

偏平アーチの非線形振動解析 —多自由度系としての解析—

Nonlinear Vibrations of an Arch with Small Rise —Multi-degree-of-freedom Approach—

高橋和雄*, 太田晶一**

Kazuo TAKAHASHI and Shouichi OHTA

* 工博 長崎大学 教授 社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

** 長崎大学大学院 工学研究科社会開発工学専攻 (〒852 長崎市文教町1番14号)

Nonlinear free and forced vibrations of an arch with small rise are presented in this paper. The Multi-degree-of-freedom approach is employed. The basic equation of motion is solved by a Galerkin method and the resulting time variable is solved by the harmonic balance method for periodic vibration and Runge-Kutta-Gill method for chaotic vibration. Chaotic vibration is obtained by using bifurcation diagram, Poincaré map and power spectrum in this study. Nonlinear free vibration of the third mode (i.e., the second symmetric mode) and nonlinear forced vibrations near the first natural frequency range are discussed for various rise ratios and damping constants. The chaotic vibration near the first natural frequency range is obtained and discussed.

Key Words: arch with small rise, nonlinear vibration, bifurcation, chaos,
multi-degree-of-freedom approach

1. まえがき

近年,構造物の大規模化,都市景観への関心の高まりおよび構造部材の使用効率の良さなどから,長さ比べて板厚が小さい薄肉材や薄板が採用されている.この種の薄肉構造部材では,製作過程,支持部の出来具合および自重の影響などによってライズが必ず存在する.このようなライズをもつはりや軸方向圧縮力を受けて座屈したはり,偏平アーチとみなすことができる.このような偏平アーチを1自由度系とみなした解析はかなり行われている(文献1の文献参照).著者らは,偏平アーチを1自由度系に近似し,非線形振動特性に及ぼすライズ比の影響およびカオスの存在について明らかにした¹⁾.

偏平アーチは連続体であるから,多自由度系としての解析が必要である.多自由度系としての解析により,応答の精度の向上および非線形連成現象を評価することができる.さらに,1自由度系としての解析の妥当性を明らかにすることができる.現在,多自由度系としての解析について,弦のカオス振動解析²⁾,座屈したはりのカオス振動現象³⁾,座屈した板のフラッター解析⁴⁾および偏平アーチの動座屈解析⁵⁾などの研究が数多く行われている.

本研究の対象としている偏平アーチの非線形振動について多自由度系としての振動モード間の連成の影響を明らかにした解析は未だ行われていないようである.

そこで,本研究では,偏平アーチを2自由度近似し,3次

振動の非線形振動特性および1次振動近傍の分岐振動に及ぼす3次振動の影響を明らかにするものである^{註1)}.

その第一段階として,両端で軸方向変位が拘束された偏平アーチの運動方程式を,多自由度の振動系にモデル化した後,Galerkin法を用いて常微分方程式に変換する.次に,両端がヒンジで支えられた偏平アーチについて2自由度系に近似し,常微分方程式の周期解を求めるために調和バランス法を用いて,連立非線形代数方程式に変換し,Newton-Raphson法により数値解析を行う.また,カオスおよび非周期解に関しては,Runge-Kutta-Gill法による時間応答解析を用い,数値計算において,3次振動の自由振動および強制振動特性を検討し,3次振動の非線形応答に及ぼす偏平アーチの形状パラメーターであるライズ比および減衰定数の影響について明らかにする.さらに,1次振動の1/2分数調波共振近傍に現れているカオス¹⁾について,3次振動の影響を評価する.

注1) 本論文では対称な偏平アーチに対称に分布する荷重が作用する場合を考慮するので,直接励振される振動は対称振動である.固有振動形は1次振動と3次振動が励振されるので,1次振動と3次振動と呼ぶことにする.なお,対称振動によって逆対称振動が係数励振されて発生するが,本論文では係数励振振動による連成現象は取り扱わない.

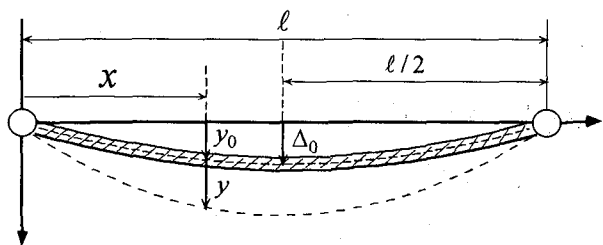


Fig.1 Geometry of arch with shallow rise.

2. 多自由度系としての運動方程式の誘導

Fig.1 に示すような偏平アーチ（ライズの大きさがはりの回転半径程度）に周期的変動荷重が作用する場合の非線形曲げ振動の運動方程式は次のように与えられる¹⁾。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = p_0 \cos \Omega t \quad (1)$$

ここに、 E ：ヤング率、 I ：断面 2 次モーメント、 ρ ：密度、 A ：断面積、 l ：スパン長、 y ：たわみ、 x ：スパン方向の座標、 y_0 ：初期形状、 p_0 ：荷重強度、 Ω ：荷重の円振動数、 t ：時間。

初期形状は境界条件を満足しなければならないので、次のように関数表示されるものとする。

$$y_0 = \Delta r \bar{X}(x) \quad (2)$$

ここに $\Delta = \Delta_0 / r$ ：ライズ比、 Δ_0 ：ライズ、 r ：回転半径、 $\bar{X}(x)$ ：初期形状の形状関数。

式(1)の解を次の変数分離形に仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (3)$$

ここに、 X_n ：座標関数、 T_n ：未知の時間関数。

式(3)の座標関数 X_n としてライズが零の直線ばりの固有振動形を用いる。式(2)、式(3)を式(1)に代入し、Galerkin 法を適用すれば次のような時間に関する多自由度の連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \Delta^2 S_n^0 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^0 T_k + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(Q_k^0 R_{ln} + \frac{1}{2} S_n^0 P_{kl} \right) T_k T_l + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^n T_k T_l T_m = \gamma_n p \cos \bar{\omega} \tau \quad (4)$$

