

自由端に集中面内力を受ける片持ち長方形板の振動, 座屈および動的安定

Vibration, Buckling and Dynamic Stability of a Cantilever Rectangular Plate Subjected to Concentrated In-plane Load at Free End

高橋和雄*, 呉 明強**

Kazuo TAKAHASHI and Mincham WU

* 工博 長崎大学教授 工学部社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

** 長崎大学大学院 工学研究科社会開発工学専攻 (〒852 長崎市文教町1番14号)

The vibration, buckling and dynamic stability of a cantilever rectangular plate subjected to in-plane concentrated load at the free edge is studied in this paper. The small deflection theory of the thin plate is used. The Rayleigh-Ritz method is employed to solve vibration and buckling of the plate. The dynamic stability problem is solved by using the Hamilton principle to drive time variables. The resulting time variables are solved by the harmonic balance method.

Buckling properties and natural frequencies of the plate are shown at first. The regions of instability which contain combination resonances and simple parametric resonances are discussed for various aspect ratios, damping constants and static loads.

Key Words : dynamic stability, cantilever rectangular plate, vibration, buckling.

1. まえがき

一般に, はりに面内曲げ荷重が作用する場合, 横倒れ座屈が生じることが知られている¹⁾. はりの長さが短い場合や高さが高い場合には, 平板としての取り扱いが必要であるが, これまで平板として取り扱った研究は著者の知る限りない. また, 平板に面内力が作用した場合の座屈特性や振動特性はかなり解析されているが, 周期的変動面内力が作用する場合の動的安定の解析について, 不十分な点は認められる(文献2)の文献参照). 特に結合共振については, これまでの研究で解析方法が少なかったことやその存在が知られていなかったこともあって, 結合共振が支配的となる動的安定の解析は少ない.

著者らはプレートガーダーの腹板のように面内曲げ荷重を受ける平板構造の動的安定問題を取り扱う計画であるが, 本研究ではその第一段階としてフランジが付いていない一枚の片持ち長方形板を対象にその自由端に沿って面内集中荷重が作用する場合の解析を行う. 荷重が静的に作用する座屈問題は文献1)の1-112~1-115頁にはりの横倒れ座屈として座屈公式が示されているが, 縦横比が小さい場合の結果は取り扱われていない. 一方長方形板については, 面内荷重が作用することによって生ずる面内力による

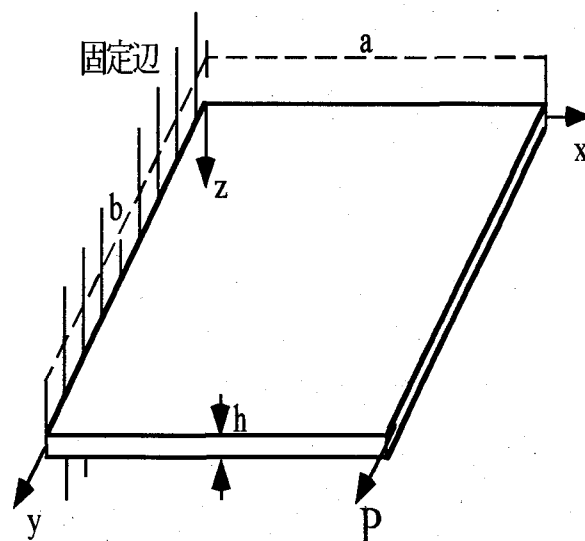


図-1 一般図

座屈を取り扱った研究は少ない. そこで, 本研究は座屈問題を含めて面内集中曲げ荷重が作用する場合の片持ち長方形板の固有振動および動的安定問題を明らかにする. 解法については, 自由振動と座屈の解析には, はりの曲げ振動の固有関数を用いて, エネルギー法に基づく, Rayleigh-Ritz法により解析を行う²⁾. また, 動的安定解析には,

Hamilton の原理によって、動的安定問題の時間に関する運動方程式を誘導し、得られた運動方程式を2倍サイズの行列の固有値問題に変換して解析する。

数値解析において、長方形板の座屈、固有振動および動的不安定領域に及ぼす縦横比、減衰定数、静的および動的荷重の影響を明らかにする。

2. 片持ち板の自由端に面内集中荷重Pを作用する場合の面内力

図-1に示すような片持ち長方形板の自由端にy軸方向に面内集中荷重 $P = P_0 + P_t \cos \Omega t$ が作用する場合の面内力 N_x 、 N_{xy} は次のように与えられる³⁾。

$$N_x = -\frac{12(P_0 + P_t \cos \Omega t)}{b^3} \left(y - \frac{b}{2} \right) (a - x) \quad (1)$$

$$N_{xy} = -\frac{6(P_0 + P_t \cos \Omega t)}{b^3} \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3(P_0 + P_t \cos \Omega t)}{2b} \quad (2)$$

ここに、 P_0 : 静的集中荷重、 $P_t \cos \Omega t$: 周期的変動集中荷重、 P_t : 変動集中荷重の振幅、 Ω : 励振円振動数、 t : 時間、 a, b : 辺長。

3. 解法

3.1 座屈および固有振動解析

静的集中荷重 P_0 を受ける場合の長方形板の自由振動を考える。ひずみエネルギー V 、面内力による仕事 U および運動エネルギー T は次のように与えられる⁴⁾。

$$V(w) = \frac{1}{2} D \int_0^b \int_0^a \left[\left(\nabla^2 w \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \quad (3)$$

$$U(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (4)$$

$$T(w) = \frac{\rho}{2} h \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (5)$$

ここに、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度、 E : ヤング率、 ν : ポアソン比、 ρ : 板の密度、 w : たわみ、 h : 板厚。この場合のポテンシャルエネルギーは次式となる。

$$\Pi(w) = V(w) + U(w) \quad (6)$$

一般解を次のように仮定する²⁾。

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \exp(i\omega t) \quad (7)$$

ここに、 h_m : 片持ちばりの固有振動形、

$\bar{h}_n$: 両端自由ばりの固有振動形、

A_{mn} : 未定定数、 $\xi = x/a$ 、 $\eta = y/b$ 、

ω : 固有円振動数。

次に、式(6)に式(7)を代入し、Rayleigh-Ritz法を適用す

ると

$$\frac{\partial}{\partial A_{rs}} (T - \Pi) = 0 \quad (8)$$

($r = 1, 2, \dots, N$, $s = 1, 2, \dots, N$)

