

Spline Prism法を用いた厚肉円筒パネルの3次元応力解析

3D-STRESS ANALYSIS OF THICK CYLINDRICAL PANELS BY THE SPLINE PRISM METHOD

加藤年宏*、水澤富作**
Toshihiro KATO and Tomisaku MIZUSAWA

* 大同工業大学大学院生 工学研究科建設工学専攻 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)
** 工博 大同工業大学教授 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)

This paper presents an application of the spline prism method which is a semi-analytical model based on the three-dimensional elasticity theory to stress analysis of thick, cylindrical panels subjected to uniform external pressure.

To demonstrate the accuracy of the present method, some examples are solved, and the results are compared with those obtained by other numerical methods. Good accuracy is obtained. The effects of thickness ratio, shallowness angle, radii ratio on the stress distributions along the thickness of cylindrically thick panels with some boundary conditions are analysed.

Key Words : spline prism method, thick cylindrical panel, stress analysis, 3D-elasticity theory

1. まえがき

構造物の大型化や重量化に伴いかなり分厚い円筒パネルが曲線コンクリート橋、各種圧力容器や落石防護構造などに採用されるので、このような構造要素の構造解析が設計上重要になっている。厚肉円筒パネルの構造解析では、面外せん断変形や厚さ方向の変形の影響が重要になり、従来の薄シェル理論の適用が困難になる。これまでも、面外せん断変形などを考慮した一次せん断変形シェル理論¹⁾や高次のせん断変形シェル理論²⁾が提案され、扁平な厚肉シェルの応力解析に適用されてきている。3次元連続体である厚肉円筒パネルのより正確な応力分布特性を明らかにするためには、厚さ方向の変位成分や厳密な境界条件を考慮できる3次元弾性理論に基づく必要がある。

これまでも、3次元弾性理論に基づく有限要素法を用いた厚肉円筒や球体の応力解析に関する研究は多くみられるが³⁾、4つの支持辺を有する厚肉円筒パネルに関する応力解析の研究は少ないように思われる。奥村ら⁴⁾は、厳密解法を用いて部分分布荷重を受ける厚肉円筒パネルの3次元応力解析を行っている。

最近、著者ら^{5, 6)}は有限プリズム法^{7, 8)}と同様な離散化概念に基づくSpline Prism法を用いて長方形厚板や扇形厚板の振動や曲げ解析を行い、数値安定性の高い解析結果を得ている。また、この方法を厚肉シェルパネルの振動解析に適用し⁹⁾、その振動特性について検討している。これらの解析結果より、従来の有限プリズム法と比較して、未知数が大幅に低減でき、また精度の高い結果が得られている。

本研究では、3次元弾性理論に基づくSpline Prism法を用いて、相対する円筒軸に平行な2辺で単純支持され、他の円弧辺で任意の境界条件を持つ厚肉円筒パネルの応力解析を行っている。この方法は、一方向に固有関数を仮定し、他の2方向にB-spline関数を用いた3次元の曲面帯板モデルである。本手法の解析精度や収束性に与えるスプライン次数やプリズム要素の分割数の影響について検討した。また、曲面に垂直に作用する等分布外圧力を受ける厚肉円筒パネルの応力分布特性に与えるシェル厚比、扁平角、曲率半径比や境界条件などの影響について明らかにしている。

2. 解析手法

ここでは、3次元弾性理論とポテンシャルエネルギー最小化原理を用いて、Fig. 1に示すような曲面Spline Prism要素モデルを導く。このSpline Prism法は、2方向の変位にB-spline関数を仮定し、他の一方向に変位を

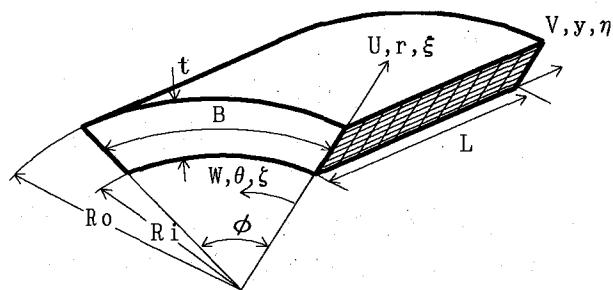


Fig. 1 厚肉円筒パネルと円筒座標系

フーリエ級数展開し、関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である。このSpline関数の次数を高めることにより、任意の高次のSpline Prismモデルが導かれる。