ここに、 $\alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^2$ 、 $S_n^0 = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^l \frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} X_n d\xi$ 、

$$Q_k^0 = \int_0^l \frac{d\bar{X}}{d\xi} \frac{dX_k}{d\xi} d\xi, \quad R_{ln} = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^l \frac{d^2 X_l}{d\xi^2} X_n d\xi,$$

$$P_{kl} = \int_0^l \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi,$$

$$\beta_{klm}^n = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi \int_0^l \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} X_n d\xi / \left(\lambda_1^4 x_n \right),$$

$$\gamma_n = \int_0^l X_n d\xi / \left(\lambda_1^4 x_n \right), \quad x_n = \int_0^l X_n^2 d\xi, \quad \xi = x / l,$$

$$p = p_0 l^4 / EI r, \quad \lambda_1 = l^4 \sqrt{\rho A \omega_1^2 / EI}, \quad \bar{\omega} = \Omega / \omega_1, \quad \omega_1 : \text{ライズ}$$

のないはりの線形 1 次固有円振動数、 $\tau = \omega_1 t$ 。

3. 2 自由度系としての解法

3.1 両端ヒンジの偏平アーチへの適用

両端ヒンジの偏平アーチが、ライズの形状関数 $\bar{X} = \sin \pi \xi$ をもつ場合の対称振動を考える。系を 1 次振動と 3 次振動の 2 自由度系と仮定し線形減衰力を考慮すれば、式(4)は次式となる。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1 \alpha_1 \dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 + \frac{3}{4} \Delta T_1^2 + \frac{9}{4} \Delta T_3^2 + \frac{9}{4} T_1 T_3^2 + \frac{1}{4} T_1^3 = \frac{4}{\pi} p \cos \bar{\omega} \tau \quad (5)$$

$$\ddot{T}_3 + 18h_3 \dot{T}_3 + 81T_3 + \frac{9}{2} \Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4} T_1^2 T_3 + \frac{81}{4} T_3^3 = \frac{4}{3\pi} p \cos \bar{\omega} \tau \quad (6)$$

ここに、 h_1, h_3 ：減衰定数、 $\alpha_1 = \sqrt{1 + \Delta^2 / 2}$ 。

式(5)、(6)はライズの形状が正弦波の場合の偏平アーチの 1 次、3 次振動の連立非線形運動方程式である。式(5)、(6)は連立の 2 次の非線形項をもつ Duffing の方程式である。非線形運動方程式には主調波応答の他に、高調波共振、分数調波共振、超分数調波共振およびカオスなどの各種の現象が存在しうが、本論文ではまえがきに述べたように偏平アーチの形状パラメーターが 3 次振動に及ぼす影響および 1 次振動の 1/2 分数調波共振近傍に現れるカオスに及ぼす 3 次振動の影響を評価する。

T_1 および T_3 の自乗、3 乗の項が無視できる線形振動に注目すると、1 次振動の固有円振動数 $n_1 = \sqrt{1 + \Delta^2 / 2}$ はライズ比の影響を受けるのに対して、3 次振動の固有振動数 $n_3 = 9$ はライズ比の大きさに無関係である。

次に、非線形自由振動 ($p = 0$) に注目して、1 次振動 T_1 が発生した場合を考える。式(6)に 1 次振動の単独項が含まれていないため、3 次振動 T_3 は直接加振されない。つまり 1 次振動が単独に生じ得る。したがって、1 次非線形自由振動については、前報 1) の 1 自由度系としての取り扱いで十分である。しかし、式(6)において T_1 の項が $\frac{9}{2} \Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4} T_1^2 T_3$ のように T_3 に関する方程式の係数として含まれるため、 T_1 が周期振動する場合には、式(6)は係数励振型の運動方程式となる。このため、特別なライズ比でのみ T_3 が分岐的に発生しうる。これについては別途取り扱う必要がある。

一方、3 次振動 T_3 が生じた場合、1 次振動の運動方程式(5)に 3 次振動の単独項 ΔT_3^2 が含まれているため、 ΔT_3^2 の項が外力となり 1 次振動 T_1 が加振される。したがって、3 次非線形自由振動は 1 次振動と連成するため、1 自由度系としての取り扱いが不可能で、多自由度系として取り扱う必要がある。

なお、強制振動の場合 ($p \neq 0$) を考えると、1 次および 3 次振動ともに加振されるため、多自由度系としての取

り扱いが必要である。なお、ライズの形状が正弦波以外の場合には、式(5)および式(6)とは異なった T_1 と T_3 間の連成を示すことが予測される。

3.2 調和バランス法による解析

本研究では3次振動の自由振動、強制振動特性および文献1)で示した1次振動の1/2分数調波共振近傍に及ぼす3次振動の影響を明らかにする。1次振動の1/2分数調波共振は固有振動数の2倍付近に生ずる。この振動数領域には、3次振動の2倍の高調波共振が生ずる。また、3.1節で述べたように、式(5)に T_3^2 が含まれているため、3次振動が加振された場合 $T_3 = \cos \bar{\omega} \tau$ とすると、 $T_3^2 = (1 + \cos 2\bar{\omega} \tau)/2$ となる。このため、1次振動 T_1 に2倍の高調波共振成分が加振されることになる。以上のような理由から、式(5)、(6)の解を本論文では次式のように仮定する。