式(8)の偏微分を行うと、次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_{mn} (E_{mrs} - \lambda_v^4 F_{mrs} - \lambda_b G_{mrs}) = 0 \quad (9)$$

ここに、

$$E_{mrs} = \frac{1}{\beta^4} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^1 + \frac{\nu}{\beta^2} (I_{mr}^3 \bar{I}_{ns}^2 + I_{mr}^4 \bar{I}_{ns}^3) + I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^5 + \frac{2(1-\nu)}{\beta^2} I_{mr}^5 \bar{I}_{ns}^4,$$

$$F_{mrs} = \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^8 \bar{I}_{ns}^1,$$

$$G_{mrs} = (8I_{mr}^6 \bar{I}_{ns}^6 + I_{mr}^7 \bar{I}_{ns}^7 + I_{mr}^8 \bar{I}_{ns}^8) \left(\frac{3}{2\beta} \right),$$

$\lambda_v = \sqrt[4]{\rho h \omega^2 b^4 / D}$ (振動固有値)、 $\beta = a/b$: 縦横比

$\lambda_b = P_0 b / D$ ($\omega = 0$ のときの座屈固有値)、

$I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}^2, \dots$: 固有関数の定積分(Appendix A)、

$m, n, r, s = 1, 2, \dots, N$ 。

式(9)を行列表示すると

$$([E] - \lambda_v^4 [F] - \lambda_b [G]) \{X\} = \{0\} \quad (10)$$

ここに、 $[E], [F], [G]$: 係数行列、

$$e(s + (r-1)N, n + (m-1)N) = E_{mrs},$$

$$f(s + (r-1)N, n + (m-1)N) = F_{mrs},$$

$$g(s + (r-1)N, n + (m-1)N) = G_{mrs},$$

$$\{X\} = \{A_{11}, A_{12}, A_{13}, \dots, A_{1N}, A_{21}, \dots, A_{2N}, \dots, A_{NN}\}^T,$$

e, f, g : 行列 $[E], [F], [G]$ の要素。

ここで、 $\lambda_b = 0$ とすれば、面内力が作用しない場合の自由振動の固有値 λ_v が得られる。また、慣性項を無視すれば、座屈固有値 λ_b が得られる。なお、式(10)を書き換えると、

$$([A] - \lambda_v^4 [F]) \{X\} = 0 \quad (11)$$

ここに、 $[A] = [E] - \bar{P}_0 \lambda_b [G]$ 、 $\bar{P}_0 = P_0 / P_{cr}$: 無次元静的集中荷重、 P_{cr} : 座屈荷重。

上式より無次元静的集中荷重 $\bar{P}_0$ を作用する場合の自由振動の固有値 λ_v が得られる。

数値計算においては、式(10)と式(11)を行列の固有値問題に変換し、固有値と固有ベクトルを求める。固有値より固有円振動数および座屈荷重が求められ、固有ベクトルより固有振動形および座屈波形が明らかにされる。

3.2 動的安定解析

静的集中荷重 P_0 および周期的変動集中荷重 $P_t \cos \Omega t$ が作用する場合を考える。

動的安定解析において、たわみを次のように仮定する²⁾。

$$w = \sum_{m=1} \sum_{n=1} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (12)$$

ここに、 $T_{mn}(t)$ ：未知の時間関数、 $W_{mn}(x, y)$ ：式(7)を用いて得られる静的集中荷重が作用しない場合の長方形板の固有振動形。すなわち

$$W_{mn} = \sum_{p=1} a_p^m h_p(\xi) \sum_{q=1} a_q^n \bar{h}_q(\eta) \quad (13)$$

ここに、 $h_p(\xi)$ ：片持ちばりの固有振動形、 $\bar{h}_q(\eta)$ ：両端自由ばりの固有振動形、 a_p^m, a_q^n ：自由振動解析から得られるモード定数。

一般座標に関する運動方程式を誘導するために、Hamiltonの原理を適用する⁵⁾。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \{T - (V - U)\} dt = 0 \quad (14)$$

ここに、 $\delta T_{mn}(t_1) = \delta T_{mn}(t_2) = 0$

式(14)の変分を行い、部分積分してまとめると、次式が得られる。

$$\sum_{m=1} \sum_{n=1} \sum_{k=1} \sum_{l=1} \left[C_{mn}^{kl} \ddot{T}_{mn} + \left\{ \frac{1}{k_{11}^4} A_{mn}^{kl} - \frac{\lambda_b}{k_{11}^4} (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \bar{\omega} \tau) + B_{mn}^{kl} \right\} T_{mn} \right] = 0 \quad (15)$$

ここに、 $k_{11}^4 = \rho h b^4 \omega_{11}^2 / D$ ：片持ち長方形板の1次固有値、 $\bar{P}_t = P_t / P_{cr}$ ：無次元変動集中荷重振幅、 $\bar{\omega} = \Omega / \omega_{11}$ ：励振円振動数、 $\tau = \omega_{11} t$ ：無次元時間、 $A_{mn}^{kl}, B_{mn}^{kl}, C_{mn}^{kl}$ (Appendix B)

式(15)を行列表示すると次式が得られる。

$$[C]\{\ddot{T}\} + [\mathcal{Q}]\{\dot{T}\} + (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \bar{\omega} \tau)[R]\{T\} = \{0\} \quad (16)$$

ここに、 $[C], [\mathcal{Q}], [R]$ ：係数行列、

$$c\{l + (k-1)L, n + (m-1)L\} = C_{mn}^{kl},$$

$$q\{l + (k-1)L, n + (m-1)L\} = \frac{1}{k_{11}^4} A_{mn}^{kl},$$

$$r\{l + (k-1)L, n + (m-1)L\} = -\frac{\lambda_b}{k_{11}^4} B_{mn}^{kl},$$

$$\{T\} = \{T_{11} T_{12} \cdots T_{1L} T_{21} \cdots T_{LL}\},$$

$$c, q, r : [C], [\mathcal{Q}], [R] \text{の要素},$$

$$L : \text{項数}, m, n, k, l = 1, 2, \dots, L.$$

式(16)に、 $[C]$ の逆行列 $[C]^{-1}$ を左から掛ける。さらに、線形減衰力を考慮すれば、減衰を考慮した運動方程式は次式のように表される。

$$[I]\{\ddot{T}\} + [H]\{\dot{T}\} + [F]\{T\} + (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \bar{\omega} \tau)[G]\{T\} = \{0\} \quad (17)$$