式の定式化にあたり、次式で表される無次元円筒座標系を用いる。

$$\xi = (r - R_i)/t, \quad \eta = y/L, \quad \zeta = \theta/\phi \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 $t = R_i(\delta - 1)$ 、 $\delta = R_o/R_i$ 、 t は円筒パネルの厚さ、 L はパネル長、 ϕ は扁平角、 r は半径であり、また R_i と R_o はそれぞれ円筒パネルの内径と外径を示す。

曲面プリズム要素で仮定される ξ 、 η 、 ζ 方向の変位関数 U, V, W は、それぞれ次式で表される。

$$U = \sum_{i=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^{i_r} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} Z_i(\zeta) \\ = \sum_{i=1}^R [N]_{mn} Z_i(\zeta) \{\delta_A\}_i$$

$$V = \sum_{i=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^{i_r} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} Z_i(\zeta) \\ = \sum_{i=1}^R [N]_{mn} Z_i(\zeta) \{\delta_B\}_i$$

$$W = \sum_{i=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^{i_r} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} \bar{Z}_i(\zeta) \\ = \sum_{i=1}^R [N]_{mn} \bar{Z}_i(\zeta) \{\delta_C\}_i \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 $i_r = k - 1 + M_r$ 、 $i_y = k - 1 + M_y$ 、 $Z_i(\zeta)$ と $\bar{Z}_i(\zeta)$ は、それぞれ円筒軸方向の直線辺で与えられた境界条件を満たした固有関数である。 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は正規化されたB-spline関数であり、 $k-1$ はB-spline関数のスプライン次数、 M_r と M_y はそれぞれ r と y 方向のプリズム要素の分割数である。 R は、固有関数の級数の項数である。また、式(2)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = \sum_{i=1}^R [S]_{mn}^i \{\Delta\}_i \quad \dots\dots\dots(3)$$

ただし、 $\{d\} = \{U, V, W\}^T$ 、 $\{\Delta\}_i = \{\{\delta_A\}_i, \{\delta_B\}_i, \{\delta_C\}_i\}^T$ であり、 $[S]_{mn}$ は、次式で表される。

$$[S]_{mn}^i = \begin{bmatrix} [N]_{mn} Z_i(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{mn} Z_i(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{mn} \bar{Z}_i(\zeta) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(4)$$

次に、3次元弾性理論で定義される垂直ひずみ及びせん断ひずみを無次元円筒座標系で表せば、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{ry} \\ \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{y\theta} \end{Bmatrix} =$$

$$(1/t) \begin{Bmatrix} \partial U / \partial \xi \\ (t/L)(\partial V / \partial \eta) \\ \{U / (\xi + R_i/t) + [1 / (\xi + R_i/t)](1/\phi) \partial W / \partial \zeta\} \\ \partial V / \partial \xi + (t/L) \partial U / \partial \eta \\ \{\partial W / \partial \xi - W / (\xi + R_i/t) + [1 / (\xi + R_i/t)](1/\phi) \partial U / \partial \zeta\} \\ \{1 / (\xi + R_i/t)(1/\phi)(\partial V / \partial \zeta) + (t/L)(\partial W / \partial \eta)\} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(5)$$

また、式(2)を式(5)に代入すれば、次式の関係式で表される。

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^R [B]_{mn}^i \{\Delta\}_i \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 $[B]_{mn}$ はひずみマトリックスである。

等方性、等質の円筒パネルの構成式は、次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{\sigma_r \ \sigma_y \ \sigma_\theta \ \tau_{ry} \ \tau_{\theta r} \ \tau_{y\theta}\}^T$ 、また弾性マトリックスは、次式で示される。

$$[D] = D_0 \begin{bmatrix} 1 & D_1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & 1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & D_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(8)$$

