

ディジェネレーション法による平面梁の非線形解析

NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE BEAMS BY MEANS OF DEGENERATION APPROACH

山口栄輝*, 西野文雄**, 久保喜延***

Eiki YAMAGUCHI, Fumio NISHINO and Yoshinobu KUBO

* Ph. D. 九州工業大学助教授 工学部設計生産工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

** Ph. D. 埼玉大学大学院教授 政策科学研究科 (〒338 埼玉県浦和市下大久保225)

*** 工博 九州工業大学教授 工学部設計生産工学科 (〒804 福岡県北九州市戸畑区仙水町1-1)

Finite element formulations for nonlinear analysis of plane beams are presented. These formulations are based on the degeneration approach: governing equations for a general solid are discretized and then the assumptions in the Timoshenko beam theory are implemented. The penalty method is employed to impose the assumption of no deformation of a cross-section, which reveals that the associated penalty number has an identical role to that of the fictitious coefficient used in the past studies. Several problems including geometrical/material nonlinearity and the effect of shear deformation are solved, which demonstrates the validity of the present approach. In these numerical examples, the relevant Gauss scheme and the appropriate value of the penalty number are also discussed.

Key Words: degeneration approach, nonlinear analysis, Timoshenko beam

1. はじめに

構造部材の解析にあたっては、(1)部材の特徴を生かした仮定を設けてモデル化をする、(2)モデルの支配方程式および境界条件を誘導する、(3)境界値問題を解く、という手順がとられてきた。有限要素解析でもこの解法の流れに沿い、(2)で誘導された境界値問題を対象として、有限要素法で離散化して解析することが行われている。

これに対して、構造部材も一般の固体であると見なして離散化するアプローチもあり、ディジェネレーション法(degeneration approach)と呼ばれている。この手法では、構造部材の種類にかかわらず、固体力学における支配方程式が解く対象となる。従来の手法では(1)の段階で取り込む構造部材の仮定は、有限要素や構成則の中に反映することが試みられている。

固体の支配方程式に比べると、構造部材の支配方程式は一般に高階で複雑な微分方程式であるため、ディジェネレーション法を用いた方が、より簡潔な基礎方程式を誘導できる。このため、1970年代初頭より、板やシェルの解析ではディジェネレーション法による解法が試みられてきた^{1) - 3)}。

梁の解析においては、著者らがディジェネレーション

法の適用を試み、薄肉断面部材の線形解析⁴⁾、平面棒部材の弾性有限変位解析⁵⁾を行っている。また線形解析を対象に、ディジェネレーション法で誘導された平面梁要素の子細な考察も行った⁶⁾。これらの研究をもとに、ここでは、平面梁の非線形解析を対象として、ディジェネレーション法による定式化、およびその有効性について検討を加える。

2. 微小変位解析

この章では、ディジェネレーション法で梁の微小変位解析を行う際の定式化および数値計算例を示す。この定式化では、一般の固体を対象として有限要素法で離散化を行い、その後、梁理論の仮定を取り込んで、梁解析のための基礎方程式を誘導する。

後述するように、梁理論においては、直応力は梁軸方向成分のみが非零⁷⁾であるため、定式化の記述には全体座標系と局所座標系が必要となる。以下では、図-1に示すように全体座標系を x, y (あるいは x_i)、局所座標系を X, Y (あるいは X_i) で表す。局所座標系は、梁軸と平行に X (X_i) 軸、梁軸直角方向に Y (Y_i) 軸をとる。2つの座標系間の変換は次のように書き表される。

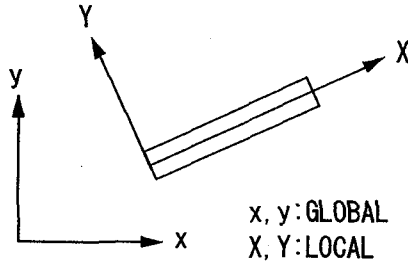


図-1 座標系

$$x_i = l_{ij} X_j \quad (1)$$

$$X_I = l_{iI} x_i \quad (2)$$

ここに,

$$l_{iI} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_I \quad (3)$$

$\mathbf{i}_i$, $\mathbf{i}_I$ はそれぞれ x_i 軸, X_I 軸に平行で正の向きの単位ベクトルである。また下付き添字が小文字で表されている場合は全体座標系, 大文字の場合は局所座標系を参照しているものとする。

2.1 基礎方程式 (固体)

微小変位理論では, つり合い方程式, 応力境界条件がそれぞれ次のように与えられる⁷⁾。

$$\sigma_{ji} + f_j = 0 \quad \text{in } V \quad (4)$$

$$t_j = \sigma_{ji} n_i \quad \text{on } A_t \quad (5)$$

ここに, σ_{ji} , f_j , t_j , n_i はそれぞれ応力, 物体力, 表面力, 境界面に立てた外向き単位法線ベクトルである。 V は解析対象領域, A_t は応力境界条件が与えられた境界面を表す。またひずみ-変位関係は

