

円筒内に拘束された有限円柱の粘弾性解析

ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL AXI-SYMMETRIC VISCOELASTIC BODY CONFINED IN CYLINDER

秋葉 正一*, 能町 純雄**, 栗谷川 裕造***

Shyouich AKIBA, Sumio G. NOMACHI and Yuzou KURIYAGAWA

- * 博(工学) 日本大学助手 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町1-2-1)
 ** 工博 日本大学講師 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町1-2-1)
 *** 日本大学助教授 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町1-2-1)

The presenting paper firstly dealt with the displacement of the visco-elastic material confined in cylindrical mold under repeated load whose frequency is far less than the natural frequency of the test body, with frictionless assumption between the test body and the mold by means of finite Fourier-Hankel transform. Mechanical moduli of the test body are so given as the volumetric one is composed of elastic and Voigt models and the distortional one is, Voigt and Maxwell models. So doing, four different visco-elastic cases are formulated. The displacement measurement performed by sand as the test material, lead to a visco-elastic property of the sand confined in the mold, by the optimizing above mentioned four analytical results referring to the measured displacement.

Key Words : visco-elastic, finite Fourier-Hankel transforms, surface displacement, repeated loading test, back calculation

1. まえがき

近年, 舗装の構造設計は経済性や機能性を考慮した新材料や新工法の利用に伴い, 従来の半経験的な構造設計では経済性や耐久性の確保が十分に行えないことから, 現在では多層弾性理論を適用した構造設計が検討され, 試験的ではあるが, その適用段階に入り良好な成果が得られている^{1), 2)}. 舗装各層を構成する材料は弾性的な挙動を示すものが少ないが, 多層弾性理論の適用は, [1]力学理論を適用することで構造設計や構造評価あるいは構造破壊の要因分析を容易にする^{3), 4)}. [2]多層弾性計算は入力するパラメータが少なく, パソコンレベルで比較的に高精度の結果が得られ, 複雑な計算が技術者にとって短時間かつ容易に行える^{5), 6)}. などの利点がある.

著者らは, この設計方法を適用する場合に必要な材料定数を室内試験から得ることを目的として研究を進めており, これまでにCBR試験のような載荷試験と3次元弾性解析結果を利用して路床土や粒状材料あるいは安定処理した材料の弾性的な材料定数を簡易に推定する手法を提案してきた⁷⁾. しかし, 前述の通り実際の舗装材料は弾性的挙動を示すものが少なく, 繰り返し載荷による変形挙動は粘弾性体として評価した方が舗装の構造設計を進展させる上で有効と考えられる.

現実には, 線形粘弾性理論による土木材料の解析あるいは多層解析に関する研究は古くから行われており^{8)~10)}, この理論による多層構造解析プログラムも既に開発およ

び改良され十分に利用できる段階である^{8), 11)}. しかし, 粘弾性解析は材料の載荷による応力や変形の挙動に対し, 選定した粘弾性モデルによっては推定を必要とする材料定数が多くなることから, 仮に多層粘弾性解析を構造設計に適用する場合にはあまり実用的でなくなる可能性がある.

土材料の粘弾性定数の推定は村山ら¹²⁾や畑野ら¹³⁾の研究などで非常に少ない. まず, 村山らは振り振り子を用いた実験装置を作成し, 粘土をVoigt材として材料定数を実測する方法を示しているが, 円筒内の試料はかなり液性の高い状態でないと測定が難しく, それよりも含水比の低い塑性状態で締固まった試料での測定は困難と考えられる. つぎに, 畑野らは三軸圧縮試験を利用して粘土, 砂および碎石の動的あるいは静的な粘弾性定数を得るための方法を示しているが, 動的なものについては非線形性を加味したMaxwell体あるいはMaxwell-Kelvin体とした推定方法を示しているが, この方法は極めて複雑であり, 特に静的なものについては弾性定数のみの推定手法にとどまっている.

本研究は, 円筒内に締固められた土材料の供試体について, 表面に剛性円盤が載荷する場合の鉛直変位成分の線形粘弾性解析を実施し, 実測による変位応答と粘弾性モデルの適合性および粘弾性定数の推定に対する検討を行った. すなわち, まず粘弾性解析については, 既に報告している円筒内に拘束された有限円柱の3次元弾性解析結果⁷⁾を用い, 材料定数の対応原理¹⁴⁾により線形粘

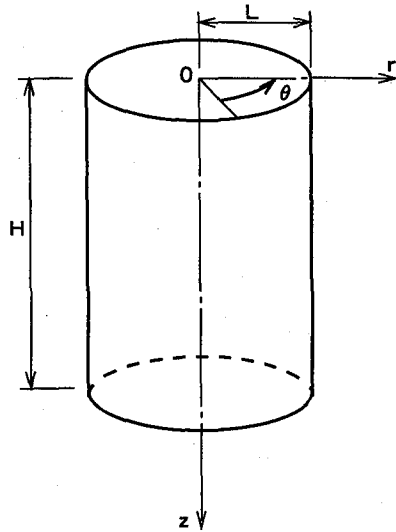


図-1 円柱座標

弾性解析を実施した。粘弾性要素については将来の構造解析の簡便性を考慮して、体積弾性係数については弾性あるいはVoigt要素とし、せん断弾性係数についてはVoigtあるいはMaxwell要素とし、これら単純な要素の組み合わせによる4つのモデルに対して鉛直変位成分の定式化を行った。なお、荷重は材料自身の固有振動の影響を無視できる速度での繰り返し荷重を用いた。つぎに、各モデルに対し、载荷による変形特性を数値計算により調べた上で、砂質土を用いて円筒内に拘束された供試体の繰り返し载荷試験を実施し、载荷時の実測変位と粘弾性解析による解析変位の比較検討を行った。この際の粘弾性定数は、変位の実測値と解析結果から非線形最小二乗法による逆解析を実施して求めた。

2. 3次元弾性解析結果と粘弾性解析

本章では、まず円筒内に拘束された有限円柱の鉛直変位の3次元弾性解析結果を示し、特に自重による固有振動の影響の無い繰り返し载荷に対し、拘束面の摩擦の影響を無視した場合の解析結果を用いて粘弾性解析を実施した。この場合の粘弾性要素は、膨張に対しては弾性あるいはVoigt要素とし、形状変化に対してはVoigtあるいはMaxwell要素を用い、これらの要素の組み合わせによる4つのモデルによる変位の定式化を行った。つぎに、解析結果を用いて繰り返し荷重に対する変位の応答特性を数値計算例で示した。

2.1 3次元弾性解析

図-1に示す円柱座標において、 r 、 θ 、 z 方向の垂直応力をそれぞれ σ_r 、 σ_θ 、 σ_z 、せん断応力をそれぞれ $\tau_{r\theta}$ 、 $\tau_{\theta z}$ 、 τ_{rz} とし、 r 方向の変位成分を u 、 z 方向の変位成分を w とすると、これらの条件を考慮した弾性問題におけるHookeの法則は次式で表される。

