

面内一様圧縮力を受ける弾性基礎上平板の後座屈挙動

POST BUCKLING BEHAVIOR OF A FLAT PLATE ON ELASTIC FOUNDATION
UNDER IN-PLANE COMPRESSION

中沢 正利*・香川 仁志**・岩熊 哲夫***

Masatoshi NAKAZAWA, Hitoshi Kagawa and Tetsuo IWAKUMA

*正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科 (〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)

**正会員 修士(工学) 日本道路公団静岡建設局富士工事事務所 (〒417 富士市伝法字大原 170-1)

***正会員 Ph.D. 東北大学教授 工学部土木工学科

The purpose of this study is to investigate the post buckling behavior of a plate on both linear(Winkler) and nonlinear elastic foundation under uniform in-plane compression. The nonlinear one is modelled in order to reflect the hardening and softening effect by soil foundation, etc. The post buckling behavior of a plate under several values of linear foundation modulus is revealed. It is also found that the nonlinear foundation affects like as initial imperfection for the plate deflection. Moreover, the influences of both aspect ratio and linear foundation modulus on the secondary buckling strength are summarized.

Key Words : Plate on linear/nonlinear elastic foundation, post buckling behavior, path tracing, bifurcation, secondary buckling

1. まえがき

土木構造物が地盤や岩盤の上に設置されている場合は多い。例えば石油備蓄基地などに見られる液体貯蔵タンクの場合、地上式タンクはほとんどが鋼製溶接構造で、その底板が盛土基礎やコンクリート床版上に据えられている。また地下式タンクは鉄筋コンクリート製で底板が岩盤に支持され、側壁が盛土や岩盤に囲まれている。このほかにも同様なものとして鋼矢板やパイプラインなどがあるが、一般に地盤による反力を面的に受けている場合が多い。

この場合、構造物の挙動は材料特性、例えば弾性係数のオーダーが桁違いに異なる地盤や岩盤による境界条件の影響を大きく受けることが知られており、これが構造解析や振動解析において連成解析あるいは一体解析が必要と言われる所以である。故に、その境界条件として上記の自然条件を合理的に考慮する便法という観点から、弾性基礎上の板とみなすモデル化は様々な構造物に対して有用である場合が多い。

弾性基礎上の構造物についての過去の研究に目を向けると、Timoshenko¹⁾はエネルギー法を用いて弾性基礎上の梁柱の初期座屈荷重を求めている。他に梁柱の後座屈をも含めた非線形問題として、Tvergaardはbilinear型弾塑性ばね上の梁の座屈問題を解いて局所化したモードに対する解析解²⁾を与え、また鉄道のレールの局所化した thermal buckling を弾塑性ばね上の梁モデル³⁾により解析している。また Hunt⁴⁾は非線形弾性基礎上の梁を扱い、初期条件の違いがカオス的な座屈挙動を導くこ

とを示した。

次に、弾性基礎上の板の挙動を扱った研究として、原口⁵⁾は弾性基礎に支持される矩形板の面外曲げ問題を取りあげ、種々の境界条件に対して Lévy の二重フーリエ級数を適用して板の基本方程式の解析解を直接求め、まとめている。さらに FEM 解析を行なったものとして、Cheung⁶⁾は半無限弾性基礎に据えられた箱型タンクを解析し、Yang⁷⁾は横荷重を受ける弾性基礎上の平板の大変形問題のたわみを増分解析により求め、Svec⁸⁾は同様の問題に対して厚板を解析した。また Puttonen⁹⁾や El-zafarani¹⁰⁾は BEM 解析を用いその有用性を示した。

その他の数値解析法や近似解析法には、次のようなものがある。能町¹¹⁾は重調和微分方程式の Green の積分を媒介として、有限フーリエ変換を利用した解析を行っている。倉田ら¹²⁾は差分法を応用した逐次計算法を用いて、非線形ばねの影響や浮上りの状態について調べている。北村ら¹³⁾は固有振動モードを利用した級数解を示している。また松田らは、地盤反力係数が場所的に不均一な場合の板の曲げの解析法を提案し¹⁴⁾、その方法を応用した非線形弾性地盤上の矩形板の弾性解析および非弾性解析を行なっている¹⁵⁾。

ところで近年、内部にコンクリートを充填した鋼製橋脚や、供用年数が経ったり劣化の目立つコンクリート製橋脚に、鋼板を巻き付ける巻きたて工法などが注目を集めている。これらのメリットの一つは鋼管とコンクリートが互いに拘束しあうことによって耐震性能、特に耐座屈性能を向上させるところにある。この鋼管とコンクリートの相互作用は、厳密には鋼板とコンクリートの複