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{10} + c_{11/2} \cos \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + s_{11/2} \sin \frac{\bar{\omega} \tau}{2} \\ &\quad + c_{11} \cos \bar{\omega} \tau + s_{11} \sin \bar{\omega} \tau + c_{12} \cos 2\bar{\omega} \tau + s_{12} \sin 2\bar{\omega} \tau \\ &= c_{10} + A_{11/2} \cos \left(\frac{\bar{\omega} \tau}{2} - \phi_{11/2} \right) + A_{11} \cos (\bar{\omega} \tau - \phi_{11}) \\ &\quad + A_{12} \cos (2\bar{\omega} \tau - \phi_{12}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T_3 &= c_{30} + c_{31} \cos \bar{\omega} \tau + s_{31} \sin \bar{\omega} \tau \\ &\quad + c_{32} \cos 2\bar{\omega} \tau + s_{32} \sin 2\bar{\omega} \tau \\ &= c_{30} + A_{31} \cos (\bar{\omega} \tau - \phi_{31}) + A_{32} \cos (2\bar{\omega} \tau - \phi_{32}) \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 $A_{11} = \sqrt{c_{11}^2 + s_{11}^2}$ 、 $A_{31} = \sqrt{c_{31}^2 + s_{31}^2}$ 、 $A_{32} = \sqrt{c_{32}^2 + s_{32}^2}$ ：付随応答成分、 $A_{11/2} = \sqrt{c_{11/2}^2 + s_{11/2}^2}$ 、 $A_{12} = \sqrt{c_{12}^2 + s_{12}^2}$ ：分岐応答成分、 $\phi_{11/2} = \tan^{-1} \left(\frac{s_{11/2}}{c_{11/2}} \right)$ 、 $\phi_{11} = \tan^{-1} \left(\frac{s_{11}}{c_{11}} \right)$ 、 $\phi_{12} = \tan^{-1} \left(\frac{s_{12}}{c_{12}} \right)$ 、 $\phi_{31} = \tan^{-1} \left(\frac{s_{31}}{c_{31}} \right)$ 、 $\phi_{32} = \tan^{-1} \left(\frac{s_{32}}{c_{32}} \right)$ ：位相差、 $c_{10}, c_{11/2}, s_{11/2}, c_{11}, s_{11}, c_{12}, s_{12}$ ：1次振動の振幅成分、 $c_{30}, c_{31}, s_{31}, c_{32}, s_{32}$ ：3次振動の振幅成分。

式(7)、(8)を式(5)、(6)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られる。これにNewton-Raphson法を用いて解けば、定常振動の振幅成分が得られる。また、荷重強度を $p=0$ とすれば、非線形自由振動数 $\bar{\omega}$ と自由振動の振幅成分との関係が得られる。

3.3 時間応答解析

$T_1 = P_1, \dot{T}_1 = P_2, T_3 = P_3, \dot{T}_3 = P_4$ とおくと、式(7)、(8)は次に示す4個の1階常微分方程式に変換することができる。

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_2 \\ \dot{P}_2 &= -2h_1 \alpha_1 P_2 - \alpha^2 P_1 - \frac{3}{4} \Delta P_1^2 - \frac{9}{4} \Delta P_3^2 - \frac{9}{4} P_1 P_3^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} P_1^3 + \frac{4}{\pi} p \cos \bar{\omega} \tau \\ \dot{P}_3 &= P_4 \\ \dot{P}_4 &= -18h_3 P_4 - 81 P_3 - \frac{9}{2} \Delta P_1 P_3 - \frac{9}{4} P_1^2 P_3 - \frac{81}{4} P_3^3 \end{aligned} \quad (9)$$

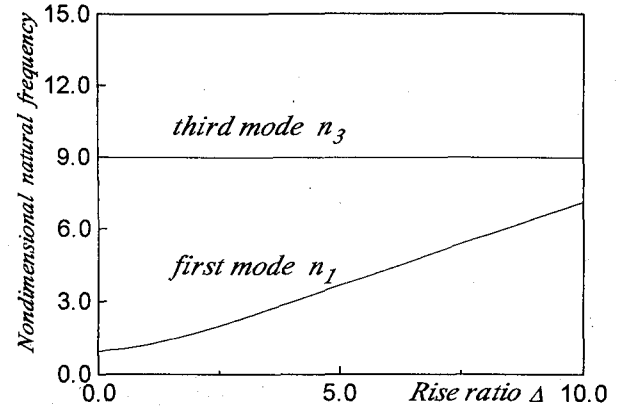


Fig.2 Nondimensional natural frequency vs. rise ratio.

$$+ \frac{4}{3\pi^5} p \cos \bar{\omega} \tau \quad (10)$$

この式にRunge-Kutta-Gill法を用いて、数値積分をして、時間応答解析を行う。時間応答解析によって周期解の精度の検討および各種の高調波共振・分数調波共振・カオスを明らかにすることができる。

4. 数値結果

4.1 線形自由振動の特性

Fig.2は、偏平アーチの1次および3次振動の線形固有振動数 n_1 、 n_3 とライズ比 Δ の関係を示す。ライズの大きさは回転半径 r 程度であるから¹⁾、ライズ比 Δ の大きさは10まで表示している。3.1節で述べたように1次振動の線形固有振動数はライズ比 Δ の影響を受け、ライズ比 Δ の増大と共に増加する。一方、3次振動の線形固有振動数は、ライズ比 Δ の影響を受けず一定値 $n_3 = 9.0$ をとる。式(4)の第3項において、偏平アーチの初期形状が正弦波 $\bar{X} = \sin \pi \xi$ で与えられ、かつ仮定した座標関数が固有関数 $X_n = \sin n \pi \xi$ で表される。この項の積分は直交性が成り立つため零となる。したがって、3次振動の線形固有振動数は初期形状すなわちライズの影響を受けない。