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6)$$

で表される。この場合, 仮想仕事式は次式のようになる⁷⁾。

$$G = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V f_j \delta u_j dV - \int_{A_t} t_j \delta u_j dA = 0 \quad (7)$$

ここに, δu_j , $\delta \varepsilon_{ij}$ はそれぞれ仮想変位, 仮想ひずみである。アイソパラメトリック要素を用い, 仮想変位にも同じ形状関数を採用することにすれば, 次式が得られる。

$$G = \sum_e G^e = 0 \quad (8)$$

ここに,

$$G^e = \delta U_j^b [K_j^b - R_j^b] \quad (9)$$

$$K_j^b = \int_{V^e} \sigma_{ji} N_i^b dV \quad (10)$$

$$R_j^b = \int_{V^e} f_j N^b dV + \int_{A_t^e} t_j N^b dA \quad (11)$$

上付き添字 e は要素に関する量であることを示している。また, 上式で N^b は節点 b に関する形状関数, δU_j^b は節点 b における節点仮想変位を表す。

式(10), (11)を各要素ごとに計算し, それらを式(9), さらに式(8)に代入し, 仮想変位が任意であることを利用すれば, 次の形で記述される全体系の離散化方程式が得られる。

$$\mathbf{K} - \mathbf{R} = 0 \quad (12)$$

ここに, $\mathbf{K}$, $\mathbf{R}$ はそれぞれ各要素の K_j^b , R_j^b を重ね合わせることで, 得られたものである。線形弾性体の場合を除き, 式(12)は非線形方程式であり, その解法には何らかの数値計算法を用いる必要がある。本研究では, ニュートン・ラプソン法により解を求めることとする。この場合, 次の線形方程式を繰り返し解き, 収束解を求めることになる。

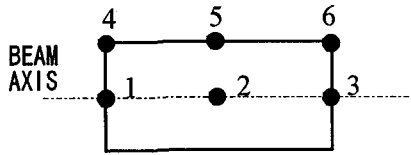
$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{U}^{(m)} = \mathbf{R} - \mathbf{K}^{(m)} \quad (13)$$

上付き添字 (m) は繰り返し計算の回数, $\Delta \mathbf{U}^{(m)}$ は m 回目の繰り返し計算で得られた節点変位の修正量である。 $\mathbf{K}_T$ はいわゆる接線剛性マトリクスであり, $\mathbf{K}$ を節点変位 $\mathbf{U}$ で微分することにより得られ, 微小変位解析では次式となる。

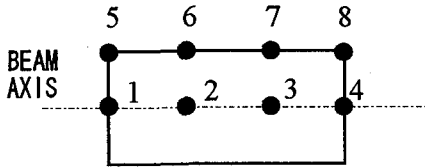
$$K_{Tji}^{ba} = \frac{\partial K_j^b}{\partial U_i^a} = \int_{V^e} N_i^b D_{jlik} N_k^a dV \quad (14)$$

ここに,

$$D_{jlik} = \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial \varepsilon_{ik}} \quad (15)$$



(a) B 6 梁要素



(b) B 8 梁要素

図-2 ディジェネレーション法による梁要素

2.2 基礎方程式 (梁)

前節では、一般の固体を解析するための基礎方程式を導いた。ここではティモシェンコ梁理論で用いられる仮定を前節の基礎式に取り込み、平面梁解析の基礎方程式を導く。

ティモシェンコ梁理論では、梁軸直角方向の直応力 σ_{YY} は零、また断面形状不変の仮定より直ひずみ ε_{YY} も零が誘導されており⁷⁾,

$$\sigma_{YY} = 0 \quad (16)$$

$$\varepsilon_{YY} = 0 \quad (17)$$

である。したがって、非零の応力、ひずみ成分は直応力 σ_{XX} 、直ひずみ ε_{XX} 、せん断応力 σ_{XY} 、せん断ひずみ γ_{XY} のみであり、構成則はこれらの成分間に関して与えられる。例えば、通常の弾性梁の場合には、次の構成則が用いられる。

$$\sigma_{XX} = E\varepsilon_{XX} \quad (18)$$

$$\sigma_{XY} = kG\gamma_{XY} \quad (19)$$

ここに、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数、 k は補正係数である。平面ティモシェンコ梁理論は、上記に加え、さらに断面の平面保持を仮定することにより構築されている⁷⁾。

本研究で使用する要素は図-2に示す6節点と8節点の梁要素である⁶⁾。上縁に位置する節点は相対節点と呼ばれ、梁軸上に位置する節点の変位との相対変位を節点自由度とする。この梁要素はアイソパラメトリック要素の一種であり、梁軸直角方向には2節点の