ここに、 $[F] = [C]^{-1}[\mathcal{Q}]$,

$$[G] = [C]^{-1}[R],$$

$$[H] = \text{diag}(2h_{ij}\omega_{ij}).$$

式(17)は連立の Mathieu の方程式である。 $[I]$ は単位行列、 $[H]$ は対角化された減衰行列、 $[F]$ は対角要素に固有振動数比の2乗が入った対角行列、 $[G]$ は係数励振行列である。本研究の面内集中荷重を受ける長方形板の場合、行列 $[G]$ の要素のうち、半分は0である。時間関数 $\{T\}$ の順番を並び換えることにより、行列 $[G]$ の要素を零要素群と非零要素群にまとめられる。ここで、並び換えた後の時間関数 $\{T\}$ を8自由度まで採用した場合は次のように表される。

$$\{T\} = \{T_{11} \ T_{21} \ T_{13} \ T_{23} \ T_{12} \ T_{22} \ T_{14} \ T_{32}\}^T \quad (18)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1211} & g_{2211} & g_{1411} & g_{3211} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1221} & g_{2221} & g_{1421} & g_{3221} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1213} & g_{2213} & g_{1413} & g_{3213} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1223} & g_{2223} & g_{1423} & g_{3223} \\ g_{1112} & g_{2112} & g_{1312} & g_{2312} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{1122} & g_{2122} & g_{1322} & g_{2322} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{1114} & g_{2114} & g_{1314} & g_{2314} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{1132} & g_{2132} & g_{1332} & g_{2332} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

上式において、時間関数 T_{ij} のサフィックス*i*はx方向の振動形の次数を意味し、片持ちばりの振動次数に対応する。サフィックス*j*はy方向の振動形の次数を意味し、 $j=1$ は両端自由ばりの並進剛体モード、 $j=2$ は回転の剛体モードに対応し、 $j \geq 3$ は両端自由ばりの曲げ振動の*j-2*次の振動次数に対応する。なお、係数励振行列 $[G]$ の主対角要素から単純共振の不安定領域が得られ、非対角要素から結合共振の不安定領域が得られる²⁾。主対角要素が0になるので、単純共振の不安定領域が少ないことが予想できる。行列 $[G]$ の非零要素 $g_{1211}, g_{2211}, g_{2221} \cdots$ により、 $(T_{12}, T_{11}), (T_{22}, T_{11}), (T_{22}, T_{21})$ のような2自由度系の振動(結合共振)が発生する。式(19)から明らかなように g_{ijkl} において、 j, l は奇数と偶数の組み合わせとなっている。偶数と偶数、奇数と奇数の組み合わせは存在しない。つまり、y方向の振動波形は対称(偶数)と逆対称(奇数)の組み合わせからなり、対称と対称、または逆対称と逆対称の間の組み合わせは存在しない。したがって、y方向の振動次数が偶数、奇数となるような結合共振が発生する。

また、並び換えた式(17)の一般解を、次のようにフーリエ級数を使って仮定する⁶⁾。

$$\{T\} = e^{\lambda \tau} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1} (a_k \sin k \bar{\omega} \tau + b_k \cos k \bar{\omega} \tau) \right\} \quad (20)$$

ここに、 λ : 未定定数, b_0, a_k, b_k : 未知のベクトル。
式(20)を式(17)に代入し、調和バランス法を適用すれば、 b_0, a_k および b_k を求めるための同次方程式が得られる。

$$[D]\{X\} = \{0\} \quad (21)$$

ここに、 $[D]$: 係数行列, $\{X\} = \{b_0 b_1 b_2 \dots a_1 a_2 \dots\}^T$

行列 $[D]$ の性質から行列 $[D]$ は次の3個の行列に分解される。

$$[D] = [M_0] - \lambda[M_1] - \lambda^2[M_2] \quad (22)$$

ここに、 $[M_0], [M_1], [M_2]$: λ の0, 1, 2次の係数行列。

ここで、 $\{Y\} = \lambda\{X\}$ なる新しいベクトルを導入すれば、式(22)は $[D]$ の大きさの2倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (23)$$

式(23)は、非対称行列の固有値問題の基礎式である。すなわち、与えられた加振振動数 $\bar{\omega}$ と変動集中荷重の振幅 $\bar{P}_t$ の組み合わせに対して得られた固有値 λ の実数部がすべて負ならば、一般化の $\exp(\lambda\tau)$ が時間とともに収束するため安定、逆に一つでも正ならば発散してしまうため不安定であるという条件から安定性が評価される⁶⁾。

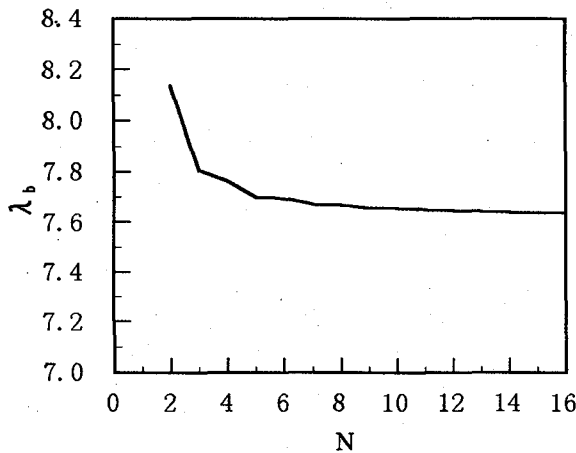


図-2 座屈固有値の収束状況($\beta=1$)

4. 座屈特性

4.1 座屈固有値の収束性

片持ち板の座屈固有値の収束状況を縦横比 $\beta=1$ 、すなわち正方形板の場合について調べると図-2の結果となる。図-2で、縦軸は座屈固有値 λ_b で、横軸は試行関数の項数 N である。項数の増加に伴って固有値は収束し、固有値は $N=10$ 項で収束したと見なせる。したがって、本解析では $N=10$ の10項近似を用いる。

4.2 はりの横倒れ座屈との比較

解析の精度を直接比較する資料がないので、文献1)のはりの横倒れ座屈の解析結果と比較すると図-3の結果と

なる。このとき、はりの厚さ h と幅 b との比を1/10にする。縦軸は対数表示で座屈固有値 λ_b を取り、横軸は縦横比 β を取っている。縦横比が5を越えると板とはりとの結果がほぼ一致する。はりで近似できる平板の結果が一致していることから、本解析の解析結果は妥当と思われる。また、図-3により、 β は5より大きい場合には板ははりとして取り扱える。