4.2 非線形自由振動の特性

Fig.3は、3次振動の非線形自由振動曲線を、Fig.4は1次振動の振幅の直流成分（静的応答成分） c_{10} と無次元振動数 $\bar{\omega}$ との関係を示したものである。Fig.5は1次振動の振幅の変動成分 c_{11} と無次元振動数 $\bar{\omega}$ との関係を示している。減衰定数 $h_1 = h_3 = 0.0$ の非減衰振動を対象としている。Fig.3の縦軸は回転半径で無次元化した無次元振幅 c_{31} 、横軸は非線形円振動数をライズがないはりの線形1次固有円振動数で無次元化した無次元振動数 $\bar{\omega}$ である。Fig.4の縦軸は1次振動の振幅の直流成分 c_{10} 、横軸は無次元振動数 $\bar{\omega}$ である。Fig.5の縦軸は1次振動の振幅の変動成分 c_{11} 、横軸は無次元振動数 $\bar{\omega}$ である。

3次振動の自由振動が起きると、1次振動と連成し、1次振動の2倍の高調波共振成分 $c_{12} \cos 2\bar{\omega} \tau$ が加振され、1次振動の直流成分 c_{10} がライズを打ち消す方向（符号

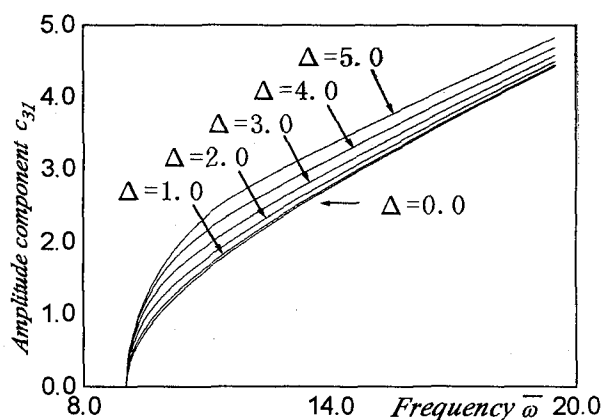


Fig.3 Amplitude-frequency curves of the third mode with $p = 0.0$ and $h_1 = h_3 = 0.0$.

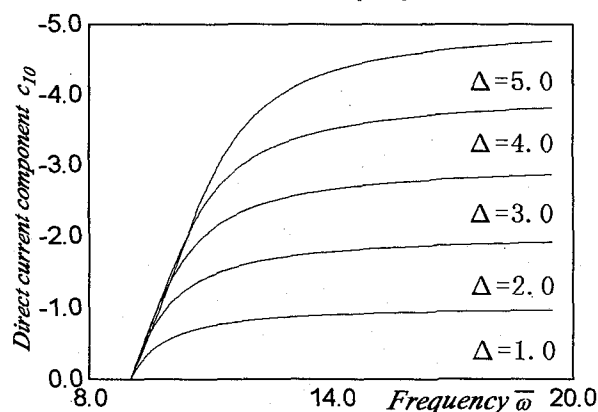


Fig.4 Direct current component-frequency curves of the first mode for various rise ratios.

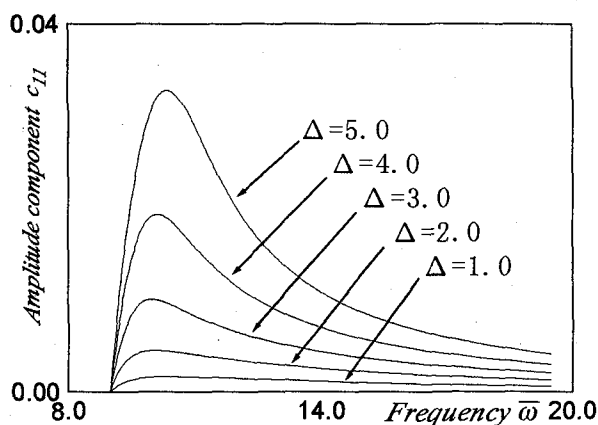


Fig.5 Amplitude-frequency curves of the first mode with $p = 0.0$ and $h_1 = h_3 = 0.0$.

がマイナスでライズと逆向き)に発生する (Fig.4). 1次振動において,変動成分 c_{11} は微小振動し (Fig.5), 直流成分 c_{10} は3次振動の自由振動の振幅 c_{31} が小さい時は,振動数にほぼ比例して増大する. 振幅 c_{31} が大きくなり,ある値を越えると直流成分 c_{10} は $-\Delta$ に漸近する (Fig.4). さらに,振幅が大きくなると, $\Delta + c_{10} \approx 0$ となり,ライズのないつまり直線ばりとしての振動をする.なお,3次振動は静的応答 c_{30} を発生しない.また, Fig.5 に示すように1次振動は連成して生ずるが,その振幅は小さい.

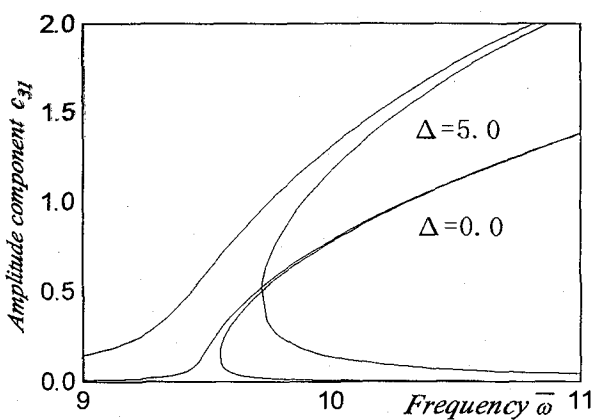


Fig.6 Frequency-response curves of the third mode with $p = 40.6$ ($\Delta = 0.0$), $p = 590.5$ ($\Delta = 5.0$) and $h_1 = h_3 = 0.0$.