ただし、 $D_1 = \nu / (1 - \nu)$ 、 $D_2 = (1 - 2\nu) / 2(1 - \nu)$ 、 $D_0 = E(1 - \nu) / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$ であり、 E はヤング係数、 ν はポアソン比である。

したがって、等厚、等方性な円筒パネルのひずみエネルギー、 U_p と曲面に垂直に作用する等分布圧力 q_r による外力ポテンシャル、 V は、それぞれ次式で与えられる。

$$U_p = (t^2 L \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \\ \times \{\xi + 1 / (\delta - 1)\} d\xi d\eta d\zeta \\ = (1/2) \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \{\Delta\}_i^T [K]_{ij} \{\Delta\}_j \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$V = \int_0^1 \int_0^1 q_r L \phi t \\ \{U(\xi, \eta, \zeta) \times \{\xi + 1 / (\delta - 1)\} d\eta d\zeta\} |_{\xi = \xi_0} \\ = \sum_{i=1}^R \{\Delta\}_i^T \{F\}_i \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 $\xi_0 = r_0/t$ 、 r_0 は分布圧力の載荷位置である。

$[K]_{\xi s}$ と $\{F\}_{\xi}$ は、それぞれ剛性マトリックスと外力ベクトルであり次式で与えられる。

$$\{K\}_{\xi s} = (t^2 L \phi) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [B]_{mn}^T [D] [B]_{ij} \times \{\xi + 1 / (\delta - 1)\} d\xi d\eta d\zeta \quad \dots(11)$$

$$\{F\}_{\xi} = (q r L \phi t) [N_{n,k}(\xi_0) \cdot (\xi_0 + 1 / (\delta - 1))] \times \int_0^1 N_{n,k}(\eta) d\eta \cdot \int_0^1 Z_i(\zeta) d\zeta \quad \dots(12)$$

いま、2つの相対する円弧辺の境界面 ($\eta = \eta_{ic}$) で任意の幾何学的境界条件を考慮するため、仮想バネ法を用いる。すなわち、 $\eta = \eta_{ic}$ の境界面で、それぞれ変位 U, V, W 及び $\partial V / \partial \eta$ に対応する仮想バネ係数、 $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ を導入すれば、これらのバネによるひずみエネルギー、 U_b は、次式で与えられる。

$$U_b = (L \phi / 2) \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \alpha U^2 + \beta V^2 + \gamma W^2 + \mu (\partial V / \partial \eta)^2 \right\} d\xi d\zeta \mid \eta = \eta_{ic} \quad \dots(13)$$

ただし、 N_c は境界辺の数である。なお、固定辺、単純支持辺と自由辺の境界面で定義される幾何学的境界条件は次式のように仮定される。

(i) 固定(C): $\alpha = \beta = \gamma = \infty$ ($U = V = W = 0$)

(ii) 単純支持(S): $\alpha = \gamma = \mu = \infty$ ($U = W = \partial V / \partial \eta = 0$)

(iii) 自由(F): $\alpha = \beta = \gamma = \mu = 0$...(14)

したがって、厚い円筒パネルの全ポテンシャルエネルギー、 Π は、

$$\Pi = U_p + U_b - V \quad \dots(15)$$

で与えられる。ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いると、次式の基礎方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_{\xi}^T = \sum_{i=1}^R \left(\sum_{s=1}^Q [K]_{\xi s} \{\Delta\}_s - \{F\}_{\xi} \right) = 0 \quad \dots(16)$$

上式の剛性マトリックス $[K]_{\xi s}$ は、次式のようなサブマトリックスから構成されている。

$$[K]_{\xi s} = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] \end{bmatrix}_{\xi s} \quad \dots(17)$$

これらのサブマトリックス $[K_{ij}]$ は、Appendixに示してある。

ここで、円筒軸方向の直線辺がダイヤフラムタイプの単純支持条件 ($\xi = 0, 1$; $U = V = \partial W / \partial \xi = 0$) を仮定すれば、この場合の固有関数は、それぞれ次式で与えられる。

$$Z_i(\xi) = \sin(i\pi\xi) \\ \bar{Z}_i(\xi) = \cos(i\pi\xi); i = 1, 2, \dots, R \quad \dots(18)$$