みを有しているため、断面の平面保持の仮定は自動的に満たされる。しかしながら、式(17)の仮定は一般には満足されず、何らかの方法で、相対節点における相対変位の梁軸直角方向成分を拘束する必要がある。微小変位解析においては、この操作は比較的容易に実行可能である⁶⁾が、有限変位解析では、これは境界条件を逐次変更することになり、定式化が煩雑になるとともに、繰り返し計算における収束性も悪くなる。この点を考慮に入れ、本研究ではペナルティ法 (penalty method)⁸⁾ で式(17)を課すことを考える。この場合、式(7)は次のように変更される。

$$G = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V f_j \delta u_j dV - \int_{A_i} t_j \delta u_j dA + \int_V \lambda \varepsilon_{YY} \delta \varepsilon_{YY} dV = 0 \quad (20)$$

ここに、 λ はペナルティ定数 (penalty number) である。この式からは次の $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{K}_T$ が導かれる。

$$\mathbf{K}_j^b = \int_{V^e} (\sigma_{JI} l_{IJ} N_{,I}^b + \lambda \varepsilon_{YY} l_{JY} N_{,Y}^b) dV \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{Tji}^{ba} = \int_{V^e} (l_{IJ} N_{,I}^b D_{LKIL} N_{,K}^a + l_{JY} N_{,Y}^b \lambda l_{IY} N_{,Y}^a) dV \quad (22)$$

ここでは、梁の特性 (梁理論の仮定) を取り込むよう l_{il} を用いて座標変換を施している。上記2式を陽に書き表せば次のようになる。

$$\mathbf{K}^b = \int_{V^e} (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{S} dV \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_T^{ba} = \int_{V^e} (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^a dV \quad (24)$$

ここに、

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} l_{xX} N_{,X}^b & l_{yX} N_{,X}^b \\ l_{xY} N_{,Y}^b & l_{yY} N_{,Y}^b \\ l_{xY} N_{,X}^b + l_{xX} N_{,Y}^b & l_{yY} N_{,X}^b + l_{yX} N_{,Y}^b \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} \\ \lambda \varepsilon_{YY} \\ \sigma_{XY} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{XX}}{\partial \varepsilon_{XX}} & 0 & \frac{\partial \sigma_{XX}}{\partial \gamma_{XY}} \\ 0 & \lambda & 0 \\ \frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial \varepsilon_{XX}} & 0 & \frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial \gamma_{XY}} \end{bmatrix} \quad (27)$$

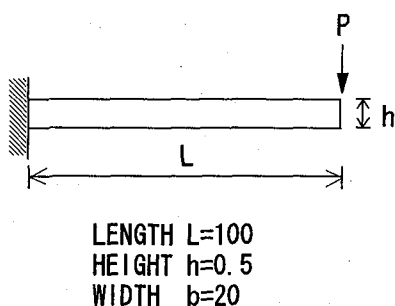


図-3 片持梁

D の 2 行あるいは 2 列に位置する 5 成分は構成則と無関係であるため、変形に伴い変化するものではない。

式 (21), (22) (あるいは式 (23), (24)) を用いて式 (13) を構築することにより、梁の解析が可能となる。

ところで、上記の基礎方程式に現れる λ は、式 (17) の仮定をペナルティ法で課すために導入した定数であるが、これは文献 9), 10) で導入された仮想係数 (fictitious coefficient) と数値計算上は全く同じ働きをする。すなわち、本来は零であるが、それでは数値計算が不安定になるという理由で導入された仮想係数は、梁理論における断面不変の仮定を満足させるためのペナルティ定数であると理解することも可能である。このことは、また、文献 6) で相対変位の梁軸直角方向成分を拘束することにより仮想係数を不要としたことの理論的根拠を与えるものである。さらに、仮想係数をペナルティ定数であると認識することにより、その値は数値計算上の問題が起こらない範囲でできるだけ大きな数を与えればよいとのガイドライン設定も可能となる。

2.3 数値計算例

弾性梁の微小変位解析については文献 6) で検討を加え、B 6 梁要素や B 8 梁要素で高精度の解が得られることを示している。ここでは、弾塑性解析を対象として、本解析法の考察を行う。そのために、文献 2) で解析解が与えられている片持梁 (図-3) を計算例として取り上げた。この解析では次の材料定数を仮定した。

ヤング率 $E = 1.8 \times 10^4$
せん断弾性係数 $kG = 0.9 \times 10^4$
初期降伏応力 $\sigma_0 = 40.0$

解析解と比較するため、塑性挙動は完全弾塑性体とし、塑性変形には梁軸方向の直応力 σ_{xx} のみが関連するとした。これは非線形問題であるため、ニュートン・ラプソン法により解を求めるが、その際には、次式を収