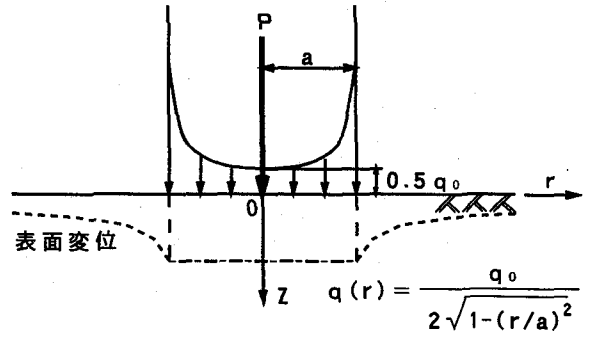


図-2 剛性荷重による载荷

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{3K-2G}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_\theta &= 2G \frac{u}{r} + \frac{3K-2G}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_z &= 2G \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{3K-2G}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{rz} &= 2G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

なお、上式は軸対称変形の場合の結果で、応力成分は角 θ に無関係であるから、せん断応力 $\tau_{r\theta}$ および $\tau_{\theta z}$ は0である。なお、 G および K は、それぞれせん断弾性係数および体積弾性係数を表す。

軸対称有限円柱の3次元弾性解析は有限Fourier-Hankel変換による方法を用いて既に報告^{7), 15), 16)}しているので、以下では簡単に結果のみを述べる。

まず、有限円柱の表面に作用する荷重強度分布 $q(r)$ について、一般に円筒モールドを用いた室内の载荷試験では、砂質土や粘性土などで作成された供試体に剛性円盤を用いて载荷試験を実施すると、図-2に示すように载荷面直下の変位が一樣となる現象を示す。したがって、弾性問題では同図に示す荷重強度分布が半無限体の表面に作用すると载荷面直下での変位が一樣となることから^{17), 18)}、これを有限円柱の表面に作用する荷重強度分布に適用すると $q(r)$ は次式で表される。

$$q(r) = \frac{a^2}{L^2} q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a q_0 \sin(\xi_i a)}{L^2 \xi_i J_0(\xi_i L)^2} J_0(\xi_i r) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 J_0 および J_1 は第1種0次および第1種1次のBessel関数であって、 $\xi_i L$ は $J_1(x)$ の i 番目の0点であり、 ξ_i はパラメータである。また、 $N=n\pi/H$ ($n=1, 2, 3, \dots$)である。

つぎに、円筒モールド内に締固められた供試体の拘束面に関する境界条件は次のように設定した。

$$\left. \begin{aligned} r=L \text{ で } \tau_{rz} &= 0, u = 0 \\ z=0 \text{ で } \sigma_z &= q(r), \tau_{rz} = 0 \\ z=H \text{ で } w &= 0, \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

これらの境界条件を満足する鉛直変位 w は次式で表される。

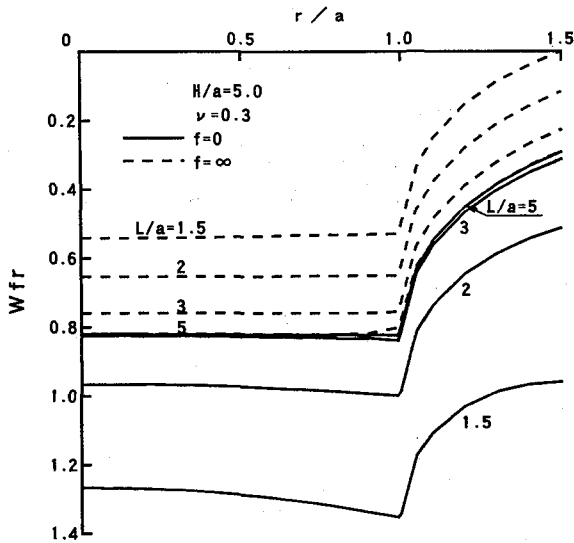


図-3 表面変位の分布

$$w = q_0 \left[\left(\frac{1}{2G} + \frac{3}{6K+2G} \right) A(r) + \frac{1}{2G} B(r) + \frac{3}{3K+4G} C(r) \right] \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで

$$A(r) = \frac{a}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^2 J_0(\xi_i L)^2} \frac{\sin(\xi_i a)}{\phi(\xi_i z) + \psi(\xi_i z)} Q(\xi_i z)$$

$$B(r) = \frac{a}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^2 J_0(\xi_i L)^2} \frac{\sin(\xi_i a)}{\phi(\xi_i z) + \psi(\xi_i z)} P(\xi_i z)$$

$$C(r) = \frac{a^2}{B^2} (H - z)$$

$$Q(\xi_i z) = \frac{ch\xi_i(2H-z) - ch\xi_i z}{ch2\xi_i H - 1}$$

$$P(\xi_i z) = \frac{\xi_i \{ zsh\xi_i(2H-z) - (2H-z)sh\xi_i z \}}{ch2\xi_i H - 1}$$

$$\phi(\xi_i z) = \frac{sh\xi_i(2H-z) + sh\xi_i z}{ch2\xi_i H - 1}$$

$$\psi(\xi_i z) = \frac{\xi_i \{ zch\xi_i(2H-z) + (2H-z)ch\xi_i z \}}{ch2\xi_i H - 1}$$

であり、また上式中 sh , ch は双曲線関数を表す。

なお、式(4)は、側方の拘束面で摩擦が発生しないという条件で得られたものであるが、著者らはこの面の条件を固有の摩擦力が生じる $\{r=L \text{ で } f \cdot \sigma_r = \tau_{rz} \text{ (} f: \text{摩擦係数)}\}$ とした解析も実施している⁷⁾。図-3および図-4はこの境界条件で計算した鉛直変位係数 w_{fr} と拘束領域の大きさ L/a との関係を示したもので、図-3は表面の鉛直変位係数の分布を、図-4は載荷面中心($r/a=0$)直下における鉛直変位形数をそれぞれ示している。ただし、鉛直変位係数 w_{fr} は弾性計算によって得られた表面変位 w を半無限上での表面変位 w_r で除した次式で表したものである¹⁹⁾。

$$w_{fr} = \frac{w}{w_r} = \frac{w}{\pi(1-\nu^2)aq/2E} \quad \dots\dots\dots(5)$$