したがって、これらの固有関数の直交性により、級数の連成項が消えるので、式(16)は次式で与えられるので

、級数ごとに解が求められる。

$$\sum_{i=1}^R ([K]_{\xi i} \{\Delta\}_i - \{F\}_{\xi}) = 0 \quad \dots(19)$$

ここで、 $[K]_{\xi i}$ の大きさは、 $3 \times (k-1+Mr) \times (k-1+My)$ である。 $k-1$ はスプライン次数であり、 Mr と My は曲面プリズム要素の分割数である。

3. 数値計算例および考察

ここでは、曲面に垂直に作用する等分布外圧力を受ける厚肉円筒パネルの厚さ方向の応力分布特性について検討している。また、数値計算では、相対する2つの円弧面が自由、固定またはダイヤフラムタイプの単純支持とし、他の2つの直線辺は単純支持されている場合について示す。計算例では、 $\nu = 0.3$ 、 $k-1=4$ 、 $Mr=My=12$ また級数の項数は $R=31$ を用いている。

Table1には、曲面に垂直に作用する等分布外圧力を受ける相対する2つの円弧面が固定された厚肉円筒パネル (SS-CC) の中央点 ($\theta = 22.5^\circ$, $y = L/2$) での厚さ方向の円筒軸方向の応力、 σ_y と円周方向の応力、 σ_θ およびたわみ、 U の収束性に与えるスプライン次数、 $k-1$ とプリズム要素の分割数、 $Mr=My$ の影響が示してある。ここで、扁平角、 ϕ は 45° 、半径比、 δ は 1.2、シェル長比、 L/R_i は 1.0 に仮定している。これより、要素の分割数をたかめると一様な収束性が示され、またスプライン次数を高めれば少ない要素分割数でも収束値に近い値が得られている。

Table 1 本手法の解の収束性に与えるスプライン次数と要素分割数の影響 : SS-CC, $\phi = 45^\circ$, $L/R_i = 1.0$, $\nu = 0.3$

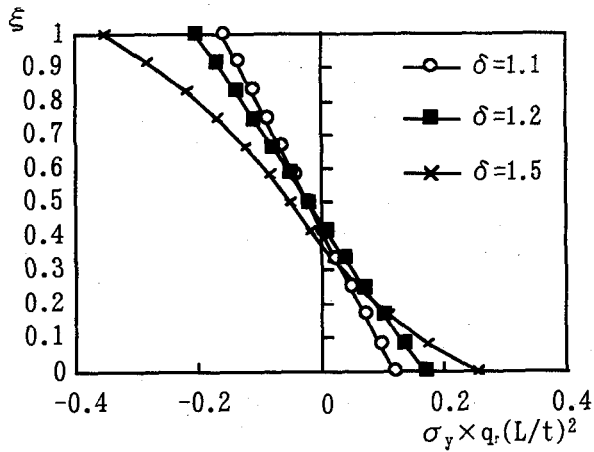
k-1	Mr=My	$\delta=1.1$		$\delta=1.5$			
		σ_y	σ_θ	U	σ_y	σ_θ	U
3	4	13.09	11.22	-163.4	1.471	1.948	-2.281
	8	12.02	10.69	-164.1	1.442	1.922	-2.295
	12	11.88	10.61	-164.5	1.432	1.913	-2.298
4	4	12.01	10.82	-163.7	1.465	1.948	-2.290
	8	11.90	10.68	-164.5	1.439	1.925	-2.297
	12	11.87	10.64	-164.8	1.432	1.916	-2.299
multiplier		q_r	$q_r \cdot t/E$	q_r	$q_r \cdot t/E$	q_r	$q_r \cdot t/E$

Table2には、本手法の解の精度を確認するために、円筒パネルの曲率半径を長くし、扁平角を小さくして等分布荷重を受ける正方形厚板のたわみと応力の精度比較について示してある。ただし、 $R_i/L = 500$ 、 $\phi = 0.114534^\circ$ 、 $\delta = 1.001$ に仮定している。比較のために、水澤ら⁵⁾の解析結果も示している。これより、よく一致した結果が得られている。

