ($k=1, 2, \dots$) を中心とする不安定領域であり、結合共振は $\theta = (\omega_i \pm \omega_j) / k$ ($k=1, 2, \dots$) を中心とする不安定領域である。 $k=1$ のときを主不安定領域、 $k \neq 1$ のときを副不安定領域といい、図中の $2\omega_i / k$ および $(\omega_i \pm \omega_j) / k$ は、対応する不安定領域を表している。

表-7(a), (b), (c) はそれぞれ半波長 $L/h=1$ とした場合、次数の小さい順から 10 までの Type I, Type II と Type III の無次元固有振動数 $\bar{\omega} = \omega_i / \omega_1$ とこの固有振動数に対応する振動パターンを示す。

表-7を参照すれば、図-6~8において、左下がりの斜線を施した部分は単純共振の副不安定領域であることがわかる。単純共振の主不安定領域は現れていない。これは、純曲げの振動数が断面変形の振動数の2倍の場合、そのときの断面変形は固有振動モードとは一致しないためである。また、交斜線を施した部分は弱軸回りの曲げと曲げねじりの結合共振の主不安定領域 1、右下がりの斜線を施した部分は強軸回りの曲げ振動と縦変形の結合共振の主不安定領域 2であることがわかる。結合共振の主不安定領域が卓越している。これらの結合共振の断面変形は、3. 4の図-5に示した2種の連成座屈モードと一致している。それら以外の組合せの結合共振の不安定領域は存在しない。

表-7 Type I, II, IIIの固有振動数 ω ,
最小座屈応力 σ_{cr}/E , 振動パターン
(a) Type I ($b/h=1/3$), $L/h=1$

Type	I	
次数	ω_i/ω_1	振動パターン
1	1.000	弱軸回りの曲げ振動
2	2.072	曲げねじり振動
3	3.005	弱軸回りの曲げ振動
4	3.123	曲げねじり振動
5	3.268	弱軸回りの曲げ振動
6	4.392	曲げねじり振動
7	5.022	強軸回りの曲げ振動
8	5.650	縦振動
9	6.519	弱軸回りの曲げ振動
10	8.686	強軸回りの曲げ振動
ω_1	3714.8	
σ_{cr}/E	0.021	

(b) Type II ($b/h=1/2$), $L/h=1$

Type	II	
次数	ω_i/ω_1	振動パターン
1	1.000	弱軸回りの曲げ振動
2	1.606	曲げねじり振動
3	1.953	弱軸回りの曲げ振動
4	2.827	強軸回りの曲げ振動
5	2.901	縦振動
6	2.975	曲げねじり振動
7	4.241	弱軸回りの曲げ振動
8	4.810	曲げねじり振動
9	6.168	弱軸回りの曲げ振動
10	7.149	強軸回りの曲げ振動
ω_1	3727.5	
σ_{cr}/E	0.012	

(c) Type III ($b/h=2/3$), $L/h=1$

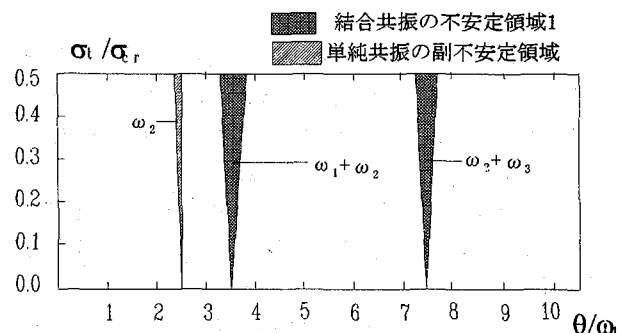
Type	III	
次数	ω_i/ω_1	振動パターン
1	1.000	弱軸回りの曲げ振動
2	1.279	曲げねじり振動
3	1.591	弱軸回りの曲げ振動
4	1.905	強軸回りの曲げ振動
5	1.927	縦振動
6	3.036	曲げねじり振動
7	5.006	弱軸回りの曲げ振動
8	5.808	曲げねじり振動
9	6.443	弱軸回りの曲げ振動
10	6.723	強軸回りの曲げ振動
ω_1	3544.1	
σ_{cr}/E	0.007	