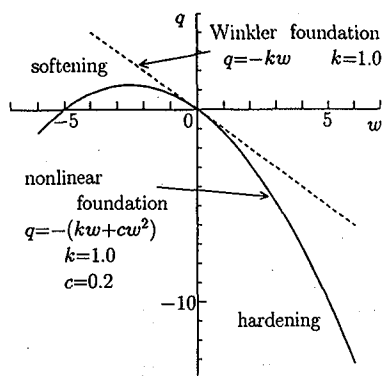


図-1 Winkler 型基礎と非線形弾性基礎の反力特性

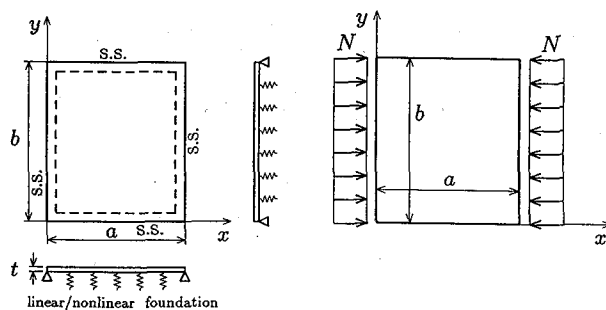


図-2 弾性基礎上矩形平板モデルの境界条件

雑な接触問題となるが、コンクリートの鋼板に対する拘束作用を弾性ばねモデルに置き換えることによって、簡便な弾性基礎上平板としてモデル化でき、問題の本質を解くことが可能となる。

さらに、弾性床の上のはりや板の座屈後挙動は一般に複雑で、かつ高次モードが複数発生することが知られている。また、兵庫県南部地震にも見られるように、構造物が過大な外力を受ける場合には局部座屈が発生することが多く、その損傷部分の進展や局部座屈波形の周辺への伝搬等についても十分に把握しておかなければならない重要な問題である。この種の問題は本来、材料の塑性化、大変形、座屈等の高度に連成した複雑な課題であるが、本研究ではまず、弾性基礎上に置かれた弾性平板の後座屈挙動に着目し、分岐解析という観点からのアプローチを行なう。しかし、弾性基礎上の平板に関する従来の研究は面外荷重による板のたわみに関するものが一般的で、平板が面内力を受けたときの座屈や後座屈挙動にまで言及した研究は皆無と言ってよい。

そこで本論文では、面内一軸方向に一樣に圧縮された弾性基礎上平板の後座屈挙動を解明する。先に中沢ら¹⁶⁾が行なった面内等曲げを受ける矩形板の後座屈挙動の解析に用いられた Galerkin 法による準解析的な方法を拡張する形で定式化し、数値解析を行なう。基本的な Winkler 型の線形弾性基礎上の平板および Hunt¹⁷⁾が用いた非線形弾性基礎上の平板の座屈特性および後座屈挙動を明らかにすることが本研究の目的である。

2. 解析モデルと基礎方程式の誘導

2.1 解析モデル

本研究では、地盤やコンクリートが板に及ぼす拘束効果を反映させるために、弾性基礎のばねの特性を、板が地面にめり込む時には固く、離れていく場合には柔らかくなるように仮定した。これは鋼夾板が打ち込まれる際の受働土圧、主働土圧の状態をも表わしている。すなわち単位面積あたりの弾性基礎の反力 $q(x, y)$

を Hunt¹⁷⁾と同様に

$$q(x, y) = -(kw + cw^2) \quad (1)$$

と与える。ここで k, c はそれぞれ弾性基礎の線形ばね係数および非線形ばね係数であり、これらの仮定した特性を図-1.に示す。式(1)は Hunt の論文における弾性基礎とは $-c$ を $+c$ と改めた点で異なっているが、縦座標の取り方を逆にすればその特性は同じものである。

一方、北田ら^{18),19)}や渡辺ら²⁰⁾のコンクリートを充填した角形鋼管柱に関する研究で、鋼板の局部座屈強度はその実験値が周辺固定支持の解析値と単純支持の解析値の中間値になる事が示されている。よって、構造設計においては座屈強度について安全側で考えることを考慮して、本研究では境界条件を四辺単純支持とする。すなわち本研究における解析対象モデルは四辺単純支持の弾性基礎上矩形板で、弾性基礎としては線形弾性基礎と非線形のばね係数をもつ非線形弾性基礎の二つを考え、これらを図-2に示す。また荷重は図-2右に示すように面内一方向に一樣な圧縮力 N が作用しているものとする。

2.2 基礎方程式の誘導

弾性基礎上平板の後座屈挙動を板の有限変形理論の範囲内で追跡し、本解析では面外たわみのみを考えた von Kármán の非線形基礎偏微分方程式を用いる。よって、弾性基礎上板に対する基礎方程式は面外たわみ $w(x, y)$ 、初期たわみ $w_0(x, y)$ 、および Airy の応力関数 $F(x, y)$ によって以下の二式で表わされる。

$$\nabla^4 w = \frac{t}{D} \left[\frac{q}{t} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right] \quad (2a)$$

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left[\frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right] \right\}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] \} \quad (2b)$$

ここで、 $D(\equiv Et^3/12(1-\nu^2))$ は板の曲げ剛性、 E は弾性係数、 ν はポアソン比であり、 t は板厚である。方程式は級数展開における微分操作の対称性を確保するため、表記を一般のものと幾分変えてあるが、文献 16) との違いは式 (2a) の右第一項が追加されたことである。

応力関数 $F(x, y)$ は面内応力成分 $\sigma_x(x, y)$ 、 $\sigma_y(x, y)$ および $\tau_{xy}(x, y)$ と