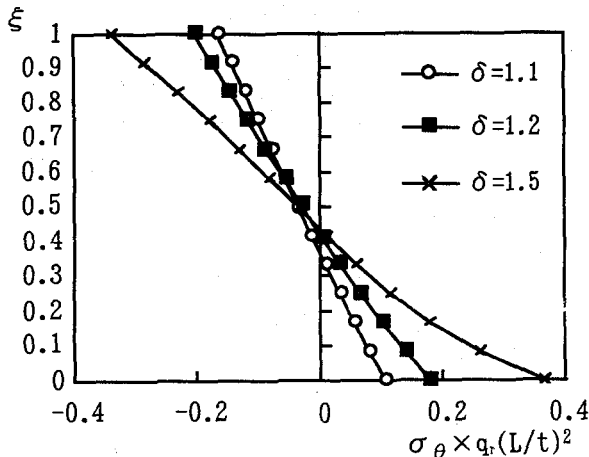
Table 2 本手法の解の精度比較 ; SS-CC, $R_i/L = 500$, $\phi = 0.114534^\circ$, $\delta = 1.001$, $k-1=4$, $Mr=My=12$

t/L	ξ	σ_y	σ_θ	U
0.2	0.0	5.098 (5.098)	4.584 (4.586)	-19.33 (-19.32)
	0.5	-0.1899 (-0.1876)	-0.04523 (-0.03959)	-20.11 (-20.1)
	1.0	-5.469 (-5.466)	-4.654 (-4.648)	-19.76 (-19.75)
	0.0	0.8623 (0.8619)	1.123 (1.122)	-1.052 (-1.052)
	0.5	-0.1583 (-0.1582)	-0.029 (-0.029)	-1.268 (-1.269)
	1.0	-1.252 (-1.251)	-1.234 (-1.234)	-1.503 (-1.504)
multiplier		q_r	$q_r \cdot t/E$	$q_r \cdot t/E$

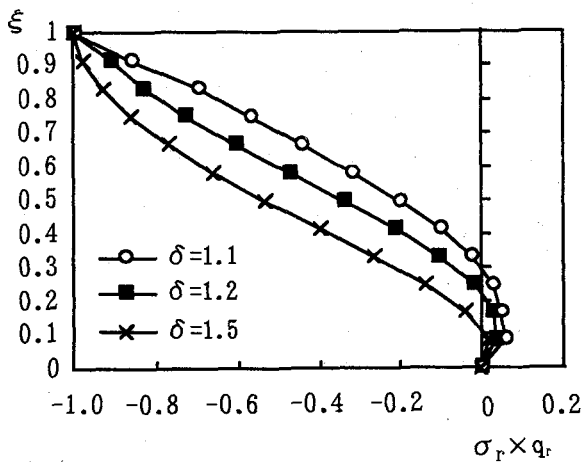
Fig. 2と3には、等分布圧力を受ける相対する2つの円弧辺が固定された円筒パネル (SS-CC) のそれぞれパネル中央点 ($\theta=22.5^\circ, y=L/2$) と固定端中央点 ($\theta=22.5^\circ, y=0$) での応力 σ_y, σ_θ と σ_r の厚さ方向の分布性状に与える $\delta=R_o/R_i$ の影響が示してある。ただし、