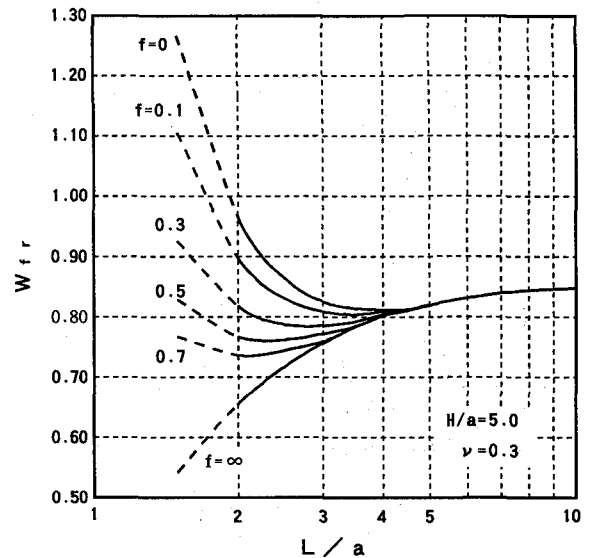


図-4 w_{fr} と L/a の関係

表-1 粘弾性モデルと材料定数

記号 (モデル)	体積膨張(3K)		形状変化(2G)	
	要素	材料定数	要素	材料定数
K-V	弾性	K	Voigt	E_1, η_1
V-V	Voigt	E_2, η_2	Voigt	
K-M	弾性	K	Maxwell	
V-M	Voigt	E_2, η_2	Maxwell	

ここで、後述する円筒内に拘束された供試体の載荷試験ではCBRモールド(高さ12.5cm, 直径15cm)を用い、載荷板の直径は5cmと既存の試験設備を用いることから、この場合の供試体形状における L/a は3である。したがって、両図よりこの載荷条件に対する w_{fr} は側方拘束面の摩擦係数 f によって異なるが、 L/a が3よりも大きいものとの差は数%であり、供試体の不均一性を考慮すれば大きな誤差とはならないと推察される。よって、前述した L/a が3以上の拘束条件で載荷を行う場合には、変位成分に与える側方の拘束面の摩擦力は無視することとする。

2.2 粘弾性解析

(1) 2要素モデルと載荷重

円筒内に拘束された有限円柱の線形粘弾性解析は、文献¹⁴⁾を参考に式(4)の弾性解とこの粘弾性解のLaplace変換との対応原理により行った。まず、弾性定数 K および G は、表-1に示すように K が弾性あるいはVoigt的膨張、 G がVoigtあるいはMaxwellの形状変化という1ないし2要素モデルとし、それらの組み合わせで4種類のモデルを設定した。ここで、体積膨張としてMaxwell要素を選択しなかったが、これは、締め固まった土材料では載荷の経時変化に対し、体積膨張を起こし

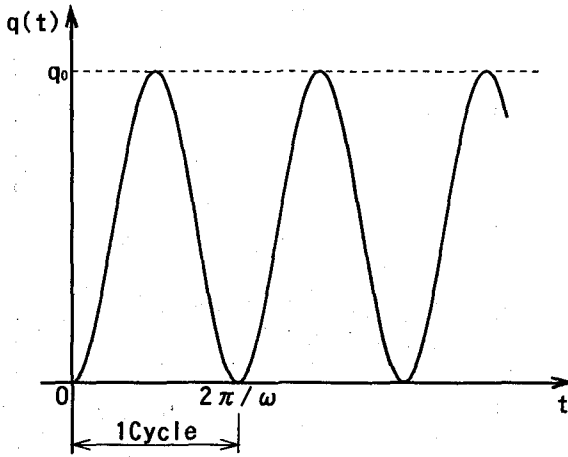


図-5 繰り返し荷重

にくいと考たためである。また、時間 t の関数である荷重 $q(t)$ は3章の繰り返し載荷試験を考慮して式(6)および図-5の荷重形態を設定した。ただし、この場合の載荷速度は材料自身の固有振動の影響を無視できる範囲の速度とする。

$$q(t) = q_0 \frac{1 - \cos \omega t}{2} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 q_0 は荷重波形の振幅、 ω は角速度を表す。

(2) 解析結果

式(4)の鉛直変位 w の弾性解において、これの粘弾性解のLaplace変換 $\bar{w}$ は、荷重および弾性定数をそれぞれのLaplace変換で置き換えた次式で表される。

$$\bar{w} = q(s) [\{ g_1(s) + g_2(s) \} A(r) + g_1(s) B(r) + g_3(s) C(r)] \quad \dots\dots\dots(7)$$

これをLaplace逆変換すれば、鉛直変位の粘弾性解は結局次式となる。

$$w = [\{ F_1(t) + F_2(t) \} A(r) + F_1(t) B(r) + F_3(t) C(r)] \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここで、 $F_k (k=1, 2, 3)$ のLaplace変換 $\bar{F}_k$ は

$$\bar{F}_k = q(s) g_k(s)$$

であり、各モデルの F_k を求めると以下ようになる。

a) K-VモデルおよびV-Vモデル

$$F_k(t) = u_k \left[\frac{1 - e^{-\lambda_k t}}{\lambda_k} - \frac{\sin(\omega t + \theta_k) - e^{-\lambda_k t} \sin \theta_k}{R_k} \right] \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで、

$$R_k^2 = \alpha_k^2 + (\beta_k / \omega)^2$$

$$\theta_k = \tan^{-1}(\lambda_k / \omega)$$

b) K-Mモデル

$k=1$ の場合

$$F_k(t) = (u_{k1} + u_{k2}t) - R_k \sin(\omega t + \theta_k) \quad \dots\dots\dots(10-1)$$

ここで、

$$R_k^2 = u_{k1}^2 + (u_{k2} / \omega)^2$$

$$\theta_k = \tan^{-1}(u_{k1} \omega / u_{k2})$$

表-2 計算条件

円筒サイズ	$L/a = 3 \quad H/a = 5$
変位の計算位置	$0 \leq r \leq a \quad z = 0$ [$A(r) = 0.425, B(r) = 0, C(r) = 0.556$]
弾性係数	$E_1 = E_2$

$k=2, 3$ の場合

$$F_k(t) = \frac{u_{k2} + \{ (u_{k1} - \gamma_k) \lambda_k - u_{k2} \} e^{-\lambda_k t}}{\lambda_k} - R_k \sin(\omega t + \theta_k) \quad \dots\dots\dots(10-2)$$

ここで、

$$R_k^2 = \alpha_k^2 + (\beta_k / \omega)^2$$

$$\theta_k = \tan^{-1}(\alpha_k \omega / \beta_k)$$

c) V-Mモデル

$k=1$ の場合

$$F_k(t) = (u_{k1} + u_{k2}t) - R_k \sin(\omega t + \theta_k) \quad \dots\dots\dots(11-1)$$