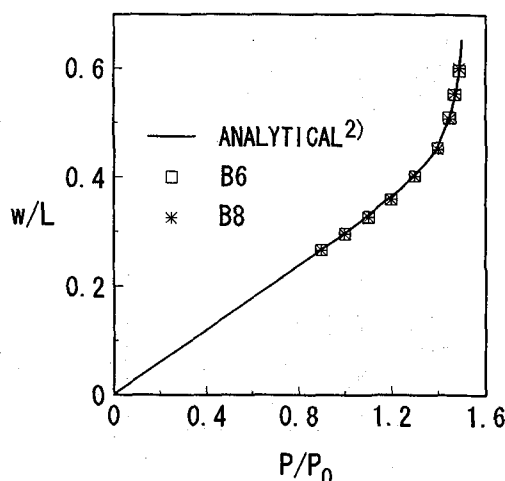


図-4 片持梁の荷重-変位曲線
(弾塑性；微小変位理論)

束判定基準とした。(特に断らない限り、本研究のすべての計算でこれを収束判定基準とする。)

$$\frac{|\Delta U^{(m)}|}{|U^{(m)}|} < 10^{-5} \quad (28)$$

なお、この片持梁は荷重パラメータ (P/P_0 ; P_0 = 初期降伏荷重) が 1.5 のときに塑性ヒンジを形成して崩壊する。そのため、本解析では荷重パラメータが 1.49 の時点で計算を打ち切った。

まず B 6 梁要素 1 個で片持梁をモデル化し、梁軸方向、梁軸直角方向のガウス積分点数を様々に変化させて計算を行った。(但し、塑性挙動に関与しないせん断変形の項については、すべての計算で 2×2 のガウス積分スキームを適用した。) 梁軸直角方向にガウス積分点を 2 点しかとらない場合には、梁軸方向のガウス積分点の数にかかわらず、塑性変形を検出できなかった。梁軸方向、梁軸直角方向のガウス積分点数を増やせば塑性変形をとらえられるようになるが、 8×8 までガウス積分点の数を増して計算を行っても、1 要素では解析解に対して十分に満足行く精度の解は得られなかった。そこで、次に要素数を増加して検討を加えた。その結果、固定端近傍を長さ 15.0 の要素 2 個、残りの部分を要素 1 個の計 3 要素でこの片持梁をモデル化することにより、精度良い計算結果を得ることができた。但し、梁軸直角方向についてはガウス積分点が多い程良い結果が得られるものの、梁軸方向についてはガウス積分点を増加しても必ずしも精度は向上せず、 2×8 のガウス積分スキームで最良解が得られた。そのときの結果を図-4 に示している (図中の w は自

由端のたわみである)。要素分割が粗い場合には、梁軸方向のガウス積分点数を増せば塑性変形をとらえやすくなり、ある程度精度を改善できる利点が生じるが、細かな要素分割を用いる際には、梁軸方向のガウス積分点は2個で十分であることをこの計算結果は示唆している。

B 8 梁要素についても同様の検討を行った。(せん断変形の項については、すべての計算で 3×3 の積分スキームを適用した。) この場合にも、1 要素では精度良い解は得られなかったが、長さ30.0と70.0の2要素でモデル化することにより、高精度の解を得ることができた。B 6 梁要素の場合と同じく、梁軸方向のガウス積分点数の増加は必ずしも精度の向上を招かず、 3×8 が最良のガウス積分スキームであった。このときの結果を図-4に示している。

ところで、塑性変形が生じる領域では、一般に要素を細かくする必要がある。そのためには、要素分割に際して、塑性変形が生じる領域を把握しておくことが肝要である。その意味では、粗い要素分割における解析で、梁軸方向にも多くのガウス積分点を用いることは、要素再分割を行う際に有益な情報を与えてくれると思われる。本解析例では、解析解の仮定に合わせ、せん断変形は塑性挙動と無関係であるとしたが、一般にはこれは正しくない。したがって、塑性領域を把握する目的で多くのガウス積分点をとる場合、一般には、せん断変形に関する項についてもガウス積分点を増やすことが必要となる。そこで、上述の片持梁を1要素で解析する場合を例に取り、せん断変形に関する項のガウス積分スキームも変化させ、その影響を調べた。その結果、B 6、B 8 梁要素とも、梁軸直角方向のガウス積分点を増加させても解には全く影響が出なかった。しかしながら、梁軸方向のガウス積分点を増すと剛性が過大評価され、たわみが減少した。この現象はB 6、B 8 梁要素のいずれにも認められたが、減少率には大きな差があり、B 8 梁要素の場合には高々数%であるのに対し、B 6 梁要素では30%以上もたわみが減少した。

先に文献6)で、B 6 梁要素では次数低減積分を用いる必要があるのに対し、B 8 梁要素ではそのような制限がないことを理論的に示した。但し、その考察はあくまで線形挙動する梁を対象としたものであり、弾塑性挙動時には適用できない。しかしながら、上記の計算結果は、弾塑性解析においても、積分スキームはB 6 梁要素の解析により大きな影響を及ぼすことを示している。このため、B 6 梁要素を用いた解析では、せん断変形に関する項については、梁軸方向に3個以上