a) σ_y の応力分布



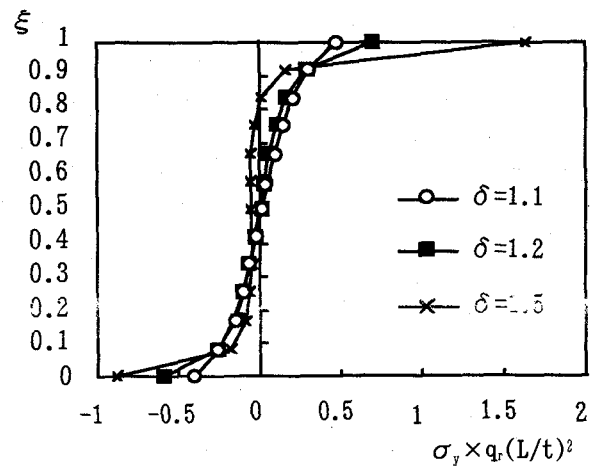
b) σ_θ の応力分布



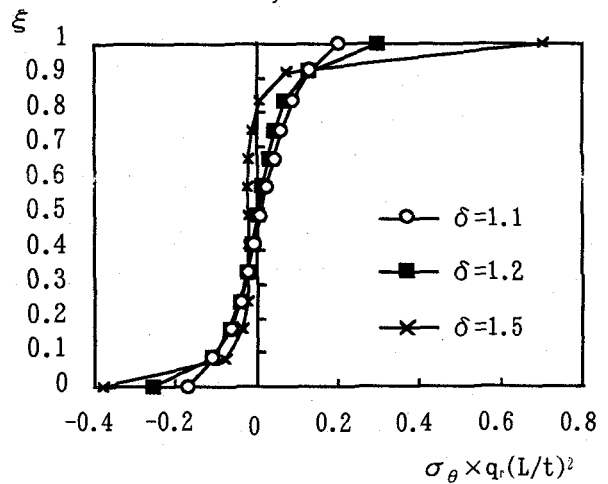
c) σ_r の応力分布

Fig.2 円弧面が固定された厚肉円筒パネルの中央点における応力 σ_y, σ_θ および σ_r の厚さ方向の応力分布性状に与える δ の影響; ss-cc, $L/R_i=1.0$, $\phi=45^\circ$

σ_r は、パネル中央点の値のみ示してある。ここで、 $\phi=45^\circ$ 、 $L/R_i=1.0$ に仮定し、 δ は1.1から1.5まで変化させている。これより、円筒パネルの中央点での応力分布は、 δ が1.2より小さくなるとほぼ直線分布を示すが、 δ の増大に従って厚さ方向の影響と表面荷重の効果が顕著に生じるので、非線形で非対称な分布性状が示される。一方、固定端中央での応力分布は、 δ が小さな値でも非線形な分布を示し、 δ の増大とともに、固定端の荷重面近傍に大きな引張応力が生じてくる。さらに、厚さ方向の垂直応力、 σ_r の応力分布図から明らかなように、パネル表面の力学的境界条件が満足されている。この σ_r の応力分布は、厚板の場合と異なり⁵⁾、 δ が小さくなると、曲率の影響により下面側に引張応力が生じてくる。この引張応力は、シェル厚比、 t/L または t/B が0.2以内になると顕著にみられる。したがって、固定端の表面近傍に発生する大きな引張応力、 σ_y, σ_θ や曲率の影響により下面側に発生する引張応力、 σ_r の分布特性は、コンクリートシェルの設計において配慮する必要があると思われる。



a) σ_y の応力分布



b) σ_θ の応力分布

Fig.3 円弧面が固定された厚肉円筒パネルの固定面中央における応力 σ_y および σ_θ の厚さ方向の応力分布性状に与える δ の影響; ss-cc, $L/R_i=1.0$, $\phi=45^\circ$

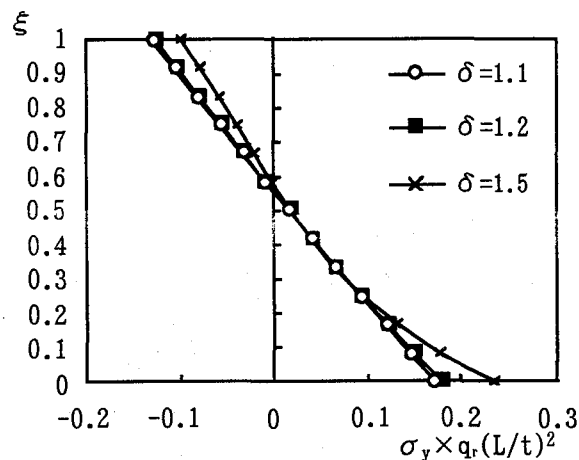
また、Fig. 4と5には、相対する2つの円弧辺が自由な厚肉円筒パネル(SS-FF)の中央点($\theta=22.5^\circ$, $y=L/2$)と自由端の中央点($\theta=22.5^\circ$, $y=0$)での応力 σ_y と σ_θ の厚さ方向の分布性状に与える $\delta=Ro/Ri$ の影響が示されている。ただし、自由端での応力は σ_θ のみを示している。これより、 δ を増大させると、面外せん断変形と表面载荷の影響が大きく現れてくるので、非対称で非線形な分布性状を示している。