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

のような関係がある。この応力関数 $F(x, y)$ が満足すべき力学的境界条件は、

$$\sigma_x = -\frac{N}{bt}, \text{ along } x = 0, a \quad (4a)$$

$$\sigma_y = 0, \text{ along } y = 0, b \quad (4b)$$

$$\tau_{xy} = 0, \text{ along } x = 0, a \text{ \& } y = 0, b \quad (4c)$$

と表わされる。また、上式群中の式 (4b) について、荷重を受けない側の境界辺に垂直な応力 $\sigma_y(x, y)$ の代数和は、その直応力につり合うだけの拘束力が外から作用するものとしてゼロとすれば、

$$\int_0^a \sigma_y dx = 0, \quad \text{at } y = 0, b \quad (5)$$

のように緩和される。式 (2b) の斉次解である Airy の応力関数 $F_0(x, y)$ は、

$$F_0(x, y) = \frac{-N}{2bt} y^2 \quad (6)$$

と表わすことによって、境界条件 (4) 式を厳密に満足することが分かっている。

四辺単純支持の境界条件を満足する初期たわみ $w_0(x, y)$ および面外たわみ $w(x, y)$ をそれぞれ、

$$w_0(x, y) = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (7a)$$

$$w(x, y) = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (7b)$$

と二重フーリエ級数で仮定する。ここで、 m, n は x, y 方向への正弦波の半波数を表わし、 b_{mn} はこれら二重正弦級数の各々のモードに対応した付加たわみ量の重み係数で未知量である。また、 a_{mn} は初期たわみの形状を与える既知の係数である。

文献 16) に従い、応力関数 $F(x, y)$ の一般解を求め (特解は文献 16) と同じ)、式 (2a) に Galerkin 法を適用すると、次式のような b_{mn} を未知数とする三次代数方程式が得られる。

$$f_{rs}(b_{mn}, \lambda) = f_{rs}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{mn}, \dots, b_{uv}, \lambda) = 0 \\ r, m = 1, \dots, u, \quad s, n = 1, \dots, v \quad (8)$$

ここで、 u, v は求めるべき係数 b_{mn} の最大モード数である。また λ は荷重パラメータであり、

$$\lambda \equiv \frac{bN}{6D} \quad (9)$$

と定義する。この方程式 (8) を荷重制御、変位制御を併用した Newton-Raphson 法を用いて解く。

3. 弾性基礎上平板の後座屈挙動解析

面内一軸方向に一様圧縮を受ける、四辺単純支持された弾性基礎上の矩形板の後座屈挙動解析を行なう。弾性基礎に関しては、線形弾性基礎と非線形弾性基礎の二つを仮定した。また今回、初期たわみは考慮せず $w_0=0$ の平板とした。

3.1 数値計算に用いる諸パラメータ

(1) 板の形状

本解析で対象としている弾性板は薄板であり、数値計算上は幅厚比を $\beta=200$ と固定した。また縦横比は $\alpha=1$ とした。板の弾性係数は鋼材を対象に考えているため $E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比は $\nu=0.3$ である。

(2) 弾性ばね係数

後座屈挙動としては、初期座屈後のモードが $m=1, 2, 3$ の低次のものをまず取り上げ、基本的な特性を調べることとする。そこで Timoshenko のエネルギー法¹⁾ による線形座屈解析を行なってそれぞれの線形座屈モードに対応する線形ばね係数 k の範囲を求め、 $k=0.01, 0.1, 1.0 \text{ [kgf/cm}^3\text{]}$ と設定した。ちなみに、鋼板との相対的な弾性比率を考慮すると $k=1.0 \text{ [kgf/cm}^3\text{]}$ は地盤・岩盤あるいは劣化したコンクリート程度のオーダーに相当する。構造物とばねの弾性比率を相対的に制御すれば鋼と硬化コンクリートの場合 (すなわちコンクリートを中詰めした橋脚など) にも応用できるが、この場合はより高次の座屈モードとなるので、本解析のモード次数程度ではすべてをカバーしきれない恐れがあり、ここで示す弾性比率の範囲のみに限定した。また、非線形ばね係数 $c \text{ [kgf/cm}^4\text{]}$ についての理想は離れたらばね定数をゼロとしたいが、ここでは解析的手法を用いるので、連続関数となるよう $k/c=5$ となる値を仮定した。なお、以後の図表タイトル等では煩雑なため k, c の単位系表記を省略していることに注意されたい。

(3) 正弦級数の半波数について

文献 21) のような一般的な平板の二次座屈については $u \times v=6 \times 6$ と仮定することによって、十分な精度が得られることが分かっている。しかし弾性基礎上の平板では、基礎の線形弾性係数 k が大きくなるに従い、初期座屈モードが高次へと変化するので、モード次数をより多く取らなければならないことになる。よって、 $k=0.01$ (初期座屈モード $m=2$)、 $k=0.01$ (同 $m=2$) のと

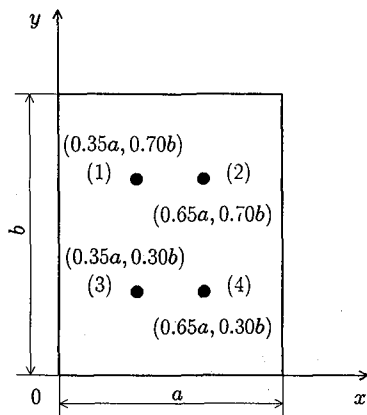


図-3 面外たわみのサンプリング位置

きは $u \times v = 6 \times 6$ を、 $k=1.0$ (同 $m=3$) のときは $u \times v = 8 \times 8$ を採用した。

3.2 弾性基礎に上平板の後座屈挙動

(1) 線形弾性基礎に上平板のつりあい経路

荷重-変位関係、すなわちつり合い経路を示す際の面外たわみサンプリング点を図-3のように4点設定し、ここでは(3)点 $(0.35a, 0.30b)$ に注目する。個々のつりあい経路は、荷重制御型解析および変位モード制御型解析を併用することによって求めている。