4.2 ウェブを独立の鋼板とした場合との比較

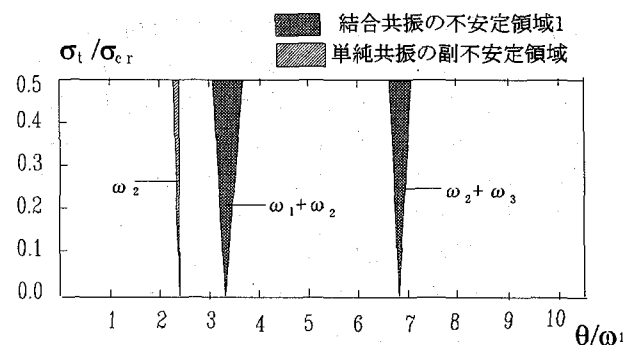
従来の長方形板モデルと本解析モデルの結果と比較するため、図-2に示す解析モデルのウェブをそのまま取り出し、フランジとウェブの接合縁を単純支持(支持条件I)あるいは固定(支持条件II)とし、また、長さ $l=h$ とした。これらのモデルについて、半波数 $m=1$ 、次数4まで鋼板の ω と σ_{cr}/E を表-8に示す。

表-8 板の無次元固有振動数 ω と
無次元最低座屈応力 σ_{cr}/E

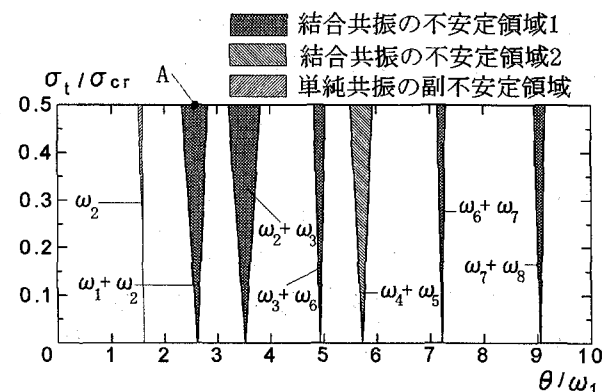
支持条件	I	II
次数		
1	1.000	1.000
2	2.500	2.395
3	5.000	4.459
4	8.502	7.201
5	9.827	9.437
ω_1	3402.1	4989.8
σ_{cr}/E	0.0272287	0.066621



(a) 支持条件 I の独立腹板 ($h \times h$) の不安定領域



(b) 支持条件 II の独立腹板 ($h \times h$) の不安定領域



(c) $b/h=1/2$ のフランジをもつ場合
($L/h=1$) の不安定領域

図-9 独立腹板の不安定領域とフランジ
をもつ場合との比較

図-9 (a), (b) は支持条件 I と支持条件 II の面内曲げを受ける場合の面外振動による不安定領域、図-9 (c) はフランジを考慮した場合の I 形断面はり (Type II) の不安定領域を表す。これらを比較すると、I 形断面はりとして計算した結果と板として計算した結果にはかなりの差が見られる。

従来 I 形はりの不安定問題は腹板だけに注目されてきたが、フランジを考慮した場合は、フランジの曲げ変形が卓越する縦変形と強軸回りの曲げとの結合共振 ($\omega_4 + \omega_5$) が広い不安定領域を示している。また、フランジを無視すると不安定領域の現れる位置関係も異なっている。

4.3 結合共振の動的応答

結合共振時の挙動を明らかにするため、部材が微小な初期変位を有することと仮定して、ニューマークの β 法を用いて、動的応答を求めた。ここで、周期応力の最大値は座屈応力の 0.5 倍とし、初期変形モードは固有振動モードに対応させ、初期たわみの最大値は、スパン長の $1/750$ とした。ただし、たわみの最大値は節線上であると仮定する。

図-10 は、結合共振の動的応答図で、Type II ($L/h=1$) において、 $\theta/\omega_1=2.6$ (図-9 (c) の測点 A) のときの応答を示したものである。横軸は最低固有振動数 ω_1 の周期を基準とした無次元時間、縦軸は最低次の断面変形モードにおける初期変位量の最大値を基準とした無次元変位である。これは、弱軸回りの曲げと曲げねじりの結合共振による不安定領域に対応している。点線、実線、鎖線、1 点鎖線はそれぞれ初期変位として第 1, 2, 3, 6 次の断面変形モードを入れた変位応答を示している。4 つの曲線は無次元時間と共に発散し、結合した 2 つの固有振動モード中の 1 つを初期断面変形モードとして入れた場合は発散の速度が速くなっている。

表-9 は、図-10 において、初期変位として第 1 次の断面変形モードを入力した場合の、時間による断面変化を示したものである。時間の経過とともに、上下フランジの変化が交互に大きくなっている。