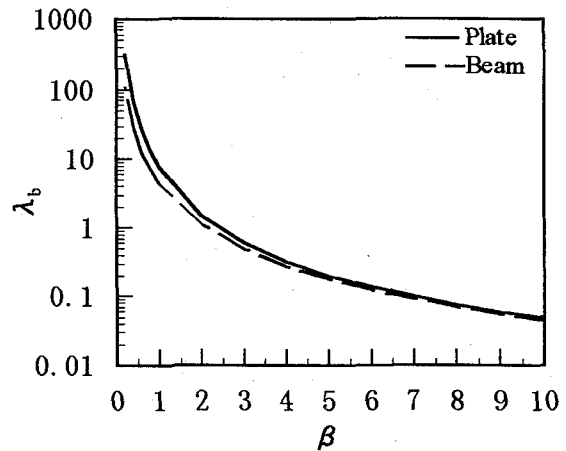
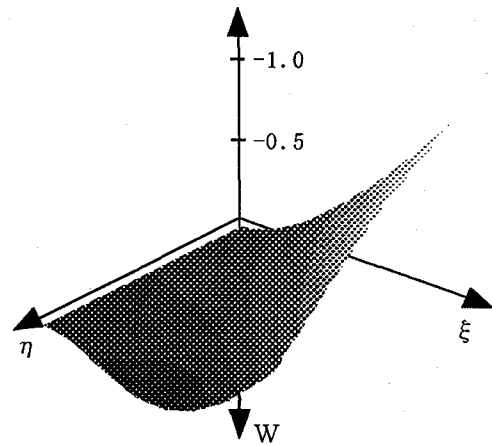
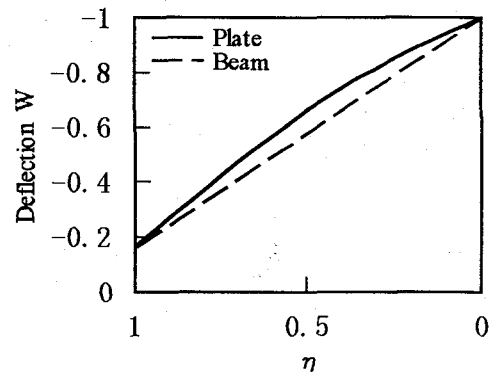


図-3 板とはりの座屈固有値曲線(ポアソン比 $\nu=0.3$)



(a) 座屈モード



(b) 自由端($\xi=1$)における変形状

図-4 正方形板の座屈モード($\beta=1$)

4. 3 座屈モード

図-4に正方形板の座屈モードを示す。モードの等高線を濃淡を付けて表示しており、淡いほど変形が大きいことを意味する(図-4(a))。自由端における波形に明らかなようにたわみとねじれを伴った波形で座屈していることがわかる(図-4(b))。はりの横倒れ座屈モードと異なって、平板では断面の曲げ変形が含まれていることが確認できる。

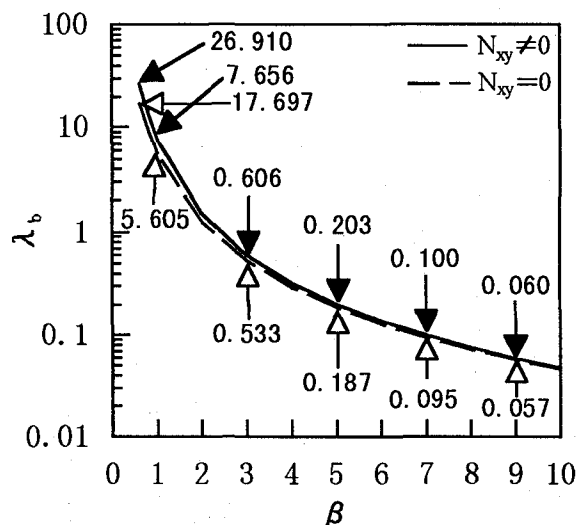


図-5 面内力 N_{xy} の座屈固有値への影響

4. 4 面内せん断力の座屈固有値への影響

図-5は面内せん断力を考慮する場合($N_{xy} \neq 0$)と無視した場合($N_{xy} = 0$)の座屈曲線である。縦軸は対数表示で座屈固有値 λ_b を取り、横軸は縦横比 β を取っている。縦横比 β は小さいとき、両曲線には差がある。つまり、面内せん断力が座屈固有値に及ぼす影響は縦横比 β が小さい場合に無視できない。

5. 振動特性

表-1 片持ち板の固有振動数($\beta=1$)

振動次数	本法	文献7)
1st	3.484	3.494
2nd	8.521	8.547
3rd	21.38	21.44
4th	27.28	27.46
5th	31.07	31.17

5. 1 固有振動数の精度

正方形板に静的集中荷重が作用しない場合の固有振動数の精度を調べる。本研究で得られた無次元固有振動数 λ_v^2 と文献7)の固有振動数 λ_v^2 との比較を行った結果は

表-1である。なお、文献7)の数値結果はRayleigh-Ritz法で計算された近似固有振動数であり、本法の解は固有振動数が収束したと見なされる項数 $N=10$ の結果である両者はほぼ一致している。

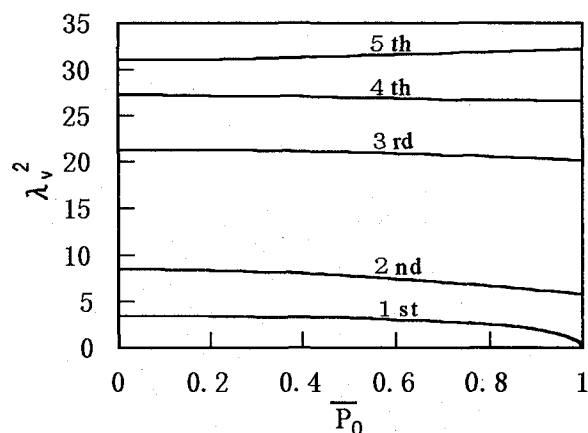


図-6 固有振動数に及ぼす静的集中荷重の影響($\beta=1$)

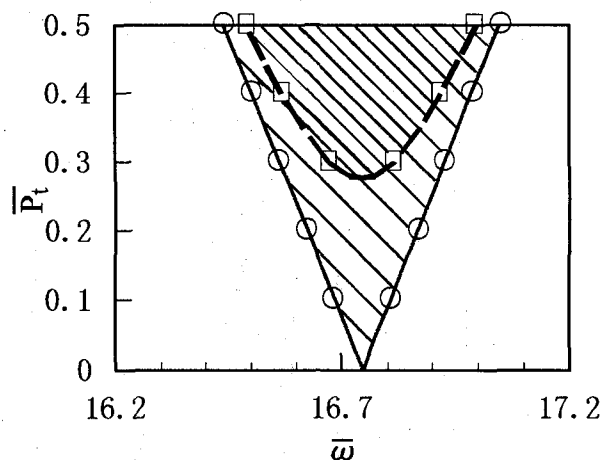


図-7 安定解析と数値シミュレーションによる不安定領域との比較($\beta=1, \bar{P}_0=0, \omega_{13}+\omega_{22}$). $\circ, \square$: シミュレーション, —: $h_{13}=h_{22}=0$, - - : $h_{13}=h_{22}=0.01$.