ここでは $k=0.01, 0.1, 1.0$ の3ケースを取り上げ、それぞれを図-4,5,6に示す。線形弾性基礎では、基礎の反力が板の表裏で対称性を持つことにより $w/t=0$ に対して対称な解を持つため、図にはその半分のみを示した。後座屈挙動を示すそれぞれの図では縦軸に無次元化した荷重パラメータ $\lambda (\equiv bN/6D)$ を、横軸には面外たわみ w を板厚 t で無次元化した w/t をプロットしている。図中の実線は経路の安定条件を満たす安定なつり合い経路を表わし、破線は不安定なつり合い経路を表わしている。また(●)は特異点(分岐点、極限点)、(◇)は単に変形モードを表わす位置を示している。なお以下の議論におけるつりあい径路上の特異点の分類は、文献16)に示された方法によって判定している。

(i) $k=0.01$ の場合

図-4-aにおいて板は、 $\lambda=7.9$ のA点において初期座屈を起こし、 $w/t=0$ の主径路上から $(m=1, n=1)$ のモードで変形して $\lambda=13.3$ の二次分岐点Bに至る。B点以降は径路A-B上を伸ばした主径路が存在するが、これは不安定なつりあい径路である。したがって板はB点から、たわみが単調に減少する安定なつりあい径路B-Fか、単調に増加する安定なつりあい径路B-Gのどちらかに移行し、新たに $(m=2,3, n=\text{odd})$ のモードが成長してくる。さらにそれぞれの径路は $\lambda=58$ 付近の三次分岐点F,Gに至り、安定な径路であるF-H, F-Iある

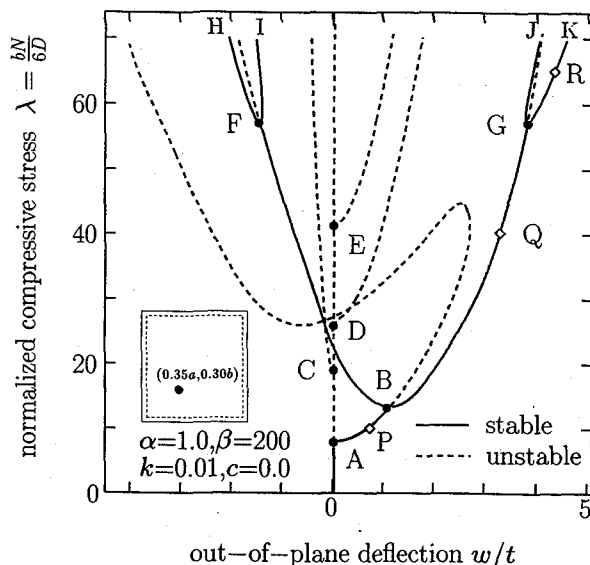


図-4-a 一様圧縮を受ける平板のつりあい経路 ($k=0.01$)

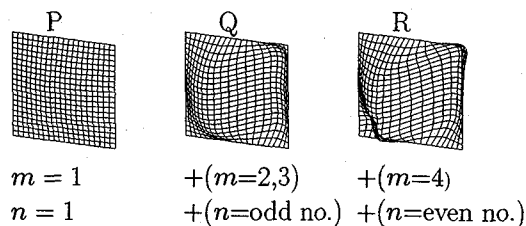


図-4-b 変形モード図

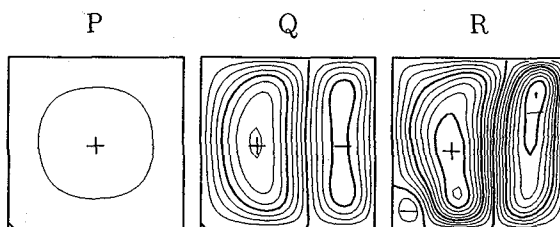


図-4-c 面外たわみの等高線図: $w/t=0.5$ 間隔

図-4 $k=0.01$ の場合の線形弾性基礎に上平板の挙動

いはG-J, G-Kに移行し、また新たに $(m=4, n=\text{even})$ のモードが成長する。加えて、図には $w/t=0$ の主径路上の点C,D,Eから伸びる高次のモードの不安定なつりあい径路も示した。

以上の板の変形過程を経路A-B上の点P、径路B-G上の点Qおよび径路G-K上の点Rに関する変形モード図およびたわみの等高線図として示すと、図-4-b,4-cのようになる。それぞれの点に対応する変形モード図の倍率は同じに設定している。また等高線図は $w/t=0.5$ 毎に細線を、 $w/t=2.0$ 毎に太線を使って表わしている。

板は初期座屈後 $(m=1, n=1)$ のモードで変形することによって板の表裏に関する対称性を失う。そして二次分岐後は $(m=2,3, n=\text{odd})$ のモードが成長することによ