ここで、

$$R_k^2 = u_{k1}^2 + (u_{k2} / \omega)^2$$

$$\theta_k = \tan^{-1}(u_{k1} \omega / u_{k2})$$

$k=2, 3$ の場合

$$F_k(t) = \alpha_k \left[\frac{1 - e^{-\lambda_{k1} t}}{\lambda_{k1}} - \frac{\sin(\omega t + \theta_{k1}) - e^{-\lambda_{k1} t} \sin \theta_{k1}}{R_{k1}} \right] + \beta_k \left[\frac{1 - e^{-\lambda_{k2} t}}{\lambda_{k2}} - \frac{\sin(\omega t + \theta_{k2}) - e^{-\lambda_{k2} t} \sin \theta_{k2}}{R_{k2}} \right] \quad \dots\dots\dots(11-2)$$

ここで、

$$R_{k1}^2 = \lambda_{k1}^2 + \omega^2, \quad R_{k2}^2 = \lambda_{k2}^2 + \omega^2$$

$$\theta_{k1} = \tan^{-1}(\lambda_{k1} / \omega), \quad \theta_{k2} = \tan^{-1}(\lambda_{k2} / \omega)$$

なお、各モデルにおける定数 $u_k, \lambda_k, \alpha_k, \beta_k$ および γ_k は付録に示す。

2.3 粘弾性モデルの変形特性

ここでは、各モデルについて繰り返し載荷に対する変位の応答特性を数値計算を実施して調べた。なお、入力条件は表-2に示す通りであり、円筒サイズおよび周波数については3章で示す実験と同一のものとした。また、計算位置は、図-3より載荷面直下の変位は一樣であることから載荷面の中心とした。なお、この条件において式(8)の $A(r), B(r)$ および $C(r)$ の計算値は表-2中に示した。以下では、粘弾性定数の違いによる変位の応答特性について述べる。

図-6は繰り返し載荷に対する変位の変化を調べたものである。なお、図中の解析値は各載荷回数 $T (T = \omega / 2\pi)$ に対する変位 w_T を T が100回時の変位 w_{100} で除した w_T / w_{100} で表し、 K/E あるいは η_2/E_2 を0.1および10と一定にし、 η_1/E_1 を0.01, 1, 100, 1000と変化させて T の増加に対する w_T / w_{100} の変化を調べた。これより、形状変化がVoigt要素であるK-VおよびV-Vモデルは T の増加に対し、一定値に収束する。この収束ま

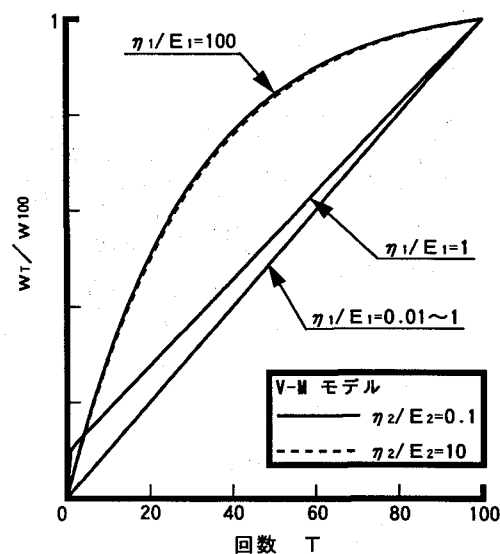
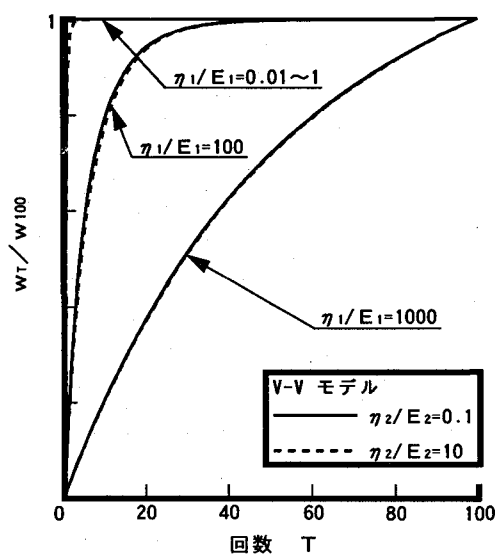
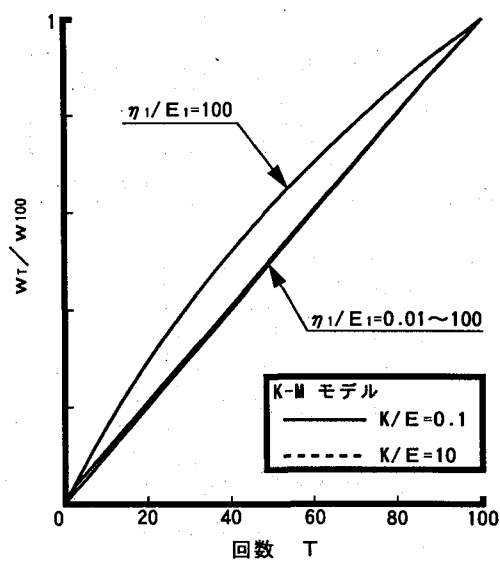
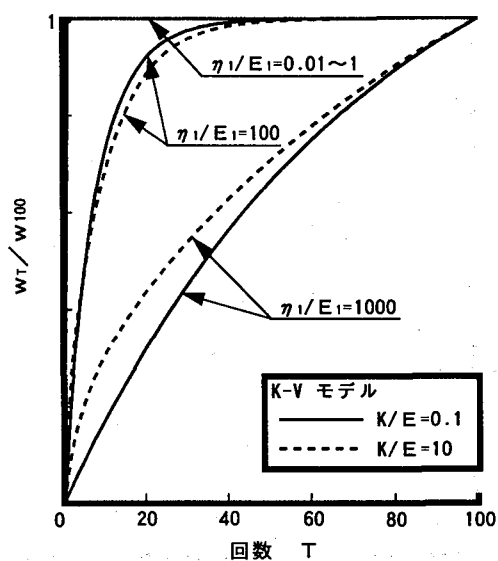


図-6 各モデルの変位の応答

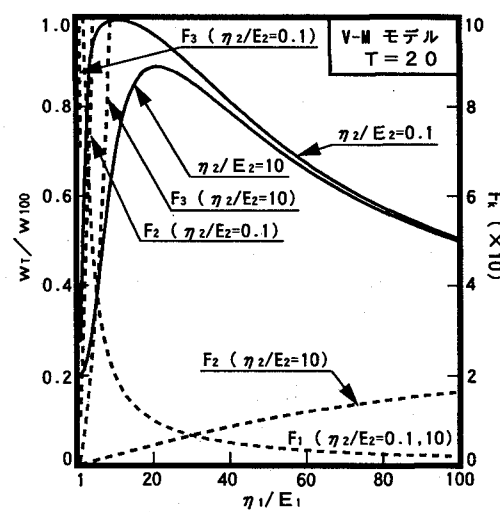
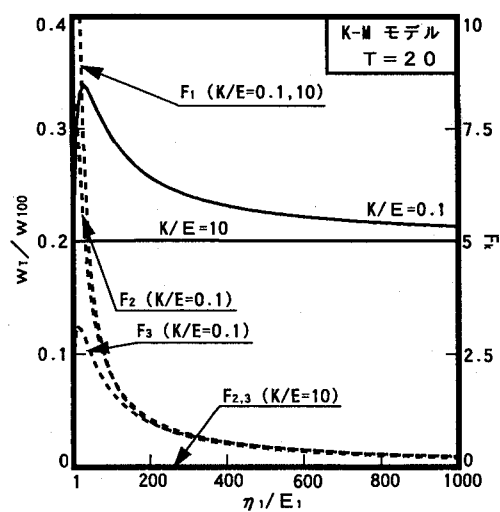