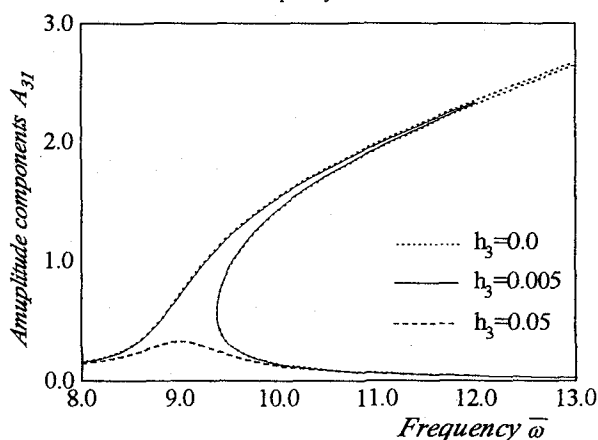


Fig.7 Frequency-response curves of the third mode with $\Delta = 3.0$, $p = 612.0$ and $h_1 = 0.005$.

以上のように,3次振動が生じると,連成項を介して1次振動の直流成分が発生し,文献1)で示した1自由度系と同じライズを打ち消す挙動を示す.

次に, Fig.3 で示した3次振動の振幅比と振動数の関係に注目すると,ライズの大きさに無関係に振幅とともに振動数が増加する硬化バネ特性⁶⁾を示す.ライズがある場合がない場合よりも非線形自由振動数の振幅依存性が小さくなるため,非線形項の影響が小さくなる.振幅比の大きさがライズ比程度まではライズ比の影響が大きい,振幅比が大きくなると小さくなる.

4.3 3次強制振動に及ぼすライズ比の影響

Fig.6 は,3次振動について強制振動の無次元加振振動数 $\bar{\omega}$ と無次元応答振幅との関係をライズ比 Δ をパラメーターに示したものである.荷重強度 p は加振振動数 $\bar{\omega} = 0.0$ のときの静的応答が回転半径の0.5倍となるように設定している.縦軸は無次元応答振幅 c_{31} を,横軸は無次元加振振動数 $\bar{\omega}$ を示している.1次振動では,ライズ比によって固有振動数が増加し,それに伴って主調波応答の共振領域も変動する¹⁾.しかし,3次振動ではライズ比 Δ に無関係に固有振動数 ($\bar{\omega} = 9.0$) は一定である

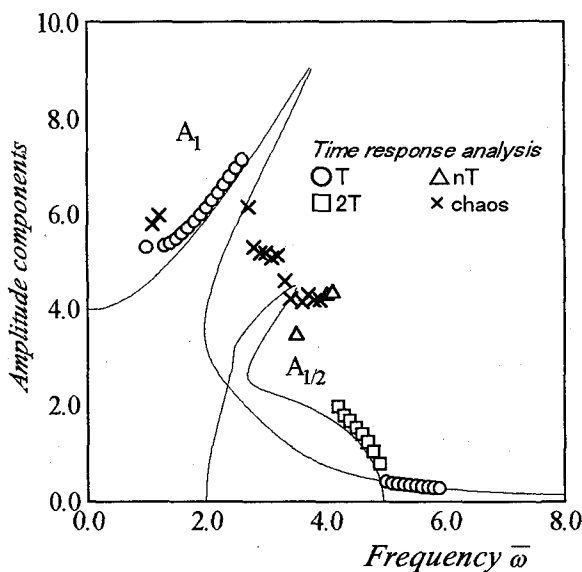


Fig. 8 Frequency-response curves with $\Delta = 3.0$, $h_1 = 0.05$ and $p = 612.0$ (single-d.o.f.).

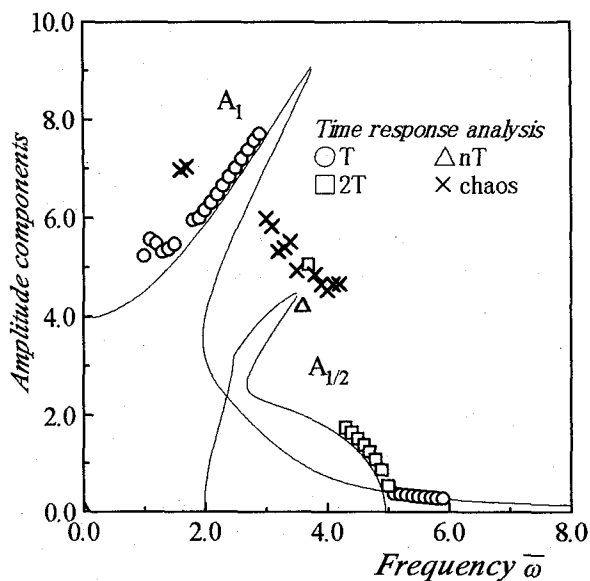


Fig. 9 Frequency-response curves with $\Delta = 3.0$, $h_1 = h_3 = 0.05$ and $p = 612.0$ (two-d.o.f.).

ので、主調波応答の共振領域もライズ比 Δ に影響を受けず一定である。また、ライズ比が大きくなるにしたがって、応答振幅が大きくなることが確認できる。

4.4 3次強制振動に及ぼす減衰定数の影響

Fig. 7に、ライズ比 $\Delta = 3.0$ 、荷重強度 $p = 612.0$ について応答振幅 A_1 と無次元加振振動数 $\bar{\omega}$ の関係を減衰定数 h_3 をパラメーターに示す。3次強制振動に及ぼす減衰定数の影響は、文献1)で示した1次強制振動に及ぼす影響より大きい。

4.5 1次振動の1/2分数調波共振近傍のカオスに及ぼす3次振動の影響

Fig. 8, 9に、ライズ比 $\Delta = 3.0$ 、減衰定数 $h_1 = h_3 = 0.05$ の場

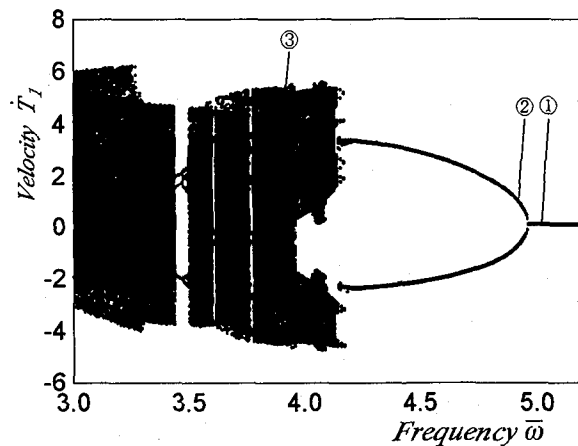


Fig. 10 Bifurcation diagram of single-d.o.f. with $\Delta = 3.0$, $h_1 = 0.05$ and $p = 612.0$.