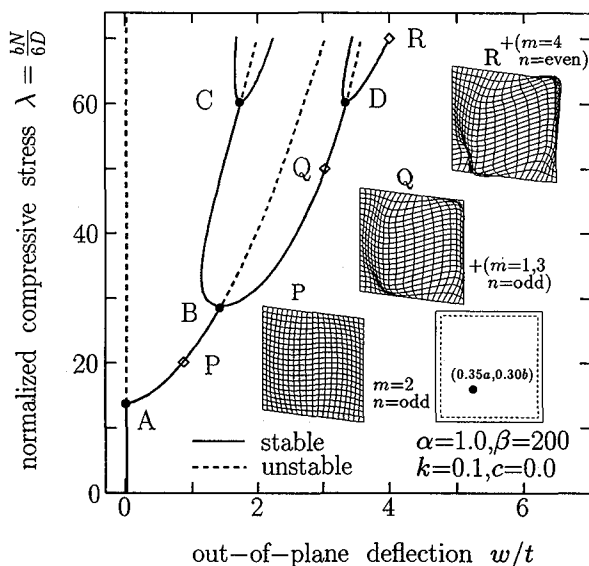


図-5-a 一様圧縮を受ける平板のつりあい経路 ($k=0.1$)

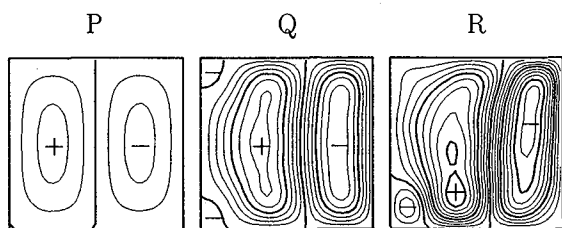


図-5-b 面外たわみの等高線図: $w/t=0.5$ 間隔

図-5 $k=0.1$ の場合の線形弾性基礎上平板の挙動

り $x=a/2$ に関して、すなわち y 軸に関しての対称性を失う。さらに三次分岐後は ($m=4, n=\text{even}$) のモードが成長することによって $y=b/2$ 、すなわち x 軸に関する対称性をも失い、最終的に m, n 全てのモードが混じりあい複雑な変形性状を示すことになる。このように板は形の対称性を順次喪失していくことがわかり、分岐という現象の特徴をよく表わしている。

(ii) $k=0.1$ の場合

図-5-aにおいて、板は $\lambda=13.8$ のA点において初期座屈を起こした後、($m=2, n=1$) のモードで変形し、 $\lambda=29$ 付近の二次分岐点Bに至る。この場合、板は初期座屈の際に表裏に関する対称性と $x=a/2$ に関する対称性を同時に失っている。二次分岐後はB-C、B-Dの両安定つりあい経路のどちらかに移行し、新たに ($m=1, 3, n=\text{odd}$) のモードが成長し、 $\lambda=60$ 付近のC,D点において三次分岐を起こす。三次分岐後はまた新たに ($m=4, n=\text{even}$) のモードが成長し、 $y=b/2$ に関する対称性をも失う。このときのP, Q, R点のたわみ変形モードを図-5-a中に示し、等高線図を図-5-bに示す。

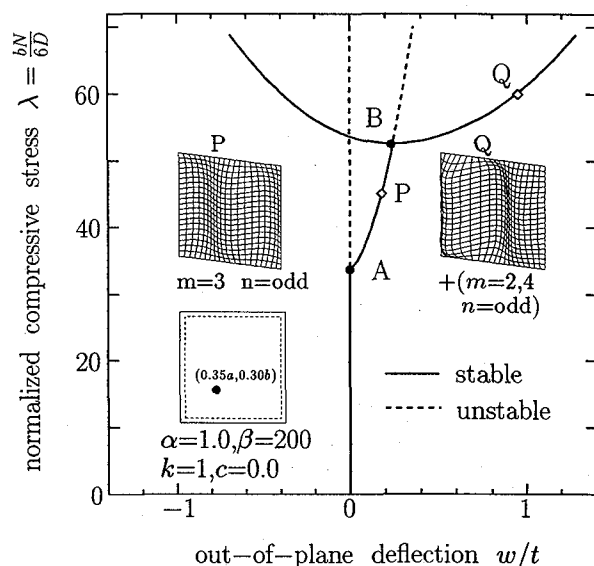


図-6 一様圧縮を受ける線形弾性基礎上平板のつりあい経路 ($k=1.0$ の場合)

(iii) $k=1.0$ の場合

$k=1.0$ の場合 (図-6) は $\lambda=33.9$ のA点で座屈した後、($m=3, n=\text{odd}$) のモードで変形する。 $\lambda=52$ 付近のB点で二次分岐を起こし、($m=2, 4, n=\text{odd}$) のモードが成長する。この二次分岐以降ですでに、 $m=4$ という高次のモードが発生しており、ばね定数が大きいほど高次モードが励起されることを示している。

(2) 非線形弾性基礎上平板のつりあい経路

非線形弾性基礎の場合は、基礎の反力が板の表裏で異なるため、表裏に関する対称性が最初から無い状態が初期条件となる。したがってつりあい経路はもはや $w/t=0$ に対して対称とならない。そこで、まず基礎の反力を表わす式 (1) における非線形項がつりあい経路に及ぼす影響を調べる。その後、初期座屈が $m=2$ のモードで起きる $k=0.1, c=0.02$ の場合について後座屈挙動を追跡する。

(i) ばねの非線形項の影響

基礎の反力を表わす式 (1) における非線形項 cw^2 は、初期座屈点近傍では無視できるので、初期たわみ (不整) の無い場合の初期座屈荷重の大きさは線形弾性基礎の場合と全く同じで、かつ初期座屈点は安定対称分岐点であることにも変わりはない。しかしたわみが大きくなるに従ってその影響は大きくなっていく。そこで $k=0.1$ と固定して非線形ばね係数 c を 0.0 から徐々に大きくし、最終的に解析において採用する $c=0.02$ までのつりあい経路の変化の様子を図-7に示した。