5. 2 固有振動数に及ぼす静的荷重の影響

図-6は静的集中荷重が作用する場合の1次から5次までの固有振動曲線である。縦軸は無次元固有振動数 λ_v^2 を取り、横軸は無次元された静的集中荷重 $\bar{P}_0$ を取っている。5次固有振動数は静的集中荷重の増加によって大きくなるが、1次から4次までの固有振動数が小さくなる。次数が低いほど、静的集中荷重が大きくなるにつれて、固有振動数は減少する。なお、静的集中荷重が座屈荷重($\bar{P}_0=1$)の大きさのときに1次固有振動数は0となる。なお、面内曲げによる平板の面内応力には圧縮応力と引張応力が存在するため、固有振動形によっては引張力の影響が効いてくる。このため、5次固有振動数が静的荷重の増大とともに大きくなるものと考えられる。

6. 動的不安定領域

6. 1 安定解析の精度

安定解析により、得られた不安定領域の精度を確かめるため、縦横比 $\beta=1$ の場合に結合共振 $\omega_{13} + \omega_{22}$ (T_{13}, T_{22} が発生する) の不安定領域について、安定解析と Runge-Kutta-Gill 法による数値シミュレーションとの結果を図-7に表す。図-7において縦軸は無次元動的集中荷重の振幅 $\bar{P}_t$ を示し、横軸は1次の固有振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ を示す。図-7において実線で囲まれた部分が減衰力を考慮しない場合 ($h_{13} = h_{22} = 0$)、点線で囲まれた部分が減衰力を考慮した場合 ($h_{13} = h_{22} = 0.01$) の安定解析による不安定領域の境界線を表す。○と□は同じ条件で数値シミュレーションによって不安定領域の境界である。安定解析と数値シミュレーションから得られた不安定領域が一致しており、安定解析の精度は十分と言える。

6. 2 不安定領域の性質

図-8は縦横比 $\beta=1$ の不安定領域を表す。本研究では1次振動の20倍までの励振振動数の範囲の不安定領域を議論の対象とし、不安定領域の励振振動数幅が $\bar{P}_t = 0.5$ にお

いて0.1以下の不安定領域を省略する。

また、図-8には単純共振の副不安定領域 ω_{ij} と結合共振の主不安定領域 $\omega_{ij} + \omega_{mn}$ が得られている。不安定領域の幅は結合共振が単純共振よりも広い。これは面内静的集中荷重を受ける場合の板の座屈モードが自由端方向に振動の対称モードと逆対称モードで合成されて表されるためである。また、係数励振行列 $[G]$ より明らかなように、集中荷重を受ける場合は連成項を通じて直接項が励振されるため、図-8のように単純共振の幅は狭い。したがって、面内変動集中荷重を受ける場合の平板の動的不安定領域は結合共振が支配的であると言える。

6. 3 パラメータの影響

(1) 縦横比

$\beta=10$ の場合の不安定領域を図-9に示す。図-8と9を比較すると、縦横比 β が大きくなるにつれて、不安定領域の種類が少なくなる。これは1次固有振動数に比較して、他次数の固有振動数が高くなるので、現れる振動数が少なくなるためである。 $\beta=10$ のはりに近い場合には、先端に周期的変動荷重を受けるはりの動的不安定領域に対

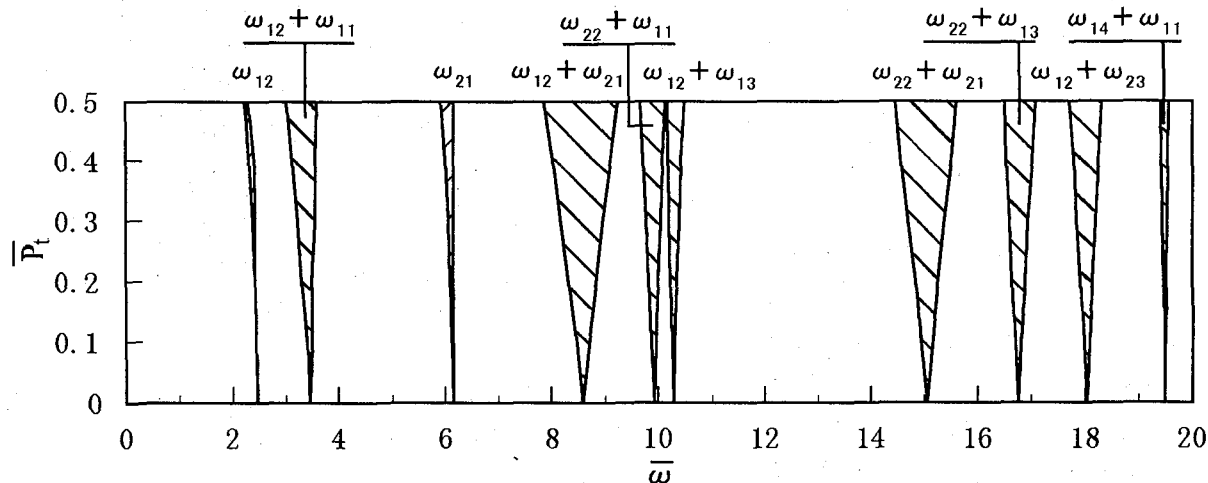


図-8 不安定領域 ($\beta=1, h_{ij}=0, \bar{P}_0=0, \omega_{ij}$: 単純共振, $\omega_{ij} + \omega_{mn}$: 結合共振)