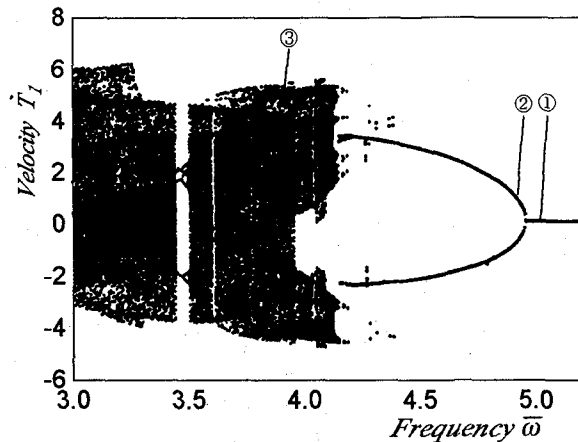


Fig. 11 Bifurcation diagram of the first mode with $\Delta = 3.0$, $h_1 = h_3 = 0.05$ and $p = 612.0$ (two-d.o.f.).

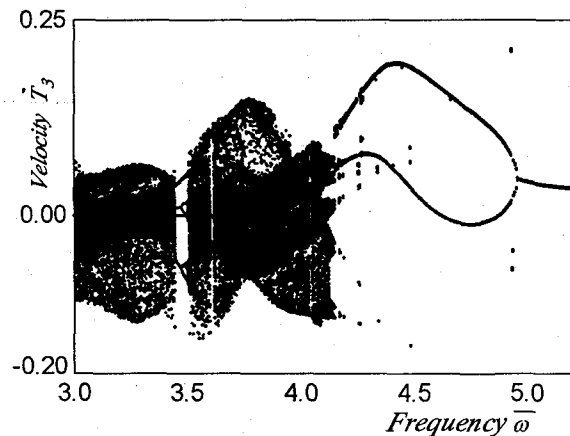
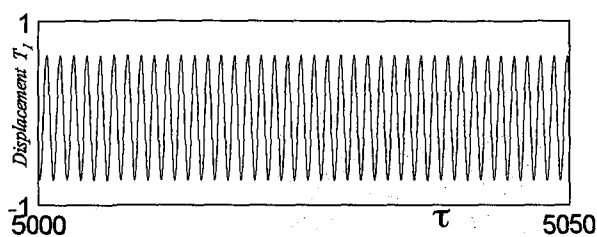
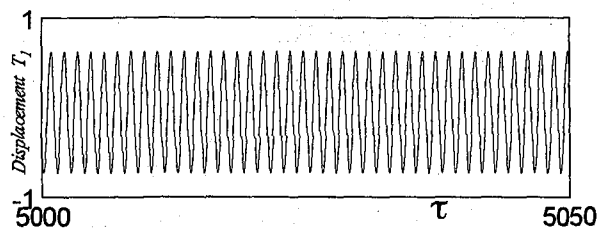


Fig. 12 Bifurcation diagram of the third mode with $\Delta = 3.0$, $h_1 = h_3 = 0.05$ and $p = 612.0$ (two-d.o.f.).

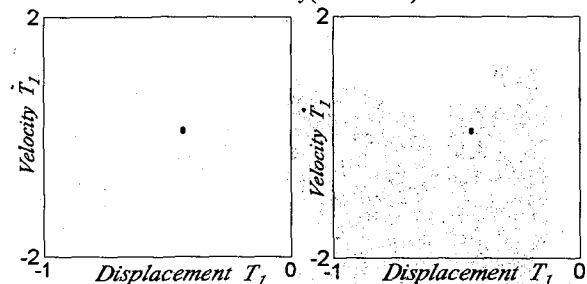
合の応答振幅 A_1 と無次元加振振動数 $\bar{\omega}$ との関係を示す。Fig. 8 は 1 自由度系の結果を、Fig. 9 は 2 自由度系の結果について示している。これらの図には、Runge-Kutta-Gill 法による応答振幅をプロットしている。図中の○はシミュレーションによる周期 $T (= 2\pi/\bar{\omega})$ (加振振動数の周期) の最大応答、□は周期 $2T$ (加振振動数の周期の2倍) の最大応答、△は周期 nT ($n \geq 3$, 加振振動数の周期の n



Time history(single-d.o.f.)

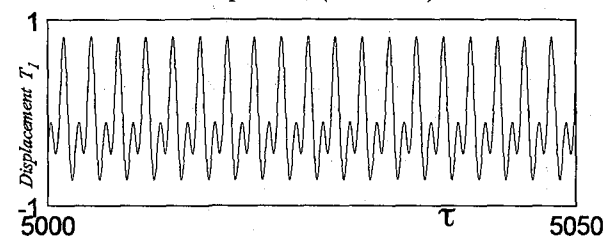


Time history(two-d.o.f.)

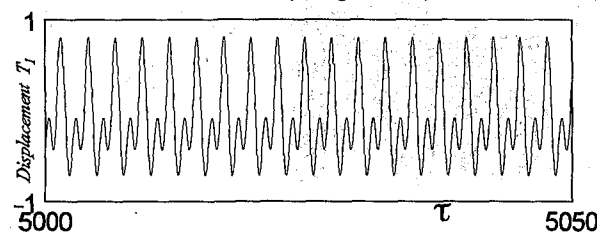


Poincaré map(single-d.o.f.) Poincaré map(two-d.o.f.)