図-7 η_1/E_1 と w_T/w_{100} あるいは F_k の関係 (K-MモデルおよびV-Mモデル)

表-3 試料の物理的性質および荷重条件

密度(g/cm^3)	2.64	荷重速度	0.1Hz
75 μ 通過率(%)	0.13	荷重(kg)	荷重A 15
2000 μ 通過率(%)	100		荷重B 30
均等係数	1.35		荷重C 45

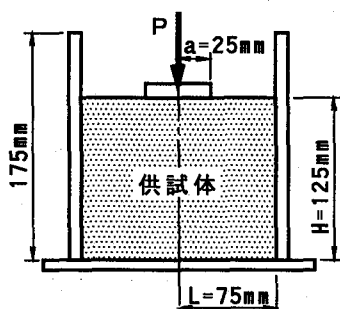


図-8 円筒型枠

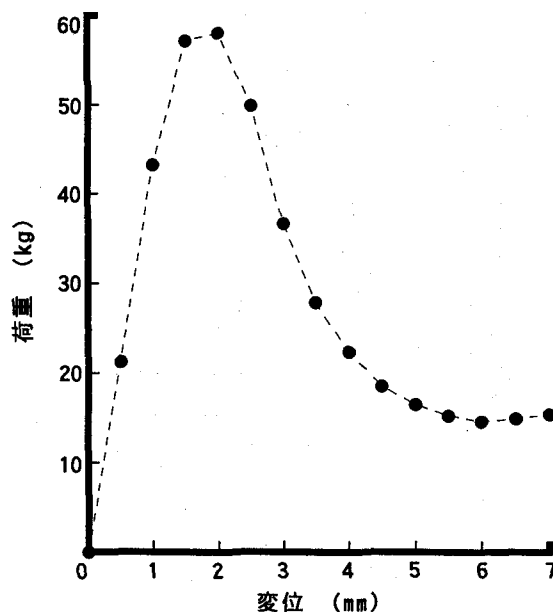


図-10 静的荷重試験結果

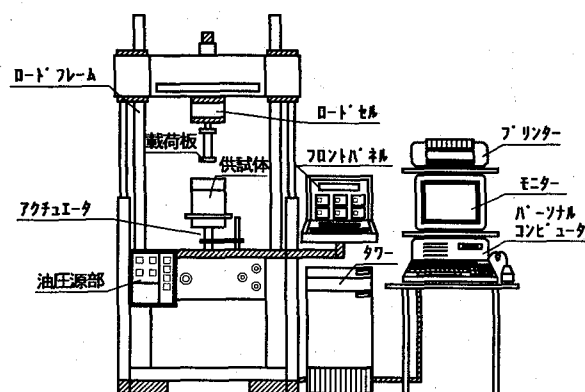


図-9 荷重装置

での過程は材料定数の大きさによって異なり、一定の K/E あるいは η_2/E_2 に対して η_1/E_1 が小さいものほど、初期の荷重回数で w_T/w_{100} は急激に増加し、また η_1/E_1 が大きなものほど緩やかな増加傾向を示し、その後一定値に収束する。

一方、形状変化がMaxwell要素であるK-MおよびV-Mモデルは、形状変化がVoigt要素のように、 T の増加に伴い一定値に収束することではなく、式(10)あるいは式(11)からもわかるように F_1 の影響を受けて w_T/w_{100} は無限に増加する。特にその増加傾向は K/E 、 η_2/E_2 あるいは η_1/E_1 の材料定数の大きさによって異なり、上に凸の曲線的な増加をする場合と、直線的な増加をする場合とがある。このような増加傾向の違いについて、 T が20回時の η_1/E_1 の違いに対する w_T/w_{100} および F_k の変化を調べたものが図-7である。

これより、まずK-Mモデルにおいて K/E が10の場合は η_1/E_1 の変化に対し w_T/w_{100} はほぼ一定となる。この場合、図-6から T の増加に対し変位は直線的な増加をするが、これは F_k の違いで見た場合に F_1 が F_2 あるいは F_3 よりも非常に大きいことに起因している。

つぎに、K-Mモデルにおける K/E が0.1およびV-Mモデルでは η_1/E_1 の変化に対し w_T/w_{100} は一定でない。この場合の F_1 は η_1/E_1 が小さい場合に大きく、 η_1/E_1 が大きくなるとK-Mモデルでは F_1 は F_2 あるいは F_3 とほぼ等しく、V-Mモデルでは F_1 は F_2 あるいは F_3 よりも非常に小さくなる。したがって、この場合の T に対する変位は η_1/E_1 が小さいときに直線的な増加傾向となり、 η_1/E_1 が大きい場合には曲線的な増加傾向が強くなる。

3. 繰り返し荷重試験と結果の推定

本章では、まず砂質土の繰り返し荷重試験を実施し、変位の応答を調べた。つぎに、試験結果と粘弾性解析結果の比較を行うために、逆解析による試験結果の推定手法を示した上で、前章で示した粘弾性モデルとの近似性の比較検討を行った。

3.1 実験概要

試料は砂質土として、標準砂(含水比0.1%)を用いた。この試料の物理的性質は表-3に示す通りである。特にこのような試料を用いたのは、一般に粘性土に比べて粘弾性的性質の適合しにくい砂質土でも2章で示したモデルで評価することが可能か否かを知るためである。使用した円筒型枠は図-8に示すJIS A 1210²⁰⁾に規定された $\phi 15\text{cm}$ モールドとした。供試体は円筒型枠内にできるだけ密に締め固めて作製し、この時の締め固め密度は 1.84g/cm^3 であった。荷重装置は、図-9に示す動的荷重試験機(インストロン社製 Model 8500)を用いた。荷重波形は図-5に示すものとし、荷重速度は0.1Hzで、繰り返し回数は100回とした。荷重は荷重速度が 1mm/min の静的荷重試験