のガウス積分点をとることは避けねばならない。

3. 有限変位解析

この章では、ディジェネレーション法による梁の有限変位解析の定式化と数値計算例を記す。そのために、ここでは文献11)にならい、空間座標系(spatial coordinates)と物体座標系(material coordinates)を導入する。前者を x, y (あるいは x_I)、後者を X, Y (あるいは X_I) で表す。なお、梁の解析に際しては、図-1の局所座標系と同様に、 X (X_I) 軸が梁の軸線と一致するものとする。またテンソルの下付き添字が小文字で表されている場合は空間座標系、大文字の場合は物体座標系を参照しているものとする。なお、本研究では、total Lagrangeの手法¹²⁾により有限変位解析の定式化を行う。

3.1 基礎方程式 (固体)

第2 Piola-Kirchhoff応力テンソル S_{IJ} を用いたつり合い方程式、応力境界条件は次のように表される¹¹⁾。

$$(S_{IJ}F_{J,I})_I + \rho_0 b_I = 0 \quad \text{in } V_0 \quad (29)$$

$$t_{0j} = n_{0I} S_{IJ} F_{J,I} \quad \text{on } A_{0t} \quad (30)$$

ここに、 $F_{J,I}$ 、 ρ_0 、 b_I 、 t_{0j} 、 n_{0I} はそれぞれ変形勾配、密度、物体力、表面力、境界面に立てた外向き単位法線ベクトルである。 V_0 は解析対象領域、 A_{0t} は応力境界条件が与えられた境界面を表す。下付き添字の0は解析する固体の初期状態における量であることを示す。第2 Piola-Kirchhoff応力と対をなすグリーンひずみ E_{IJ} は

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(F_{I,I}F_{J,J} - \delta_{IJ}) \quad (31)$$

で表される。ここに δ_{IJ} はクロネッカーのデルタ記号である。この場合、仮想仕事式は次のようになる¹²⁾。

$$W = \int_{V_0} S_{IJ} \delta E_{IJ} dV - \int_{V_0} \rho_0 b_I \delta u_I dV - \int_{A_{0t}} t_{0j} \delta u_j dA = 0 \quad (32)$$

ここに、 δu_j 、 δE_{IJ} はそれぞれ仮想変位、仮想グリーンひずみである。アイソパラメトリック要素を用い、仮想変位にも同じ形状関数を採用することにすれば、次式が得られる。

$$W = \sum_e W^e = 0 \quad (33)$$

ここに,

$$W^e = \delta U_j^b [K_j^b - R_j^b] \quad (34)$$

$$K_j^b = \int_{V_0^e} S_{IJ} F_{IJ} N_{,I}^b dV \quad (35)$$

$$R_j^b = \int_{V_0^e} \rho_0 b_j N^b dV + \int_{A_{0i}^e} t_{0j} N^b dA \quad (36)$$

上付き添字 e は要素に関する量であることを示している。また N^b は節点 b に関する形状関数、 δU_j^b は節点 b における節点仮想変位を表す。

式(35)、(36)を各要素ごとに計算し、それらを式(34)、さらに式(33)に代入し、仮想変位が任意であることを利用すれば、次の形式で記述される全体系の離散化方程式が得られる。

$$\mathbf{K} - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (37)$$

これは形式的には式(12)と同一のものである。式(37)は非線形方程式であるため、微小変位解析の場合と同様に、ここでもニュートン・ラプソン法を採用し、次の線形方程式を用いた繰り返し計算により解を求める。

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{U}^{(m)} = \mathbf{R} - \mathbf{K}^{(m)} \quad (38)$$

この式は、形式的に式(13)と同じであるが、この場合、接線剛性マトリクス $\mathbf{K}_T$ は次のようになる。

$$K_{Tji}^{ba} = \frac{\partial K_j^b}{\partial U_i^a} = \int_{V_0^e} N_{,I}^b (F_{IJ} D_{IJKL} F_{IL} + \delta_{ij} S_{IK}) N_{,K}^a dV \quad (39)$$

ここに,

$$D_{IJKL} = \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}} \quad (40)$$

である。

3.2 基礎方程式 (梁)

前節の基礎方程式に、ティモシェンコ梁理論で用いられる仮定を取り込み、梁解析のための基礎方程式を導く。取り込む仮定は、基本的には2.2と同じであるが、

応力 σ_{ij} 、ひずみ ε_{ij} に代えて、ここでは第2 Piola-Kirchhoff 応力 S_{IJ} 、グリーンひずみ E_{IJ} を用いる。有限変位解析でも図-2の梁要素を用いるため、断面の平面保持の仮定は自動的に満たされる。

断面形状不変の仮定 ($E_{YY} = 0$) を課すために、微小変位解析の場合と同様、ペナルティ法を用いることにすれば、式(32)は次のようになる。

$$W = \int_{V_0} S_{IJ} \delta E_{IJ} dV - \int_{V_0} \rho_0 b_j \delta u_j dV - \int_{A_{0i}} t_{0j} \delta u_j dA + \int_{V_0} \lambda E_{YY} \delta E_{YY} dV = 0 \quad (41)$$