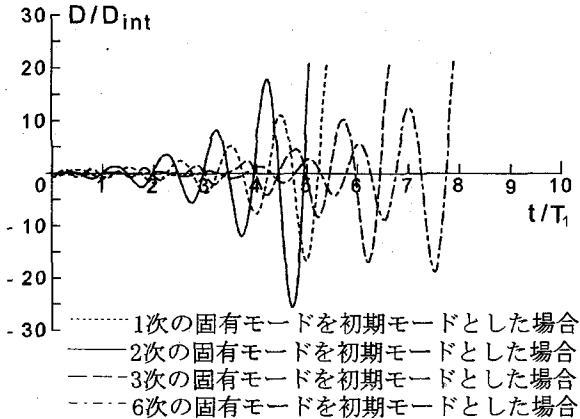


図-10 測点 A の動的応答図 (初期モード 1, 2, 3, 6)

表-9 Type II の初期変位として 1 次の固有振動モードを入れた場合の振動変形の時間暦 ($L/h=1$)

振動変形						
t/T_1	3.10	3.20	3.30	3.40	3.45	3.50
振動変形						
t/T_1	3.55	3.65	3.70	3.73	3.75	3.83

4.4 減衰を考慮した場合の計算結果

減衰を考慮した Type II ($b/h=1/2$), $L/h=1$ の場合の不安定領域を、図-11 に示す。縦軸は最大応力と座屈応力の比、横軸は励振振動数と最低固有振動数の比を表

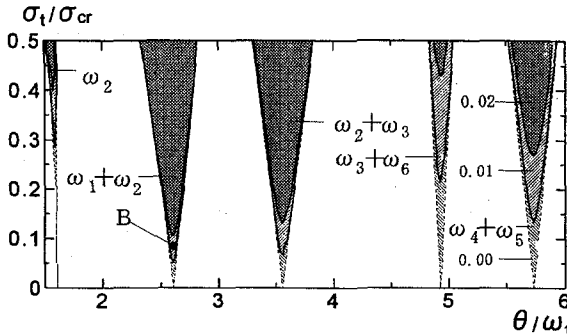


図-11 減衰を考慮した Type II ($b/h=1/2$), $L/h=1$ の場合の不安定領域

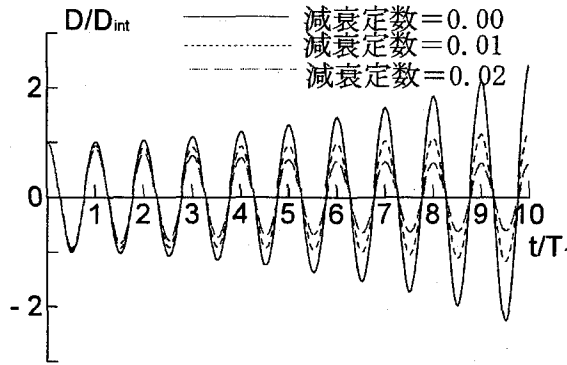


図-12 減衰振動応答図 (測点 B)

す。図には、減衰定数は 0.01 と 0.02 とした場合の結果と減衰を無視した場合の結果を示す。

図-12 は、Type II ($b/h=1/2$), $L/h=1$ の場合において、 $\sigma_t/\sigma_{cr}=0.10$, $\theta/\omega_1=2.606$ のとき (図-11, B 点) の時間暦の応答である。これは、第 1 次断面変形モードに対応している初期変位を入れた場合のスパン中央断面の図心における応答を示している。減衰定数が 0.02 に対応する変形曲線は発散しないが、減衰定数が

0.00, 0.01とに対応する変形曲線は発散している。また、減衰定数0.01の場合は、非常にゆっくりとした発散となっている。

5. まとめ

本研究は、周期的な曲げを受ける単純支持の薄肉鋼 I 形断面はりにおいて、フランジ及びウェブに局部的に発生する面外曲げ振動（局部振動）の不安定特性を明らかにしたものである。その際、フランジとウェブの相互連成作用の解明に意を注ぐとともに、不安定問題解析の基礎となる局部振動の固有振動特性及び純曲げによる局部座屈特性、とりわけ局部変形モード特性についても精査した。それらの結果をまとめると、おおむね次のようである。

1) 薄肉鋼 I 形断面はりの局部振動の固有振動数と半波長の関係を表す固有振動曲線は、いくつかの変曲点を持ち、その変曲点を境に局部変形モードは変化することが分かった。また、 L/h （半波長/ウェブ高）に対応する局部変形モードの特性を把握できた。

2) 純曲げによる薄肉鋼 I 形断面はりの局部座屈を解析した結果、弱軸回りの曲げと曲げねじりの連成した局部座屈に加えて、強軸回りの曲げと縦方向変形の連成した局部座屈が確認された。それぞれについて、2)の場合と同様に、座屈曲線および対応する局部変形モードの特性を把握できた。