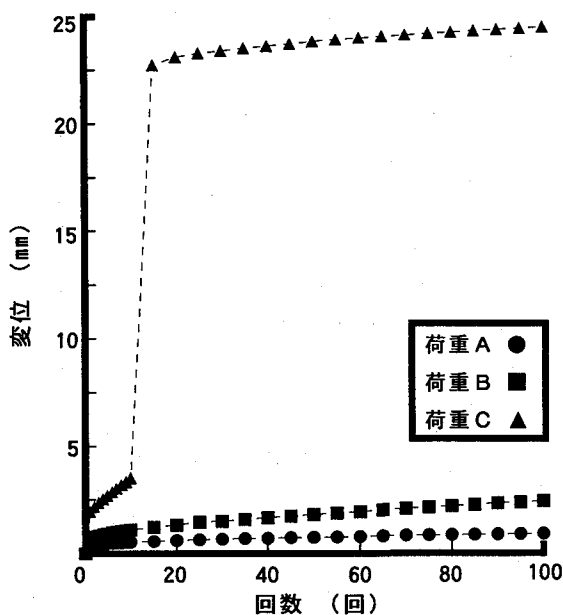


図-11 繰り返し載荷試験結果

を実施し、変位と荷重の関係が直線的に変化する範囲で設定した。具体的には静的載荷試験結果が図-10の通りに得られたことから、最大荷重の約1/4(荷重A)、2/4(荷重B)、3/4(荷重C)の荷重を選定し用いた。なお、この時の荷重は表-3に示す通りである。

3.2 試験結果

図-11は繰り返し載荷に対し、1サイクル終了時の変位と回数の関係を調べた結果である。これより、変位は初期の繰り返し回数で急激に増加し、その後緩やかに増加する傾向となる。ただし、荷重がCの結果では図-10の静的載荷試験結果からもわかるように設定荷重が最大荷重に近いために繰り返し載荷に対する残留変形が増加し、繰り返し回数の初期段階で破壊に至り、急激な変位増加を示したものと考えられる。

3.3 試験結果の推定

(1) 推定方法

3.2で示した繰り返し載荷試験結果を粘弾性モデルによる解析結果によって評価する場合、近似性の不良となる要因として供試体の変位応答特性に対するモデル誤差や載荷試験結果の測定誤差等が考えられる。したがって、実測値と解析値を一致させることは難しく、このような場合には最適処理による近似として実験結果を評価することが望ましいと考えられる。そこで粘弾性モデルの解析結果と試験結果を近似させる手法として、試験結果を用いた解析結果を逆解析して材料定数を推定し、この材料定数を用いて式(8)の順計算を実施して試験結果の評価を行った。この逆解析の手法として、近年舗装の多層弾性解析の逆解析に利用されている非線形最小二乗法で

表-4 各モデルの x_n

x_n	モデル			
	K-V	V-V	K-M	V-M
x_1	K	E_1	K	E_1
x_2	E_1	η_1	E_1	η_1
x_3	η_1	E_2	η_1	E_2
x_4	—	η_2	—	η_2

あるGauss-Newton法^{21), 22)}を用いた。以下にこの手法による推定方法を述べる。

まず、推定する材料定数を表-4に示す x_n' とし、また任意のサイクル $i(i=1, 2, \dots, N)$ における実測変位および解析変位をそれぞれ z_i および $w_i(x_n')$ とすれば、残差平方和である評価関数 f が、

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{z_i - w_i(x_n')\}^2 \quad \dots\dots\dots(12)$$

で表されることから、逆解析はこの評価関数 f を最小にする最適材料定数 x_n' を見つけたことにあたる。この最適材料定数 x_n' は任意の x_n と補正量 δx_n の和であるから、 $w_i(x_n')$ はTaylor展開して近似的に次式で表される。

$$w_i(x_n') = w_i(x_n + \delta x_n) \approx w_i(x_n) + \sum_{n=1}^m \frac{\partial w_i(x_n)}{\partial x_n} \delta x_n \quad \dots\dots(13)$$

したがって、評価関数 f は

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ z_i - w_i(x_n) - \sum_{n=1}^m \frac{\partial w_i(x_n)}{\partial x_n} \delta x_n \right\}^2 \quad \dots\dots\dots(14)$$

となり、この評価関数を最小にする必要条件是

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} = \sum_{i=1}^N \left\{ z_i - w_i(x_n) - \sum_{n=1}^m \frac{\partial w_i(x_n)}{\partial x_n} \delta x_n \right\} \left(- \frac{\partial w_i(x_n)}{\partial x_m} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

である。ここで、上式中 m はK-VおよびK-Mモデルであれば1, 2, 3、V-VおよびV-Mモデルであれば1, 2, 3, 4である。

したがって、K-VおよびK-Mモデルであれば3個、V-VおよびV-Mモデルであれば4個の δx_n に関する線形連立方程式を解き、 δx_n あるいは評価関数 f を最小にするように繰り返し計算で x_n を求めた。なお、プログラムを構築する際の制約あるいは数値微分等の手法については文献²¹⁾を参考に行った。

(2) 推定結果

図-12は載荷試験における各荷重に対する変位の実測値を用い、Gauss-Newton法により推定した材料定数から、式(8)による順解析を実施して得られた各モデルの解析値と実測値との比較である。なお、荷重Cについては繰り返し載荷の初期段階で、供試体の破壊が認められたことから、比較は行わなかった。また、逆解析に用いた測点は曲線の傾向を把握できると考えられる繰り返し回数が1, 5, 10, 50および100回の5点を用いて実施した。これは、測点数を多くしてもそれ以上の計算精度の向上

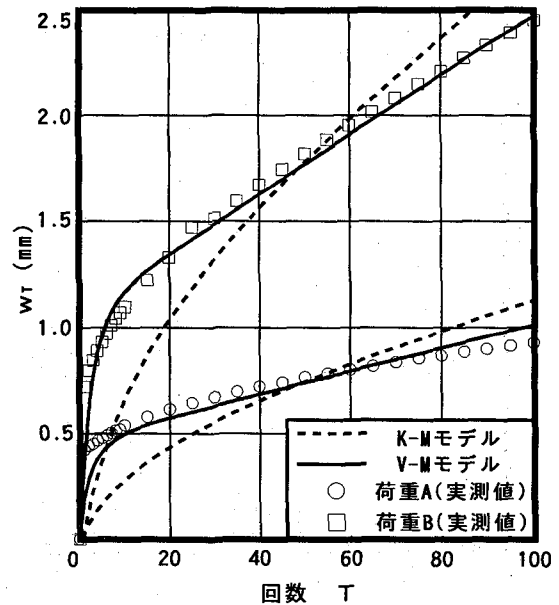
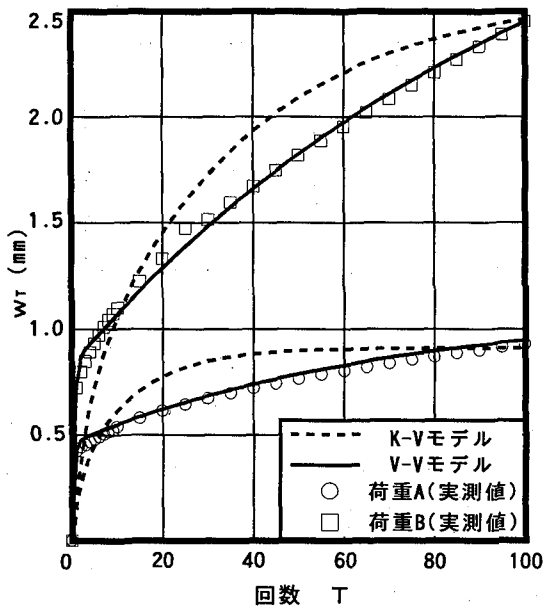