この式からは、次の $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{K}_T$ が導かれる。

$$K_j^b = \int_{V_0^e} (S_{IJ} F_{IJ} N_{,I}^b + \lambda E_{YY} F_{IJ} N_{,Y}^b) dV \quad (42)$$

$$K_{Tji}^{ba} = \int_{V_0^e} (N_{,I}^b F_{IJ} D_{IJKL} F_{IL} N_{,K}^a + N_{,Y}^b F_{IJ} \lambda F_{IJ} N_{,Y}^a) dV + \int_{V_0^e} \delta_{ij} (N_{,I}^b S_{IK} N_{,K}^a + N_{,Y}^b \lambda E_{YY} N_{,Y}^a) dV \quad (43)$$

これら2式を陽に表せば次のようになる。

$$\mathbf{K}^b = \int_{V_0^e} (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{S}_v dV \quad (44)$$

$$\mathbf{K}_T^{ba} = \int_{V_0^e} (\mathbf{B}^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^a dV + \left[\int_{V_0^e} (\mathbf{G}^b)^T \mathbf{S}_m \mathbf{G}^a dV \right] \mathbf{I} \quad (45)$$

ここに,

$$\mathbf{B}^b = \begin{bmatrix} F_{xX} N_{,X}^b & F_{yX} N_{,X}^b \\ F_{xY} N_{,Y}^b & F_{yY} N_{,Y}^b \\ F_{xY} N_{,X}^b + F_{xX} N_{,Y}^b & F_{yY} N_{,X}^b + F_{yX} N_{,Y}^b \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} S_{XX} \\ \lambda E_{YY} \\ S_{XY} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_{XX}}{\partial E_{XX}} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial S_{XX}}{\partial E_{XY}} \\ 0 & \lambda & 0 \\ \frac{\partial S_{XY}}{\partial E_{XX}} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial S_{XY}}{\partial E_{XY}} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{G}^b = \begin{bmatrix} N_{,X}^b \\ N_{,Y}^b \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} S_{XX} & S_{XY} \\ S_{XY} & \lambda E_{YY} \end{bmatrix} \quad (50)$$

表-1 ペナルティ定数 λ の影響

λ/E	B 6 要素 1 個	B 6 要素 10 個
10^0	64.52952	66.98361
10^1	64.52941	66.98338
10^2	64.52940	66.98336
10^3	64.52940	66.98336
10^7	64.52940	66.98336
10^8	64.52940	収束せず
10^{10}	64.52940	
10^{11}	収束せず	

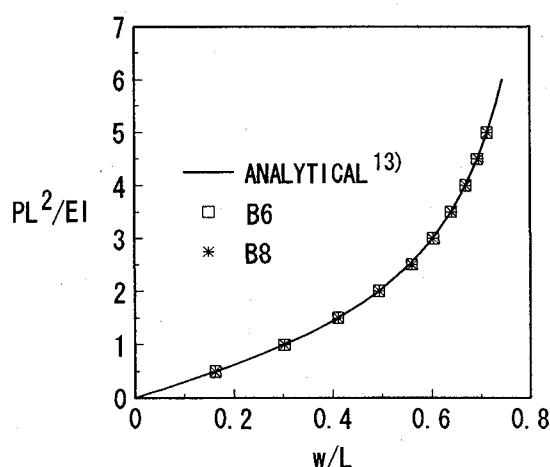


図-5 片持梁の荷重-変位曲線
(弾性；有限変位理論)

$\mathbf{I}$ は単位行列である。また $\mathbf{D}$ の 2 行あるいは 2 列に位置する 5 成分は構成則と無関係であるため、変形に伴い変化することはない。

式(42)、(43) (あるいは式(44)、(45)) を用いて式(38)を構築することにより、梁の解析が行える。

上記の基礎方程式に現れる λ は、断面形状不変の仮定をペナルティ法で課すために導入した定数であるが、微小変位解析の場合と同様に、仮想係数と数値計算上全く同じ働きをする。すなわち、数値計算上の問題を回避するために導入された仮想係数は、有限変位解析においても、梁理論における断面不変の仮定を満足させるためのペナルティ定数であると理解できる。したがって、この場合にも λ の値は数値計算上の問題が起らない範囲でできるだけ大きな数を与えればよいとのガイドラインが設定できる。

3.3 数値計算例

(1) 片持梁 (弾性)

ベンチマーク問題としてよく取り上げられる弾性片持梁の有限変位解析を行い、まずペナルティ定数 λ について考察した。(2.3の計算例は λ の影響を受けないため、そこではこの考察は行わなかった。) この梁は図-3と同じ構造であるが、ここでは梁の長さ $L=100$ 、高さ $h=0.2$ 、幅 $b=12$ とした。なお、本解析では、B 6 梁要素については 2×2 、B 8 梁要素には 3×3 のガウス積分スキームを用いた。