非線形弾性基礎の場合、 $c \neq 0.0$ の場合のつりあい経路は板の表裏で非対称となることがまず確認される。 $c \neq 0.0$ の個々のつりあい経路に注目すると、 $w/t > 0$ 、つまり板が座屈して基礎にめり込むときは、荷重が増加

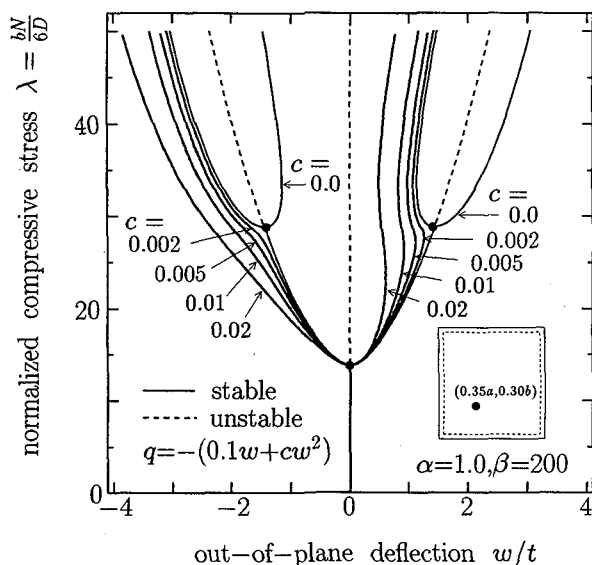


図-7 ばねの非線形項の影響 ($k=0.1$, $0.0 < c < 0.02$)

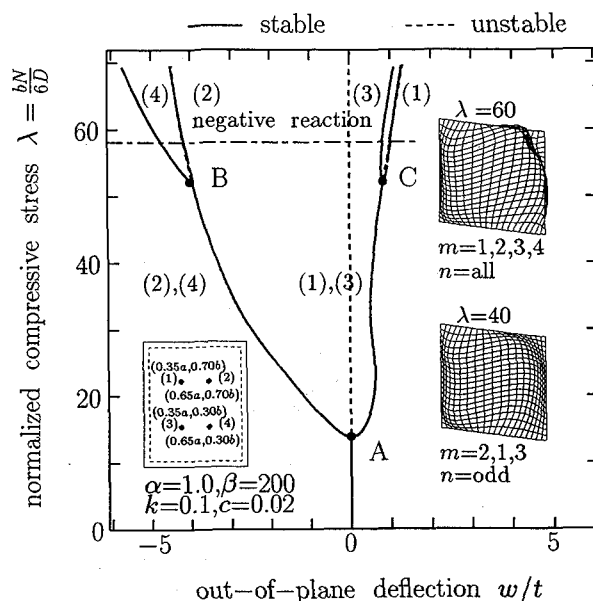


図-8 $k=0.1$, $c=0.02$ の場合の非線形弾性基礎上平板のつりあい経路

するにつれ $c=0.0$ のつりあい径路から w/t の大きさが小さくなるように遠ざかる。また $w/t < 0$ 、つまり板が基礎から離れようとするときは、 w/t が大きくなるように $c=0.0$ のつりあい径路から遠ざかる。このことは基礎の反力がたわみに関して非対称で hardening, softening するという性質をよく反映している。また $c=0.0$ を完全系とすると、 $c \neq 0.0$ は初期不整のある不完全系と同様な振る舞いをしているとみなすことができる。

(ii) $k=0.1$, $c=0.02$ の場合

$k=0.1$, $c=0.02$ の場合のつりあい径路を図-8に示す。板は線形弾性基礎(図-5-a)と同じ $\lambda=13.8$ のA点で分岐する。その後サンプリング点(1)(3)が $w/t > 0$ のA-C径路、(2)(4)は $w/t < 0$ のA-B径路にそれぞれ移行する。分岐後しばらくは ($m=2$, $n=\text{odd}$) のモードが支配的であるが、徐々に ($m=1,3$, $n=\text{odd}$) のモードも成長し、かなりの割合を占めるまでになる。 $\lambda=40$ での板の変形モードを図中に示した。そして $\lambda=52$ 付近の点B,Cにおいて二次分岐し、それまで同じつりあい径路上にあった(1)(3)、(2)(4)での面外たわみは独立した径路をとる。またこの径路ではすべてのモードが混在し複雑な形状となることが、 $\lambda=60$ での変形モード図からも理解できよう。ここでサンプリング点(4)のたわみは、他の観測点に比べてたわみの変化率が大きく、ばね定数の値が小さくなる局所に変形が集中している。

ところで、 $\lambda=58$ 付近から板のたわみ w/t が5を越える部分が発生し、そこで基礎の反力が負になっている。これは、図-1.の仮定によるものであって実現現象としては起こり得ないが、負の反力が発生するまでの定性的な後座屈挙動を把握するにはさほど問題はないと考えられる。