Fig. 6と7には、それぞれ δ を1.2と1.5に仮定した場合の周辺単純支持された円筒パネルのパネル中央($\theta=22.5^\circ$, $y=L/2$)での応力 σ_y 、 σ_θ と σ_r の厚さ方向の分布性状に与える L/Ri の影響が示されている。ここで扁平角は 45° に仮定し、またシェル長比, L/Ri は0.5から2.0に変化させている。これより、 δ が増大すると分布性状が線形から非線形になっており、荷重の表面载荷の影響から非対称な分布を示している。また、 L/Ri が減少すると相対的にシェル厚比 t/L が増大するので面外せん断変形と表面载荷の影響が大きく現れ、非対称で非線形な分布性状を示している。さらに、厚さ方向の垂直応力, σ_r の応力分布は、 L/Ri が増大してシェル厚比が小さくなると、曲率の影響により下面側領域に引張応力が生じてきている。

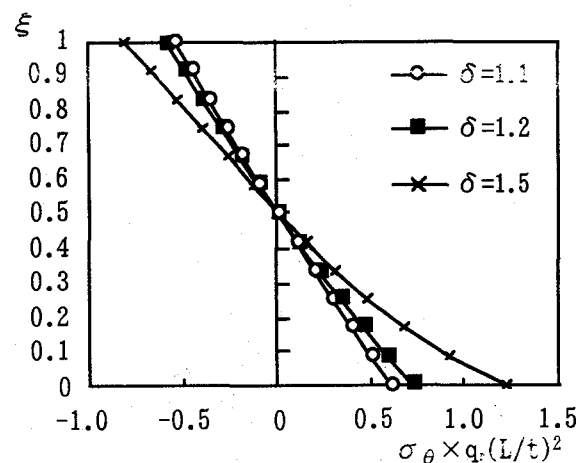
Fig. 8と9には、それぞれ扁平角が 45° と 90° の場合の等分布外圧力を受ける周辺単純支持された円筒パネル中央の $r\theta$ 面($y=L/2$)における応力 σ_y 、 σ_θ の応力分布が示されている。ここで、半径比, $\delta=1.2$ 、シェル長比, $L/Ri=1.0$ に仮定している。これらの図より、円筒軸方向の応力分布と比較して、円周方向の応力, σ_θ が扁平角により、かなり異なった分布性状を示している。

Fig. 10には、相対する2つの円弧辺が固定された比較的厚い円筒パネルの中央点($\theta=\phi/2$, $y=L/2$)での厚さ方向の応力分布(σ_y , σ_θ)に与える扁平角 ϕ の影響が示してある。ここで、 $\delta=1.2$, $L/Ri=1.0$, $t/L=0.2$ に仮定し、 ϕ を 30° から 90° まで変化させている。これより、円筒軸方向の応力, σ_y は、曲げ応力が卓越し、 ϕ に関係なくほぼ直線分布を示している。一方、円周方向の応力, σ_θ は、扁平角を増大させると面内応力が大きく生じてくることがわかる。扁平角を小さくすると、曲げ応力が卓越し、その分布が非線形な形を示す。これは扁平角を小さくすると、円筒方向のシェル厚比, t/B が大きくなるので、表面载荷と横せん断変形の影響が顕著に現れるためと考えられる。

また、Fig. 11には固定端中央($\theta=\phi/2$, $y=0.0$)における厚さ方向の応力分布が示してあるが、 σ_y , σ_θ ともに非線形な分布を示しており、扁平角が小さくなるとシェル厚比が増大してくるので荷重載荷面において大きな引張応力が生じている。