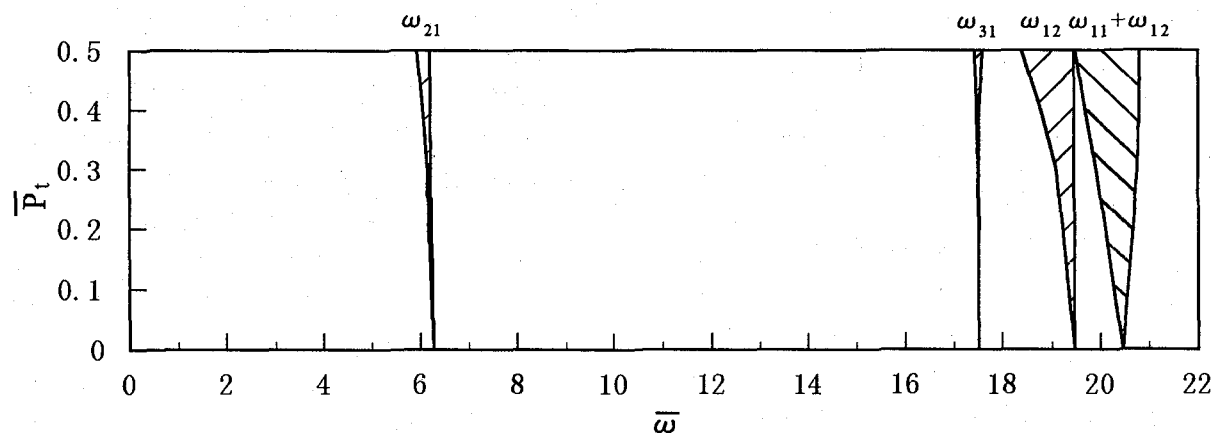


図-9 不安定領域 ($\beta=10, h_{ij}=0, \bar{P}_0=0$)

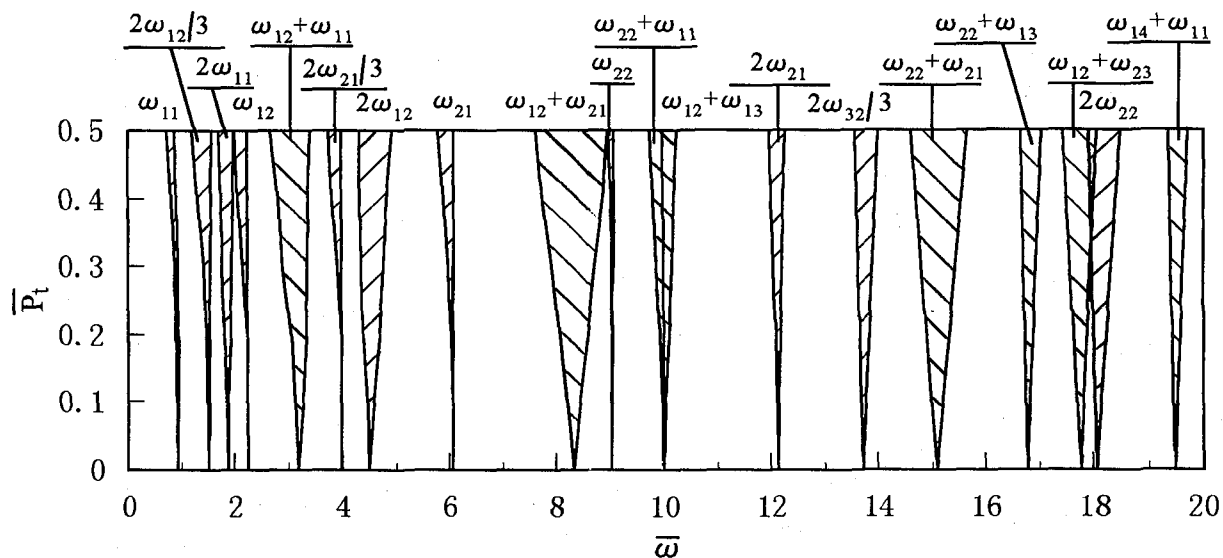


図-10 不安定領域 ($\beta=1, h_{ij}=0, \bar{P}_0=0.5$)

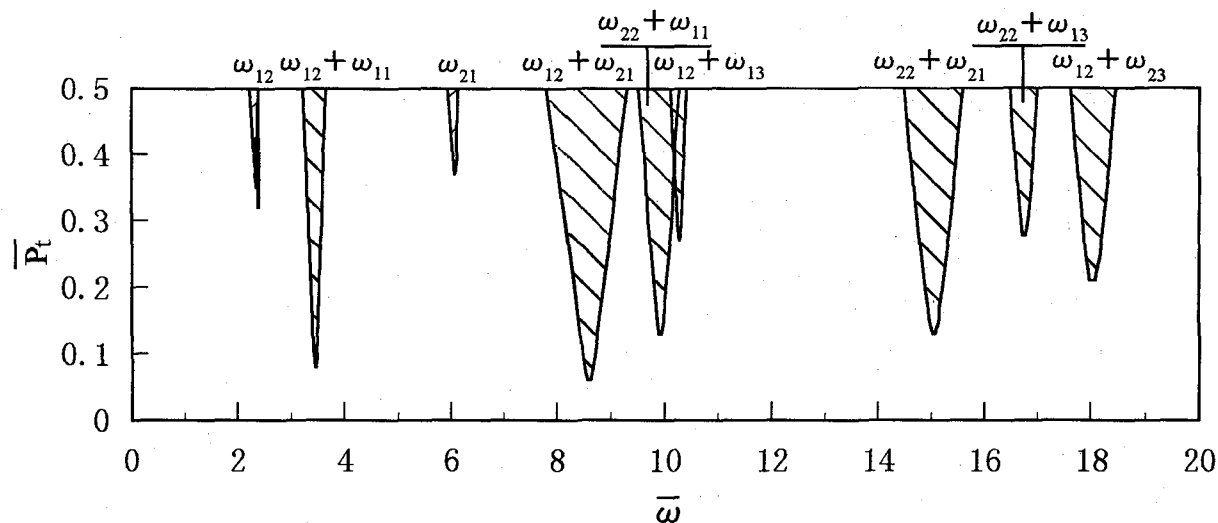


図-11 不安定領域 ($\beta=1, h_{ij}=0.01, \bar{P}_0=0$)