(3) パラメータ α , k の二次座屈強度に対する影響

先の研究において中沢ら²¹⁾は、等曲げを受ける四辺単純支持の矩形板と、二辺固定および二辺単純支持の矩形板の場合、縦横比 α によってそれらの二次座屈強度が周期的に変化する特性曲線を示している。四辺単純支持板の二次座屈は snap through の不安定現象であり、二次座屈荷重をプロットした特性曲線は、初期座屈のモードが $m \rightarrow m+1$ に移行する縦横比 α の値付近において不連続となる。一方、二辺固定および二辺単純支持の矩形板の場合の二次座屈は分岐であるが、初期座屈モードが移行する α での特性曲線は連続となることがわかってゐる。

これらは初期座屈のモードを支配するパラメータである α がやはり二次座屈強度と密接な関係にあることを示唆している。さらに本研究では、上述の α の他に初期座屈のモードを支配するパラメータとして基礎の線形ばね係数 k が新たに加わることになる。よって、ここでは両パラメータ α , k の二次座屈強度に対する影響を調べた。 α と二次座屈強度の関係を図-9に、 k と二次座屈強度の関係を図-10に示す。実線は Timoshenko のエネルギー法により求まる初期座屈荷重を表わし、(●) は二次座屈荷重を表わしている。また二次座屈後に新たに成長するモードもあわせて示した。

α と二次座屈強度の関係を表わす図-9において、二次座屈強度は α が増加するに従って単調に減少し、 $\alpha = 0.804$ の初期座屈モード移行点に至る。この点では初期座屈後に $m=1$ と $m=2$ のモードが同時に成長するので、この α における二次座屈はさらに高次のモードで起こるが、このことは一次座屈が起こった直後に二次座屈が起こるとも解釈できる。よってこの移行点も二次座屈

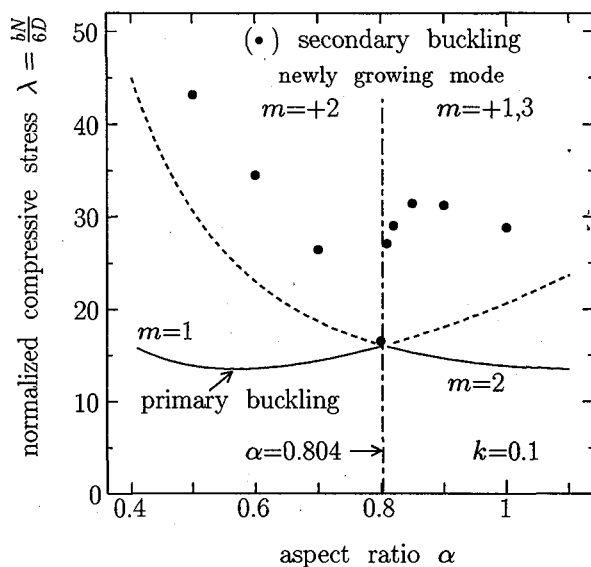


図-9 縦横比 α と二次座屈強度の関係

点と解釈する。さらに α が増加すると、二次座屈荷重は増加に転じ、極大値をすぎると次の遷移点まで減少する周期的な特性を示すと考えられる。これは等曲げを受ける二辺固定および二辺単純支持の矩形板の場合に類似しており、分岐を起こす板の座屈特性と考えられる。

同様に、 k と二次座屈強度の関係を表わした図-10にも同じ傾向を見ることができる。二次座屈荷重は $k = 0.035$ の遷移点に至るまでは減少し、その後 $k > 0.035$ で増加に転じている。図中の k より大きな範囲では、やがて二次座屈点は次の遷移点に収束していくものと思われる。以上のことから α と k の間には一種のアナロジーがあると考えられる。また一般に二次座屈が飛び移り座屈のときは遷移点において不連続で、分岐座屈のときは連続することも上述の解析例より推察される。

4. 結論

面内一軸方向に一樣に圧縮された弾性基礎上平板について、Winkler 型基礎と非線形弾性基礎の場合の後座屈挙動解析を行ない、以下の結論を得た。

- (1) Winkler 型基礎上弾性平板のつりあい径路を追跡することにより、これまでほとんど言及されていなかった面内一樣圧縮下における後座屈挙動を明らかにした。また板が荷重載荷過程において次々に分岐を起こし、平板の表裏 $\rightarrow y$ 軸 $\rightarrow x$ 軸に関する対称性を喪失していくという分岐の仕組みを数値的に確認した。
- (2) 線形弾性基礎のばね定数 k が大きくなることにより初期座屈荷重は上昇し、座屈モードも高次へと変化する。その後、順次発生する二次あるいは三次座屈は、本解析の範囲ではすべて分岐型であり、最終的