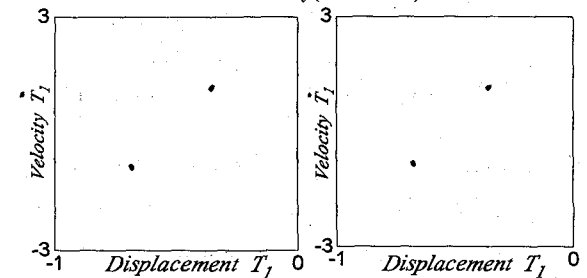
Fig.13 Time history and Poincaré map of the point ① (first mode).



Time history(single-d.o.f.)

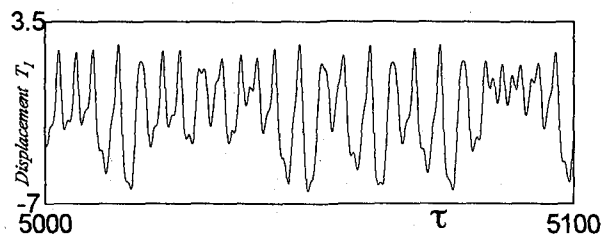


Time history(two-d.o.f.)

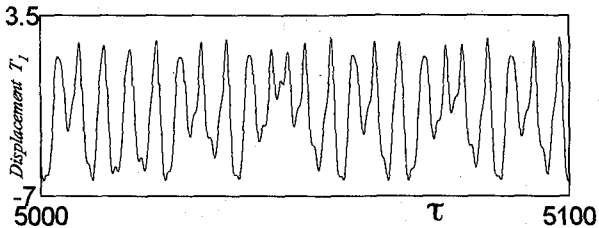


Poincaré map(single-d.o.f.) Poincaré map(two-d.o.f.)

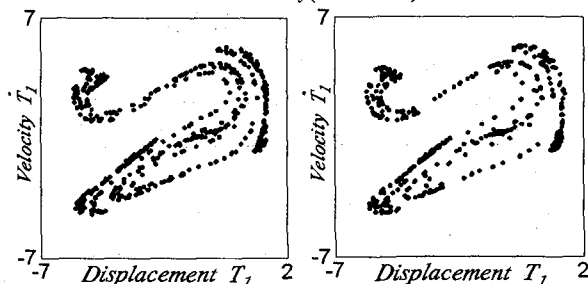
Fig.14 Time history and Poincaré map of the point ② (first mode).



Time history(single-d.o.f.)



Time history(two-d.o.f.)



Poincaré map(single-d.o.f.) Poincaré map(two-d.o.f.)

Fig.15 Time history and Poincaré map of the point ③ (first mode).

倍)の最大応答,×はカオスの発生時の時系列の最大応答を示している。

1自由度系 (Fig.8) と2自由度系 (Fig.9) の結果を比較すると,解析解とシミュレーションによる数値解の周期解はほぼ一致する。3次振動の2倍の高調波共振は,3次振動の運動方程式に T_3 の2乗の項がないため,1/2分数調波共振近傍に及ぼす影響は小さい。1/2分数調波共振近傍のカオスの挙動に注目すると,時系列の最大応答について2自由度系の解が1自由度系の解よりもわずかに大きい,カオスの発生する振動数領域や分布状況はほぼ一致する。

Fig.10,11 および 12 には,1/2 分数調波近傍の分岐を調べるためにシミュレーションによって得られた分岐図を示す。図は加振振動数を高い振動数領域から減少した場合の結果である。Fig.10 は1自由度系の1次振動を, Fig.11 および 12 は2自由度系で,これらのうちFig.11 が1次振動の分岐図を, Fig.12 が3次振動の分岐図を示している。縦軸は速度で,横軸は無次元加振振動数 $\bar{\omega}$ である。分岐図より1自由度系 (Fig.10) と,2自由度系 (Fig.11) のカオスに至る様子を調べる。無次元加振振動数 $\bar{\omega} = 5.2$ より減少させると $\bar{\omega} = 4.9$ で周期 T の振動が,周期 $2T$ の振動に移る。さらに,無次元加振振動数 $\bar{\omega}$ を減少させると,無次元加振振動数 $\bar{\omega} = 4.1$ 近傍よりカオスが発生し始め,無次元加振振動数 $\bar{\omega} = 3.5$ 近傍を除く無次元加振振動数

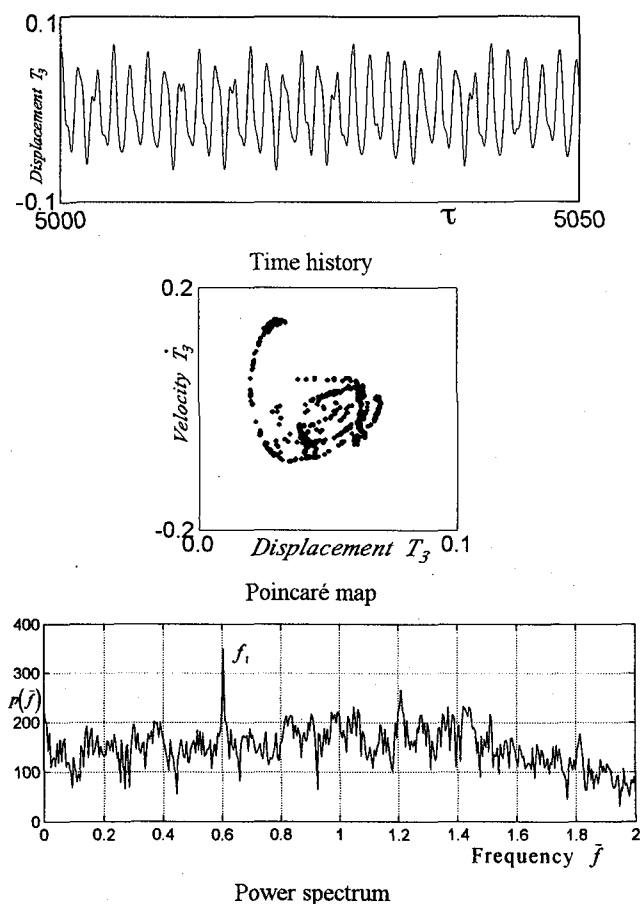


Fig. 16 Time history, Poincaré map and power spectrum of the third mode.