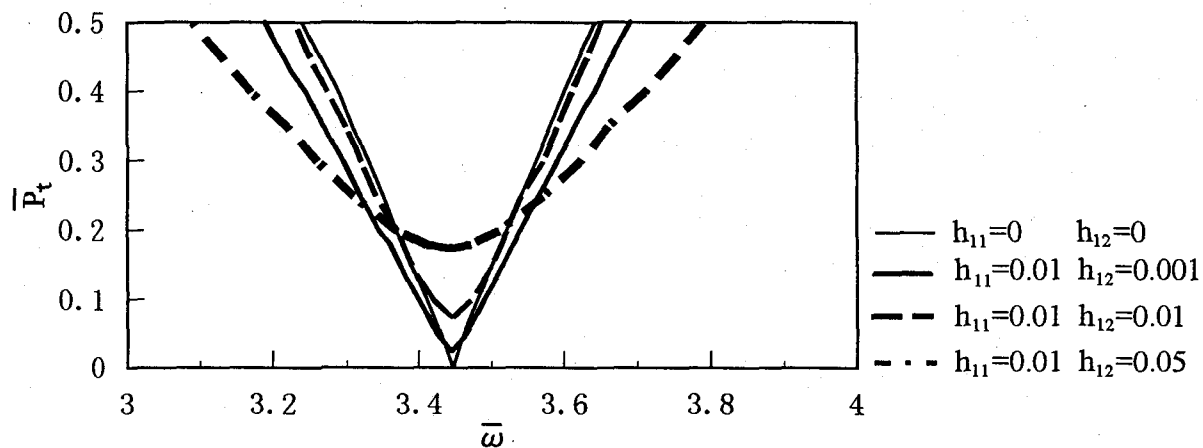


図-12 不安定領域に及ぼす減衰定数の影響 ($\beta=1, \bar{P}_0=0, \omega_{11}+\omega_{12}$)

応し、曲げとねじりのモードをもつ $\omega_{11} + \omega_{12}$ が広い不安定領域となっている。

(2) 静的荷重

図-10 は、静的面内集中荷重が座屈荷重の 50% ($\bar{P}_0 = 0.5$) が作用させた場合の不安定領域である。静的集中荷重が作用しない ($\bar{P}_0 = 0$) 場合の図-8 と比較すると静的荷重は一般に平板の剛性を小さくするので、固有振動数が減少し、不安定領域の幅を広くする効果を持つ。このため、単純共振の主不安定領域 $2\omega_y$ や第 2 副不安定領域 $2\omega_y/3$ が現れ、不安定領域の種類も多くなる。

(3) 減衰定数

図-11 は減衰を考慮した場合 ($h_y = 0.01$) の不安定領域である。減衰を無視した場合 ($h_y = 0$) の図-8 と比較すると、減衰を考慮する場合には幅が狭い不安定領域が安定領域になり、高次振動領域にある不安定領域は減衰の影響が大きく受ける。

図-12 は減衰定数の大きさの組み合わせによる結合共振 $\omega_{11} + \omega_{12}$ の不安定領域の変動を示すものである。2つの減衰定数 (h_{11}, h_{12}) のうちに、 h_{11} を固定し、 h_{12} を変動させる。減衰定数 h_{12} が増加につれて、無次元動的荷重 $\bar{P}_t$ が小さい場合には、不安定領域が狭くなる。但し、 $\bar{P}_t$ が大きい場合には不安定領域の幅が必ずしも狭くなるとは限らない。図のように減衰を考慮した場合が不安定領域がかえって広がる。これは脱安定化効果⁶⁾と呼ばれており、結合共振の不安定領域を評価する場合は減衰力の影響を考慮する必要がある。

7. まとめ

本研究では片持ち長方形板の自由端に沿って面内曲げ集中荷重が作用する場合を対象に、座屈、振動および動的安定性の解析を行い、それらの特性を明らかにしたものである。

本解析によって明らかになったことを要約すると

- (1) 自由辺に平行に面内集中荷重が作用する場合の座屈固有値は縦横比の増加とともに単調に減少する。縦横比が大きくなると、はりの横倒れ座屈固有値に一致する。
- (2) 自由端に面内集中荷重が作用すると長方形板には面内垂直力と面内せん断力が作用する。面内せん断力の影響は縦横比が小さい場合には無視できない。したがって、平板を取り扱う場合、面内せん断力の影響は無視することができない。
- (3) 静的面内集中荷重は長方形板の固有振動数に影響を及ぼす。1 次固有振動数は座屈荷重の大きさの時に 0 となる。
- (4) 面内変動集中荷重を受ける長方形板の動的不安定領域の種類は単純共振と結合共振であるが、結合共振の動

的不安定領域の幅は単純共振によるものより広い。

(5) 縦横比が大きくなると、動的不安定領域の種類は減少し、その領域の広さも変化する。縦横比が大きい場合の動的不安定領域は、はりの動的不安定領域に対応する曲げてねじりの不安定領域が卓越する。

(6) 静的集中荷重は構造物の剛性を低下させるため、動的不安定領域の幅が広くなり、その種類も多くなる。

(7) 減衰力は狭い不安定領域を安定領域に替え、その影響は高次の不安定領域に強く表れる。ただし、結合共振については、減衰定数の大きさによっては不安定領域が広がる可能性がある。

本研究では片持ち長方形板を取り扱ったが、今後、自由な対辺にフランジを取り付けてプレートガーダーとして取り扱う予定である。これについては別途報告する。なお、本研究を行うにあたり、長崎大学大学院生の大田晶一氏に多大な援助を得た。ここに、感謝の意を表す。そして、数値計算には長崎大学の総合情報処理センターの FACOM VP-1200 モデル 10 を使用したことを付記する。