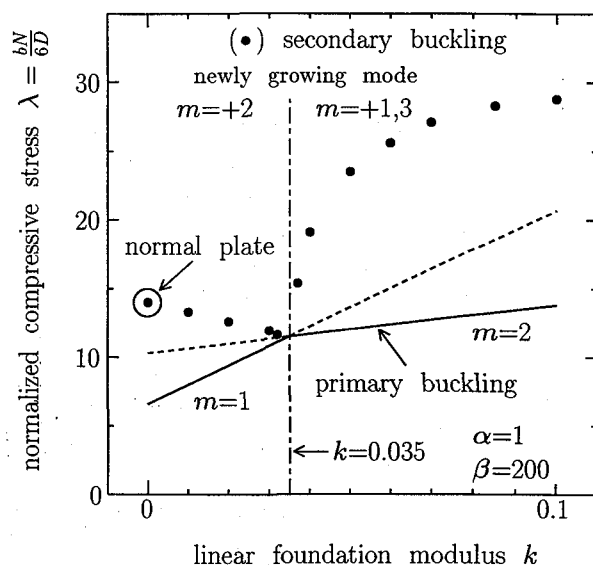


図-10 線形ばね係数 k と二次座屈強度の関係

にすべての対称性が喪失するまでの過程を明らかにした。

- (3) 非線形弾性基礎上平板の後座屈挙動を数値的に追跡した。また基礎の反力における非線形項が後座屈挙動に与える影響について調べた結果、初期不整の効果に類似した振る舞いをするのがわかった。すなわち、板はばね定数の小さくなる方向にたわみやすく、局所的に変形が集中することがある。
- (4) Winkler 型基礎上平板において、縦横比 α と線形ばね係数 k が二次座屈に与える影響を調べたところ、両者の間に分岐を生じる平板に特有の座屈強度特性が確認され、一種のアナロジーが存在すると考えられる。

あとがき

今回は鋼と地盤・岩盤あるいは劣化したコンクリート程度の相対弾性比率での結果を示した。鋼と硬化コンクリートの場合ではより高次の座屈モードとなるので、本解析のモード次数程度ではすべてをカバーしきれない恐れがあり、弾性比率の範囲を制限したことを重ねて断っておく。また、Winkler 基礎という言葉は線形弾性基礎と同義語と解釈して使用している。

参考文献

- 1) S.P.Timoshenko and J.M.Gere : THEORY OF ELASTIC STABILITY, McGRAW-HILL BOOK CO., 1961.
- 2) Tvergaard, V. and Needleman, A. : On the localization of buckling patterns, *J. Appl. Mech.*, Vol.47, pp.613-619, 1980.

- 3) Tvergaard, V. and Needleman, A. : On localized thermal track buckling, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.23, No.10, pp.577-587, 1981.
- 4) G.W.Hunt and M.K.Wadee : Comparative lagrangian formulations for localized buckling, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol.A434, pp.485-502, 1991.9.
- 5) 原口忠次郎 : 弾性基礎上の矩形板, 山海堂, 1964.
- 6) Y.K.Cheung and O.C.Zienkiewicz : Plates and tanks on elastic foundations —An application of finite element method, *Int. J. Solids Structures*, Vol.1, pp.451-461, 1965.
- 7) Yang, H.T.Y : Flexible plate finite element on elastic foundation, *Journal of the Structural Division. Proc. ASCE*, Vol.96, No.ST10, pp.2083-2101, Oct., 1970.
- 8) Svec, O.J. : Thick plates on elastic foundations by finite elements, *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE*, Vol.102, No.EM3, pp.461-477, June, 1976.
- 9) Puttonen, J. and Varpasuo, P. : Boundary element analysis of a plate on elastic foundations, *Int. J. Nume. Meth. Eng.*, Vol.23, pp.287-303, 1986.
- 10) A.El-Zafrany, S.Fadhill and K.Al-hosani : A new fundamental solution for boundary element analysis of thin plates on Winkler foundation, *Int. J. Nume. Meth. Eng.*, Vol.38, pp.887-903, 1995.
- 11) 能町純雄 : 弾性基礎にある四辺、四隅自由な矩形板の曲げについて, 土木学会論文報告集, 第32号, pp.26-32, 1956.
- 12) 倉田宗章, 高橋宏直, 谷平 勉 : 非線形ばね基礎上の周辺自由な平板の数値解析, 土木学会論文報告集, 第208号, pp.13-21, 1972.12.
- 13) 北村泰寿, 桜井春輔 : 弾性基礎上の4辺自由板の級数解, 土木学会誌, Vol.64, pp.61-66, 1979.3.
- 14) 松田 浩, 崎山 毅 : 不均一弾性地盤上の矩形板の曲げの一解析法, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.343-352, 1986.
- 15) 松田 浩, 崎山 毅 : 非線形弾性地盤上の矩形板の非弾性曲げの一解析法, 構造工学論文集, Vol.34A, pp.79-86, 1988.
- 16) 中沢正利, 池田清宏, 和知 聡, 倉西 茂 : 等曲げを受ける弾性矩形板に生じる二次座屈現象の解明, 土木学会論文集, No.519/I-32, pp.67-78, 1995.7.
- 17) G.W.Hunt, H.M.Bolt and J.M.T.Thompson, : Structural localization phenomena and the dynamical phase-space analogy, *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol.A425, pp.245-267, 1989.
- 18) T.Kitada, O.Yoshikawa and H.Nakai : A design method for steel plate elements in concrete enclosed square steel tubular columns, *The First East Asian Conference on Structural Engineering and Construction, Bangkok*, 1986.1.
- 19) H.Nakai, T.Kitada and H.Terada : An experimental study on ultimate strength of composite columns for compression or bending, *Proc. JSCE*, No.374/I-6, pp.67-77, 1986.10.
- 20) 渡辺 浩, 崎元達郎, 山尾敏孝, 持田拓児, 寺田昌弘 : 内部にコンクリートを充填した角形鋼管柱の局部座屈に関する実験的研究, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.321-328, 1995.3.
- 21) M.Nakazawa, T.Iwakuma, S.Kuranishi and M.Hidaka : Instability phenomena of a rectangular elastic plate under bending and shear, *Int. J. Solid. Structures*, Vol.30, No.20, pp.2729-2741, 1993.

(1996年9月6日受付)