図-12 実測値の推定結果

があまり期待できなく、計算時間が多くかかるという研究結果²¹⁾を考慮した。

図-12より、各モデルの解析値と実測値がほぼ近似していると思われるのは膨張変化にVoigt要素を用いたV-VおよびV-Mモデルであり、他のモデルは近似性が不良の結果となった。ただし、膨張変化にVoigt要素を用いたモデルでも、V-Vモデルは載荷回数が初期の段階から100回までの近似性は良好な結果が得られているが、V-Mモデルは繰り返し回数が初期段階での近似性はあまり良好な結果とは言い難い。

表-5は逆解析による評価関数 f と推定材料定数の結果を示したものである。逆解析は f が 10^{-5} 以下となるまで実施したが、この条件を満足したモデルはV-Vモデルのみで、他のモデルでは f が非常に大きく、図-12の解析値と実測値との近似性が不良という結果となった。計算条件を満足する評価関数 f の値を見つけたためには初期値の選択が重要であるが、2章で行った各モデルの変形特性を考慮して種々の初期値の入力を試みたが、表に示した f が最小の結果であった。なお、具体的な初期値の選択方法は、2.3で示した粘弾性モデルの変形特性を参考に、実測による変位応答曲線が各モデルの変位応答と類似する粘弾性定数比(K/E , η_1/E_1 あるいは η_1/E_1)を予想し、この比となるランダムな値を初期値とした。

また、図-12において比較的近似性の良好な結果であったV-Mモデルも、 f が大きいことから、繰り返し回数の初期段階で実測値との近似性が悪い。実測値と解析値との近似が難しいのは、実測値において繰り返し回数の1回目の変位が極端に増加し、その後緩やかに変位が増加するという試料の変位応答に対し、設定したモデルが

材料定数の違いによって十分に表現することが困難なためと推察される。しかし、異なる試料を用いた場合あるいは同一の試料でも供試体の物理的性質の違いによっては、今回の近似性が不良であったモデルでも適合する可能性もあると考えられ、これについては今後検討する必要がある。

つぎに、逆解析により推定された材料定数は、変位が未知の材料定数の非線形な関数であるために、すべてのモデルの推定結果において、真の値との近似性あるいは結果の唯一性が保証されているとは言い難い。しかし、評価関数 f が非常に小さく順解析による解析値と実測値との近似性が良好であったV-Vモデルでは、初期値を変化させて推定を行ったが、ほぼ同一の材料定数の値が得られ、文献²¹⁾でも示されているような解析結果と同様の傾向となった。したがって、実測値に対してモデルが十分精度良く近似できれば、推定された材料定数は真の値に最も近い推定値と見なして良いと思われる。

4. あとがき

本研究では、円筒内に拘束された拘束面の摩擦の影響を受けない有限円柱について、材料自身の固有振動の影響を受けない速度での繰り返し荷重に対する鉛直変位の線形粘弾性解析を行い、この結果を砂を用いた載荷試験に適用して、本論で示した粘弾性モデルとの比較検討を行った。以下に、本論文で得られた成果を要約する。

- 1) 変位の弾性解析結果から対応原理を用いて、繰り返し荷重に対する膨張あるいは形状変化を簡単な1ないし2要素として定式化した。
- 2) 繰り返し載荷に対する変位の応答を数値計算により調べた結果、経時変化に対する変位の増加は形状変化

表-5 各モデルの評価関数 f と材料定数

モデル	荷重	評価関数 f	K	E_2	η_2	E_1	η_1
K-V	A	0.000357	9.20			2.51	319.78
	B	0.001574	7.93			1.66	618.48
V-V	A	0.000005		8.96	9666.91	3.09	14.07
	B	0.000007		1.23	6992.11	3.56	19.54
K-M	A	0.001747	7.43			1467.67	2191.56
	B	0.004494	6.42			30433.62	1739.24
V-M	A	0.000353		142.50	118.22	21912.21	118.22
	B	0.000800		153.93	184.72	5135.67	2269.57

で用いたVoigtあるいはMaxwell要素の違いに大きく依存し、それぞれに対する傾向の違いは膨張における材料定数 K/E あるいは η_2/E_2 、形状変化における材料定数 η_1/E_1 の違いに大きく影響されることが確認できた。

- 3) 標準砂の繰り返し載荷試験を実施し、試験結果と解析結果の比較を行うために、変位の実測値を用いてGauss-Newton法により逆解析を実施し、得られた材料定数を用いて順計算し、解析結果の近似性を調べた。その結果、膨張および形状変化ともにVoigt要素を用いた場合に近似性の良好な結果が得られた。

本論文で用いた試料では1モデルに対する近似性が確認できたが、試料の種類や同一試料でも物理的性質の違いによっては、他の粘弾性モデルでも、繰り返し載荷に対する変位の応答を十分に近似できるモデルが存在すると予想できる。また、載荷試験はCBRモールドを用いたが、拘束領域の大きさが測定結果や解析結果に与える影響についても検討する必要がある。しかし、本研究で用いたモデルの解析結果は円筒内に拘束された供試体の粘弾性的性質を簡単な繰り返し載荷試験により十分に知ることが可能である。ただし、逆解析で得られる材料定数の信頼性については検討する必要があると考えられるため、解析手法も含めたこの方面に関する検討や、試料あるいは供試体の物理的性質の違いに対する検討などは今後の課題とする。

最後に、本研究の実験に際し日本大学大学院生 庄嶋芳卓君の協力を得た。ここに記して謝意を表します。また、貴重なご意見を戴いた査読者に感謝いたします。

付録

以下の記号において、 $q_0' = E_1$ 、 $q_1' = \eta_1$ 、 $p_1' = \eta_1/E_1$ 、 $q_0'' = E_2$ 、 $q_1'' = \eta_2$ を表す。

- 1) K-Vモデルの u_k 、 λ_k

$$u_1 = 1/q_1', u_2 = 3/q_1', u_3 = 3/(2q_1'), \\ \lambda_1 = q_0'/q_1', \lambda_2 = (6K + q_0')/q_1', \lambda_3 = (3K + 2q_0')/(2q_1')$$