文献9)では、円弧梁の微小変位解析をシェル要素で行うことにより、 λ は要素のアスペクト比 (高さ/長さ) の 2 乗に比例するとしている。そこで、本研究では片持梁を 1 要素および 10 要素でモデル化した上で、 λ の値を変化させて検討を行った。なお、この計算においては λ の影響を子細に検討するため、式(28)の右边を 10^{-9} とした収束判定条件を採用した。

計算結果として $PL^2/EI=4$ における自由端でのたわみを表-1にまとめている。文献9)によると、要素のアスペクト比が 10 倍になれば、 λ は 100 倍ほど大きくとれるはずであるが、表-1の結果ではそのような傾向は認められない。この計算結果は、いずれの要素分割においても、 λ が E の 10^2 倍以上になれば、 λ の値が解に及ぼす影響は十分に小さいことを示唆している。

ところで、 λ を大きくしていくと、繰り返し計算で得られる最終的な解は同じであるが、収束性が徐々に悪くなり、ついには解が得られなくなる。そのため、 λ の値はできるだけ大きくとるのが原則であるが、実用上は E の 10^3 倍で十分と考えられるため、以下の計算ではこの値を採用した。

本解析で用いた梁はひじょうに細長いものであるが、これは文献13)の解析解と比較するため、せん断変形の影響が小さくなるように設定したためである。表-1の2組の計算結果は互いにかなり異なるが、文献13)の解は 66.996 であり、10 要素で得られた計算結果が十分な精度を有していることがわかる。図-5には B 6 梁要素 5 個による解析結果を示しているが、この結果は解析解と良く一致しており、誤差は 1% 未満に収まっている。以上の計算では $kG = E/2$ として計算を行ったが、これに加えて kG を E の 10^3 倍とした解析も行い、せん断変形の影響が十分に小さいことも確認した。

B 8 梁要素についても λ に関する考察を行ったが、B 6 梁要素の場合と同様の結果が得られ、この要素の λ も E の 10^3 倍でよいことが判明した。また B 8 梁要素は 2 個で解析解との差が 1% 未満の計算結果を得ることができた。図-5にその結果を示している。

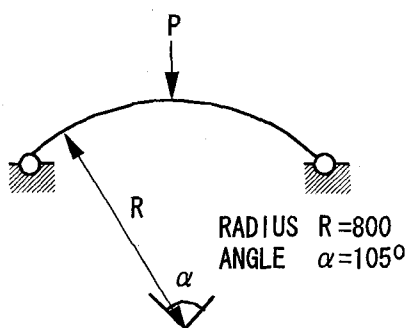


図-6 円弧アーチ

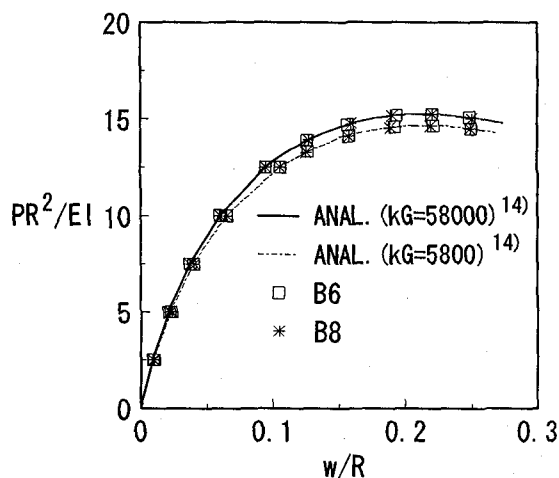


図-7 円弧アーチの荷重-変位曲線

(2) 円弧アーチ

次に、図-6に示す円弧アーチの有限変位解析を行った。せん断変形の影響も考慮に入れた解析解が文献14)で得られており、それと比較することにより、本解析法でせん断変形の影響を的確に考慮できるか、検討を加えた。なお、ガウス積分スキームはB6梁要素については 2×2 、B8梁要素には 3×3 を適用した。

対称性を利用し、B6梁要素は10個、B8梁要素の場合は4個で円弧アーチの1/2をモデル化して解析を行った。このアーチの荷重-変位曲線はピーク荷重に達した後、勾配が負になり下降する。このため、本解析では弧長法¹⁵⁾を用いてピーク荷重前後の荷重-変位曲線を求め、得られた結果を図-7に示している(図中の w は载荷点のたわみである)。文献14)にない、せん断剛性を変化させて2種類の解析を行ったが、いずれの場合も解析解と十分良く一致しており、本解析法でせん断変形を有する梁(ティモシェンコ梁)の有限変位解析も精度良く行えることが検証できた。