$\bar{\omega} = 3.0 \sim 4.1$ 付近でカオスが頻繁に現れる。2 自由度系の分岐図に、無次元加振振動数 $\bar{\omega} = 4.3 \sim 4.4$ 近傍に周期 nT ($n \geq 3$) が間欠的に発生する以外に 1 自由度系の分岐図との差は認められない。

1 次振動の $1/2$ 分数調波共振近傍のカオスに対する 3 次振動の影響をより詳しく調べるため、カオスが発生する付近の振動数領域の時系列応答波形および Poincaré 写像を 1 自由度系と 2 自由度系の両者を Fig. 13, 14 および 15 に示す。Fig. 13, 14 の時系列応答波形と Poincaré 写像ともに 1 自由度系と 2 自由度系の応答がよく一致する。Fig. 13 は周期 T , Fig. 14 は周期 $2T$ の振動を示し、3 次振動の影響はない。Fig. 15 はカオスが頻繁に発生している無次元加振振動数 $\bar{\omega} = 3.8$ の時系列応答波形および Poincaré 写像を示したものである。時系列応答波形、Poincaré 写像ともにカオスを示し、時系列応答波形はややちがうものの、Poincaré 写像のカオスの特徴を表示するストレンジアトラクターはほぼ同じである。Fig. 10, 11 のようにカオスの発生する振動数領域や分岐のパターンも本質的に変わらない。

以上により、カオスに及ぼす 3 次振動の影響は強いことが確認できた。

Fig. 16 には、1 次振動でカオスが発生している無次元加振振動数 $\bar{\omega} = 3.8$ における 3 次振動の時系列応答波形、

Poincaré 写像およびパワースペクトルを示す。時系列応答波形、Poincaré 写像ともに不規則な応答を示している。しかし、Poincaré 写像はカオスの典型的ストレンジアトラクターを形成していない。パワースペクトルに単一の振動数 $f_1 = 0.6051$ にピークが見られる。本来は 3 次振動は周期的であるが 1 次振動の影響を受けて波形が不規則になったと判断される。

5. まとめ

本研究では、正弦波で与えられる初期形状をもつ偏平アーチを 2 自由度系で近似し、3 次振動の非線形振動特性および 1 次振動の $1/2$ 分数調波共振近傍に及ぼす 3 次振動の影響について調和バランス法による解析および時間応答解析を行った。3 次振動については、偏平アーチの形状パラメータであるライズ比および減衰定数の影響を明らかにした。

得られた結果をまとめると次のとおりである。

- (1) 1 次振動の固有振動数はライズ比の影響を受けるのに対して、3 次振動の固有振動数はライズ比の大きさに無関係である。
- (2) 3 次振動の非線形自由振動が起きると 1 次振動と連成し、変動成分が加振され、直流成分がライズを打ち消す方向に作用する。3 次非線形振動については 1 次振動の影響を考慮した多自由度系の取り扱いが必要である。3 次振動の振動数と振幅の関係はライズの大きさに無関係に硬化バネを示す。
- (3) 主調波応答の共振領域はライズ比の影響を受けないが、ライズがある場合の方が応答振幅が大きくなる。3 次振動に及ぼす減衰定数の影響は 1 次振動に及ぼす減衰定数の影響より大きい。
- (4) 1 次振動が周期 nT ($n \geq 3$) で振動している振動数領域では 3 次振動も周期 nT ($n \geq 3$) で振動し、カオスが発生している領域においては、準カオスの挙動を示す。
- (5) 1 次振動の $1/2$ 分数調波共振近傍のカオスの発生について、その特性に及ぼす 3 次振動の影響は小さい。したがって、1 次振動の $1/2$ 分数調波共振近傍のカオス解析については、文献 1) で示した 1 自由度系の解析で妥当である。

本研究では、偏平アーチの非線形振動の 2 自由度系について検討している。今後、多自由度系として係数励振振動による連成現象、偏平アーチの動的な座屈現象とそのメカニズムの解明、境界条件とライズの形状が及ぼす非線形応答への影響などを明らかにする必要がある。また、実験におけるカオスの確認も今後の課題である。

なお、数値計算には長崎大学総合情報処理センターの VP-1200 を使用したことを付記する。

参考文献

- (1) 高橋和雄, 太田晶一: 偏平アーチの非線形振動とカオ

- ス解析,構造工学論文集, Vol.42A, pp.55~61, 1996.3.
- (2) O'Rekky, O. and Holmes, P.J.: Non-linear, non-planar and non-periodic vibrations of a string, Journal of Sound and Vibration, Vol.153, pp.413~435, 1992.
- (3) 永井健一,山口誉夫: 変断面を有する圧縮座屈後のはりのカオス振動,日本機械学会論文集(C編), 61巻,586号, pp.28~35, 1995.
- (4) Dowell, E.H.: Flutter of a buckled plate as an example of chaotic motion of a deterministic autonomous system, Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.333 ~ 344, 1982.
- (5) 村田 賢,安江 博: 周期外乱を受ける偏平アーチの動座屈,日本建築学会構造系論文集,第469号,pp.71 ~ 80, 1995.3.
- (6) ジェコブセン・エア著,後藤尚男・金多 潔共訳: 構造物と機械のための振動工学,丸善(株), pp.281~ 282, 1961.

(1996年9月6日受付)