- 2) V-Vモデルの u_k 、 λ_k

$$u_1 = 1/q_1', u_2 = 3/(q_1' + 2q_1''), u_3 = 3/(2q_1' + q_1'') \\ \lambda_1 = q_0'/q_1', \lambda_2 = (q_0' + 2q_0'')/(q_1' + 2q_1'') \\ \lambda_3 = (2q_0' + q_0'')/(2q_1' + q_1'')$$

- 3) K-Mモデルの u_k 、 λ_k 、 α_k 、 β_k 、 γ_k

$$u_{11} = p_1'/q_1', u_{12} = 1/q_1', u_{21} = 3p_1'/(6Kp_1' + q_1') \\ u_{22} = 3/(6Kp_1' + q_1'), u_{31} = 3p_1'/(3Kp_1' + 2q_1') \\ u_{32} = 3/(3Kp_1' + 2q_1') \\ \lambda_2 = 6K/(6Kp_1' + q_1'), \lambda_3 = 3K/(3Kp_1' + 2q_1')$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2 u_{22} + \omega^2 u_{21}}{\lambda_2^2 + \omega^2}, \beta_2 = \frac{\omega^2 (u_{22} - \lambda_2 u_{21})}{\lambda_2^2 + \omega^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{\lambda_2 (\lambda_2 u_{21} - u_{22})}{\lambda_2^2 + \omega^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{\lambda_3 u_{32} + \omega^2 u_{31}}{\lambda_3^2 + \omega^2}, \beta_3 = \frac{\omega^2 (u_{32} - \lambda_3 u_{31})}{\lambda_3^2 + \omega^2}$$

$$\gamma_3 = \frac{\lambda_3 (\lambda_3 u_{31} - u_{32})}{\lambda_3^2 + \omega^2}$$

- 4) V-Mモデルの u_k 、 λ_k 、 α_k 、 β_k 、 γ_k

$$u_{11} = p_1'/q_1', u_{12} = 1/q_1', u_{21} = 3/(2q_1'') \\ u_{22} = 3/(2p_1' q_1''), u_{31} = 3p_1'/q_1'', u_{32} = 3p_1'/q_1'' \\ \lambda_{21} = \frac{X_2 + \sqrt{X_2^2 - 4Y_2}}{2}, X_2 = \frac{2q_1'' + 2p_1' q_0'' + q_1'}{2p_1' q_1''} \\ \lambda_{22} = \frac{q_0''}{p_1' q_1''}$$

$$Y_2 = \frac{q_0''}{p_1' q_1''} \\ \lambda_{31} = \frac{X_3 + \sqrt{X_3^2 - 4Y_3}}{2}, X_3 = \frac{q_1'' + p_1' q_0'' + 2q_1'}{p_1' q_1''} \\ \lambda_{32} = \frac{q_0''}{p_1' q_1''}$$

$$Y_3 = \frac{q_0''}{p_1' q_1''}$$

$$\alpha_2 = \frac{u_{22} - \lambda_{22} u_{21}}{\lambda_{21} - \lambda_{22}}, \beta_2 = \frac{-u_{22} + \lambda_{21} u_{21}}{\lambda_{21} - \lambda_{22}}$$

$$\alpha_3 = \frac{u_{32} - \lambda_{32} u_{31}}{\lambda_{31} - \lambda_{32}}, \beta_3 = \frac{-u_{32} + \lambda_{31} u_{31}}{\lambda_{31} - \lambda_{32}}$$

参考文献

- 1) 日本道路協会：アスファルト舗装要綱，1992。
- 2) 上浦正樹，丸山暉彦，姫野賢治，阿部長門：鉄道貨物ヤードにおけるアスファルト舗装設計に関する研究，土木学会論文集，No.520/V-28，pp.47～54，1993。
- 3) 菅原照雄：アスファルト舗装の設計法の変換と最近の研究の動向，土木学会論文集，第420号/V-13，pp.1～15，1990。
- 4) 土木学会（舗装機能の評価技術に関する小委員会）：舗装機能の評価法，1992。
- 5) 姫野賢治：パソコンによる舗装の多層弾性構造解析，ASPHALT，No.161/Vol.32，pp.65～72，1989。
- 6) R. ハース・R. ハドソン（北海道土木技術会舗装

- 研究委員会 訳) : 舗装マネジメントシステム, 1989.
- 7) 秋葉正一, 栗谷川裕造, 能町純雄, 木田哲量 : 円筒内に拘束された軸対称弾性体の解析と材料定数の簡易推定法, 構造工学論文集, Vol.40A, pp.13~22, 1994.
 - 8) 例えば, 村山朔郎 : 粘土のレオロジー的特性について, 土木学会論文集, 第40号, pp.1~31, 1956.
 - 9) 石原研而 : 二層地盤内の応力伝播に関する一考察, 土木学会論文集, 第68号, pp.32~40, 1960.
 - 10) 伊藤昭夫 : 地表での強震記録から粘弾性モデルにより推測した基盤の振動特性, 土木学会論文報告集, 第333号, pp.1~9, 1983.
 - 11) Barksdale, Richard D., and R.G.Hicks : Material Characterization and Layered Theory for Use in Fatigue Analysis, Highway Research Board Special Report 140, pp.20~48, 1973.
 - 12) 村山朔郎, 片山重夫, 天野光三 : 土の粘弾性について, 土木学会誌, 37-5, pp.27~31, 1952.
 - 13) 畑野正, 渡辺啓行 : 粘土, 砂, 碎石の動的, 静的粘弾性定数ならびにポアソン比について, 土木学会論文報告集, 第164号, pp.33~49, 1969.
 - 14) W. フリュージェ (堀幸夫 訳) : 粘弾性学, 1973.
 - 15) Nomachi, S.G. : On one Method of Solving Stress Problem in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms (Part I), Memoris of Muroran Institute of Tech. Vol.3, No.3, pp.91~115, 1960.
 - 16) Nomachi, S.G. : On one Method of Solving Stress Problem in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms (Part II), Memoris of Muroran Institute of Tech. Vol.3, No.4, pp.128~138, 1961.
 - 17) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms, Chap.10, pp.
 - 18) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity (Third Edition), McGraw-Hill, pp.403~409, 1970.
 - 19) 植下協 : 講座「舗装の力学」, 舗装, Vol.8, No.1, pp.35~37, 建設図書, 1973.
 - 20) 土質工学会 : 土質工学ハンドブック, pp.345~385, 1982.
 - 21) 松井邦人, 井上武美, 三瓶辰之 : 舗装各層の弾性係数を表面たわみから推定する一手法, 土木学会論文集, 第420号/V-13, pp.107~114, 1990.
 - 22) 土木学会 : 舗装工学, pp.116~119, 1995.

(1996年9月6日受付)