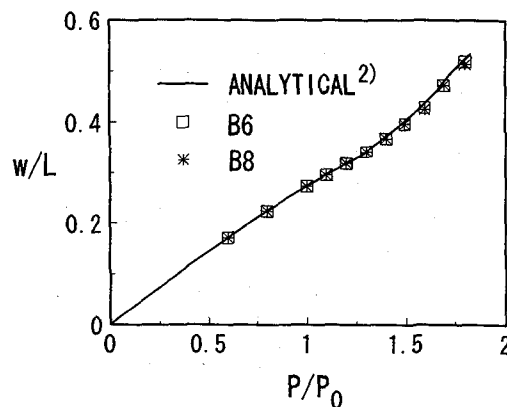


図-8 片持梁の荷重-変位曲線
(弾塑性；有限変位理論)

(3) 片持梁 (弾塑性)

2.3で取り上げた片持梁(図-3)をここでは幾何学的非線形性も考慮に入れ、あらためて解析した。この計算例においてもガウス積分点の数に関する検討を行ったが、微小変位解析の場合と同様の傾向が認められ、B6梁要素には 2×8 、B8梁要素には 3×8 のガウス積分スキームが最良であった。

この積分スキームを用い、B6梁要素5個、B8梁要素3個で得られた計算結果を図-8に示している。文献2)にはこの複合非線形問題の解析解も与えられており、図-8にはこれも示しているが、本計算結果は解析解と良く一致しており、本解析法が複合非線形問題においても有効であることが理解される。

4. まとめ

本研究で得られた成果は次のようにまとめられる。

- 梁理論における断面形状不変の仮定を取り込むため、ペナルティ法を採用し、従来、仮想係数と呼ばれていたものがペナルティ定数に他ならないことを示した。
- 数値計算例には、微小変位理論に基づいた弾塑性解析、せん断変形をも考慮に入れた弾性有限変位解析、材料非線形と幾何学的非線形の両方を考慮に入れた複合非線形問題を取り上げた。いずれの問題でも解析解と良く一致した結果を得ることができ、梁の非線形解析において本解析法が有効であることを示した。
- ペナルティ定数に関する検討を行い、その値はヤング率の 10^3 倍とすればよいとの結論を得た。
- 精度良い弾塑性解析を行うにはガウス積分点を増や

すことが肝要であるが、積分点の増加は梁軸直角方向だけに限るのが望ましいことが判明した。特に、B 6 梁要素による解析は梁軸方向の積分スキームに大きな影響を受けるため、注意が必要である。

- (e) B 6 梁要素, B 8 梁要素のいずれでも精度良い解が得られるが, B 8 梁要素の方が少ない要素数・節点数で精度良い解が得られる傾向が認められた。

ディジェネレーション法に基づいた本解析法の大きな利点は, 3 次元問題への拡張の容易さにあり, 今後, その研究に取り組む予定である。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M.: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol.3, pp.275-290, 1971.
- 2) Parisch, H.: A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol.20, pp.323-350, 1979.
- 3) Kanok-Nukulchai, W.: A simple and efficient finite element for general shell analysis, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol.14, pp.179-200, 1979.
- 4) 山口栄輝, 西野文雄: ディジェネレーション法に基づいた I 形/箱形断面部材の有限要素解析手法, *構造工学論文集*, Vol.40A, pp.23-28, 1994.
- 5) 山口栄輝, Kanok-Nukulchai, W., 太田俊昭: 有限要素法による棒材の有限変位解析に関する研究, *構造工学論文集*, Vol.35A, pp.175-183, 1989.
- 6) 山口栄輝, 西野文雄, 久保喜延: ディジェネレーション法による平面ティモシェンコ梁要素について, *構造工学論文集*, Vol.42A, pp.13-20, 1996.
- 7) 西野文雄, 長谷川彰夫: 構造物の弾性解析, 新体系土木工学 7, 技法堂, 1983.
- 8) Hughes, T.J.R.: *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- 9) Kanok-Nukulchai, W., Taylor, R.L. and Hughes, T.J.R.: A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method, *Comput. Structures*, Vol.13, pp.19-27, 1981.
- 10) Kanok-Nukulchai, W., Hasegawa, A. and Nishino, F.: Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements, *Proc. of JSCE*, No.368/I-5, pp.65-73, 1986.
- 11) Eringen, A.C.: *Continuum Physics*, Vols. I and II, Academic Press, New York, 1974.
- 12) Washizu, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd ed., Pergamon Press, New York, 1982.
- 13) Mattiason, K.: Numerical results from large deflection beam and frame problems analyzed by means of elliptic integrals, *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol.17, pp.145-153, 1981.
- 14) Chaisomphob, T., Nishino, F., Hasegawa, A. and Aly Gamal Aly, A.-S.: An elastic finite displacement analysis of plane beams with and without shear deformation, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, JSCE 368, pp.157s-165s, 1986.
- 15) 山口栄輝, プンタラ S.G., 西野文雄: スカイライン法を用いた弧長法について, *構造工学論文集*, Vol.39A, pp.333-342, 1993.

(1996 年 9 月 6 日受付)