Appendix A はりの固有関数の定積分

$$\begin{aligned}
 I_{mr}^1 &= \int_0^1 h_m h_r d\xi, & \bar{I}_{ns}^1 &= \int_0^1 \bar{h}_n \bar{h}_s d\eta, \\
 I_{mr}^2 &= \int_0^1 h_{2m} h_{2r} d\xi, & \bar{I}_{ns}^2 &= \int_0^1 \bar{h}_{2n} \bar{h}_{2s} d\eta, \\
 I_{mr}^3 &= \int_0^1 h_m h_{2r} d\xi, & \bar{I}_{ns}^3 &= \int_0^1 \bar{h}_n \bar{h}_{2s} d\eta, \\
 I_{mr}^4 &= \int_0^1 h_{2m} h_r d\xi, & \bar{I}_{ns}^4 &= \int_0^1 \bar{h}_{2n} \bar{h}_s d\eta, \\
 I_{mr}^5 &= \int_0^1 h_{1m} h_{1r} d\xi, & \bar{I}_{ns}^5 &= \int_0^1 \bar{h}_{2n} \bar{h}_{2s} d\eta, \\
 I_{mr}^6 &= \int_0^1 (1-\xi) h_{1m} h_{1r} d\xi, & \bar{I}_{ns}^6 &= \int_0^1 \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \bar{h}_n \bar{h}_s d\eta, \\
 I_{mr}^7 &= \int_0^1 h_m h_{1r} d\xi, & \bar{I}_{ns}^7 &= \int_0^1 \left\{ 4 \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right\} \bar{h}_{1n} \bar{h}_s d\eta, \\
 I_{mr}^8 &= \int_0^1 h_{1m} h_r d\xi, & \bar{I}_{ns}^8 &= \int_0^1 \left\{ 4 \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right\} \bar{h}_n \bar{h}_{1s} d\eta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_m &= \cos \lambda_m a \xi - \cosh \lambda_m a \xi \\
 &\quad + \alpha_m (\sin \lambda_m a \xi - \sinh \lambda_m a \xi), \\
 h_{1m} &= \lambda_m a \{ -\sin \lambda_m a \xi - \sinh \lambda_m a \xi \\
 &\quad + \alpha_m (\cos \lambda_m a \xi - \cosh \lambda_m a \xi) \}, \\
 h_{2m} &= (\lambda_m a)^2 \{ -\cos \lambda_m a \xi - \cosh \lambda_m a \xi \\
 &\quad + \alpha_m (-\sin \lambda_m a \xi - \sinh \lambda_m a \xi) \}.
 \end{aligned}$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \lambda_m a - \sinh \lambda_m a}{\cos \lambda_m a + \cosh \lambda_m a}.$$

n=1 の場合
 $\bar{h}_n = 1, \bar{h}_{1n} = \bar{h}_{2n} = 0,$

n=2 の場合
 $\bar{h}_n = (1-2\eta)\sqrt{3}, \bar{h}_{1n} = -2\sqrt{3}, \bar{h}_{2n} = 0,$

n ≥ 3 の場合
 $\bar{h}_n = \{ \cosh \mu_n b \eta + \cos \mu_n b \eta$

$$\begin{aligned}
& -\beta_n (\sinh \mu_n b \eta + \sin \mu_n b \eta) \Big\}, \\
\bar{h}_{1n} &= \mu_n b \Big\{ \sinh \mu_n b \eta - \sin \mu_n b \eta \\
& -\beta_n (\cosh \mu_n b \eta + \cos \mu_n b \eta) \Big\}, \\
\bar{h}_{2n} &= (\mu_n b)^2 \Big\{ \cosh \mu_n b \eta - \cos \mu_n b \eta \\
& -\beta_n (\sinh \mu_n b \eta - \sin \mu_n b \eta) \Big\}. \\
\beta_n &= \frac{\cosh \mu_n b - \cos \mu_n b}{\sinh \mu_n b - \sin \mu_n b}.
\end{aligned}$$

Appendix B 定積分 $A_{mn}^{kl}, B_{mn}^{kl}, C_{mn}^{kl}$

$$\begin{aligned}
A_{mn}^{kl} &= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\beta^4} \bar{W}_{mn, \xi \xi} \bar{W}_{kl, \xi \xi} + \bar{W}_{mn, \eta \eta} \bar{W}_{kl, \eta \eta} + \frac{\nu}{\beta^2} \right. \\
& \left. \left(\bar{W}_{mn, \xi \xi} \bar{W}_{kl, \eta \eta} + \bar{W}_{mn, \eta \eta} \bar{W}_{kl, \xi \xi} \right) + \frac{2(1-\nu)}{\beta^2} \bar{W}_{mn, \xi \eta} \bar{W}_{kl, \xi \eta} \right\} d\xi d\eta, \\
B_{mn}^{kl} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[8 \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \xi \right) \bar{W}_{mn, \xi} \bar{W}_{kl, \xi} + \left\{ 4 \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right\} \right. \\
& \left. \left(\bar{W}_{mn, \xi} \bar{W}_{kl, \eta} + \bar{W}_{mn, \eta} \bar{W}_{kl, \xi} \right) \right] d\xi d\eta, \\
C_{mn}^{kl} &= \int_0^1 \int_0^1 \bar{W}_{mn} \bar{W}_{kl} d\xi d\eta, \\
\bar{W}_{uv} &= \sum_{m=1}^u a_m^u h_m \sum_{n=1}^v a_n^v \bar{h}_n, \\
\bar{W}_{uv, \xi \eta} &= \sum_{m=1}^u a_m^u h_m \sum_{n=1}^v a_n^v \bar{h}_n, \\
\bar{W}_{uv, \xi \xi} &= \sum_{m=1}^u a_m^u h_m \sum_{n=1}^v a_n^v \bar{h}_n, \\
\bar{W}_{uv, \eta \eta} &= \sum_{m=1}^u a_m^u h_m \sum_{n=1}^v a_n^v \bar{h}_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{W}_{uv, \xi} &= \sum_{m=1}^u a_m^u h_m \sum_{n=1}^v a_n^v \bar{h}_n, \\
\bar{W}_{uv, \eta} &= \sum_{m=1}^u a_m^u h_m \sum_{n=1}^v a_n^v \bar{h}_n
\end{aligned}$$

ここに, a_m^u, a_n^v : モード定数,

$h_m, h_{1m}, h_{2m}, \bar{h}_n, \bar{h}_{1n}, \bar{h}_{2n}$ ($m, n, k, l, u, v=1, 2, \dots, N$)
(Appendix A を参照).

参考文献

- 1) C.R.C.Japan : Handbook of Structural Stability, Corona, pp.1-112, 1971.
- 2) 高橋和雄, 古谷寿章, 其田智洋, 夏秋義広 : Pasternak 基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の振動, 座屈および動的安定性, 土木学会論文集, No.519/I-32, pp. 175~184, 1995.7.
- 3) 関谷壮, 斉藤渥 : 薄板構造力学, 共立出版, pp.83~95, 1968.
- 4) 林 : 軽構造の理論とその応用(上), 日科技連出版社, pp.448~453, 1967.
- 5) 近藤恭平 : 振動論, 培風館, pp.278~281, 1993.
- 6) Takahashi, K. : Parametric Instability of a Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.257~262, 1982.
- 7) Leissa, A.W. : Vibration of Plates, NASA SP-160, p.76, 1969.

(1996年9月6日受付)