3) 周期的純曲げを受ける薄肉鋼 I 形断面はりの代表的ケースについて、局部振動の不安定領域を算定した結果、静的荷重の作用がない場合、出現する不安定領域は単純共振の副不安定領域と結合共振の主不安定領域であることが確認された。単純共振の主不安定領域は現れない。結合共振の副不安定領域の幅は、無視できるほど狭い。

4) 結合共振の主不安定領域は、弱軸回りの曲げと曲げねじりの結合共振および強軸回りの曲げと縦方向変形の結合共振に限定され、これらは 2)の連成局部座屈に対応していることが分かった。各種不安定領域のうち、これら結合共振の主不安定領域が支配的なものである。

5) 薄肉鋼 I 形断面はりからウェブを取り出し、フランジとの接合縁をヒンジ又は固定とする独立した鋼板の面外振動の不安定領域は、フランジとの連成を考慮した本研究の結果とは差があることが確認された。圧縮フランジの面外への不安定性挙動を単純な境界条件で評価することの是非にかかわる問題と思われる。

6) 結合共振の主不安定領域内の点に対応する場合について、局部振動の応答計算を行い、設定する初期変形と振動の発散性の有無、発散速度などとの関係が確認された。また、減衰が局部振動の不安定現象に及ぼす影響についても、若干の特性を把握できた。

補 遺

$$[A_0] = \begin{bmatrix} B_{00} & D_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_0 & B_{11} & D_0 & 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_0 & B_{22} & D_0 & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_0 & B_{33} & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & -B_1 & 0 & 0 & B_{11} & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_2 & 0 & D_0 & B_{22} & D_0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_3 & 0 & D_0 & B_{33} \end{bmatrix}$$

ここに

$$\begin{aligned} B_{00} &= \frac{1}{2}([K_m] - \sigma_0[K_{Gm}]) \\ B_{11} &= -\theta^2[M_m] + [K_m] - \sigma_0[K_{Gm}] \\ B_{22} &= -4\theta^2[M_m] + [K_m] - \sigma_0[K_{Gm}] \\ B_{33} &= -9\theta^2[M_m] + [K_m] - \sigma_0[K_{Gm}] \\ B_1 &= \theta[C_m], \quad B_2 = 2\theta[C_m], \quad B_3 = 3\theta[C_m] \\ D_0 &= -\frac{1}{2}\sigma_t[K_{Gm}] \end{aligned}$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[C_m] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[C_m] & 0 & 0 & -2\theta[M_m] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[C_m] & 0 & 0 & -4\theta[M_m] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[C_m] & 0 & 0 & -6\theta[M_m] \\ 0 & 2\theta[M_m] & 0 & 0 & -[C_m] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\theta[M_m] & 0 & 0 & -[C_m] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\theta[M_m] & 0 & 0 & -[C_m] \end{bmatrix}$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[M_m] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[M_m] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[M_m] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[M_m] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -[M_m] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[M_m] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[M_m] \end{bmatrix}$$

参考文献

- 1) 八巻昇, 永井健一: 周期的な圧縮荷重を受ける矩形板の動的安定, 東北大学高速力学研究所報告, 第36巻, 第351号 pp.147~168, 1975.
- 2) Hutt, J.M. and Salam, A.E.: Dynamic Stability of

- Plates by Finite Elements, Proc. of ASCE., Vol. 97-EM3, pp.879-899, 1971.
- 3) Bolotin, V.V.: 弾性系の動的安定, コロナ社, 1972.
 - 4) 高橋和雄, 田川賢, 池田虎彦, 松川徹: 面内曲げを受ける長方形板の動的安定性, 土木学会論文報告集, 第341号, pp.179~186, 1984.
 - 5) Kuranishi, S., Fukaya, S. and Shima, T.: Vibration of An Initially Deflected Web Plate under Periodic Beam Bending, Proc. of JSCE, No.341, pp.229~232, 1984.
 - 6) Cheung, Y.K.: Finite Strip Method in Structural Analysis, PERGAMON PRESS, 1976.
 - 7) Loo, Y.: The Finite Strip Method in Bridge Engineering, CEMENT AND CONCRETE ASSOCIATION, 1978.
 - 8) Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method, TATA MCGRAW-HILL PUBLISHING CO. LTD., 1979.
 - 9) Paz, M.: Structural Dynamics, VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY, 1985.
 - 10) Takahashi, K.: An Approach to Investigate the Instability of the Multiple-degree-of-freedom Parametric Dynamic Systems, Journal of Sound and Vibration, vol.78, pp.519~529, 1981.

(1996年9月6日受付)