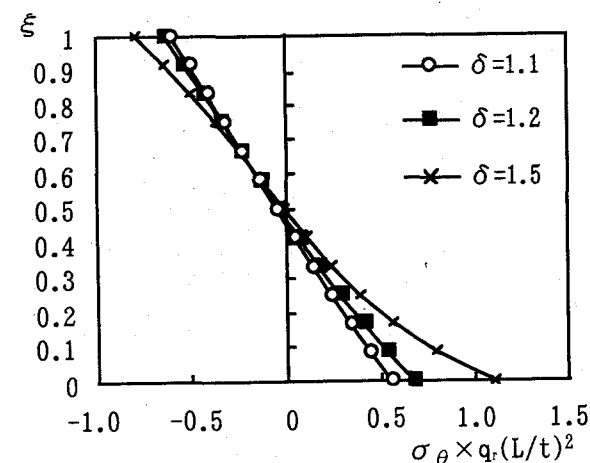


a) σ_y の応力分布



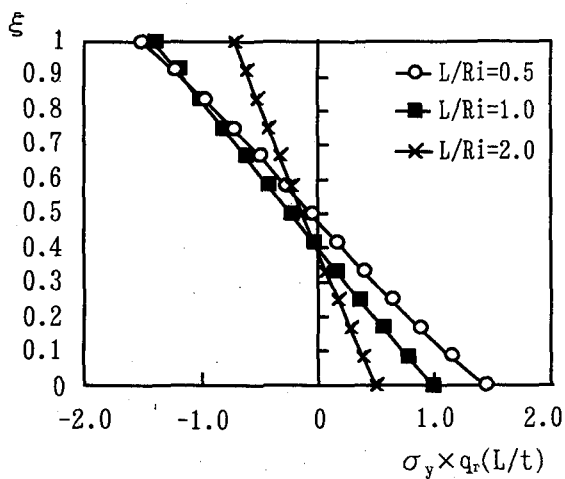
b) σ_θ の応力分布

Fig.4 円弧面が自由な厚肉円筒パネルの中央点における応力 σ_y および σ_θ の厚さ方向の応力分布性状に与える δ の影響; SS-FF, $L/Ri=1.0$, $\phi=45^\circ$

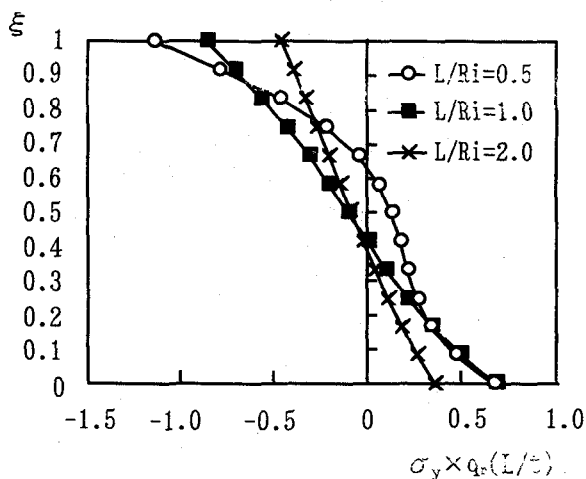


b) σ_θ の応力分布

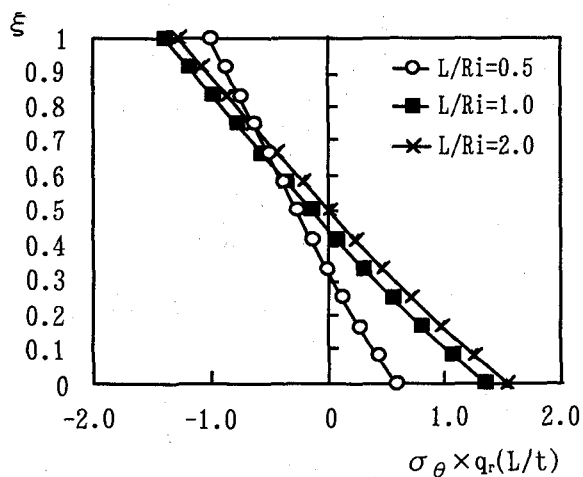
Fig.5 円弧面が自由な厚肉円筒パネルの自由端中央における応力 σ_θ の厚さ方向の応力分布性状に与える δ の影響; SS-FF, $L/Ri=1.0$, $\phi=45^\circ$



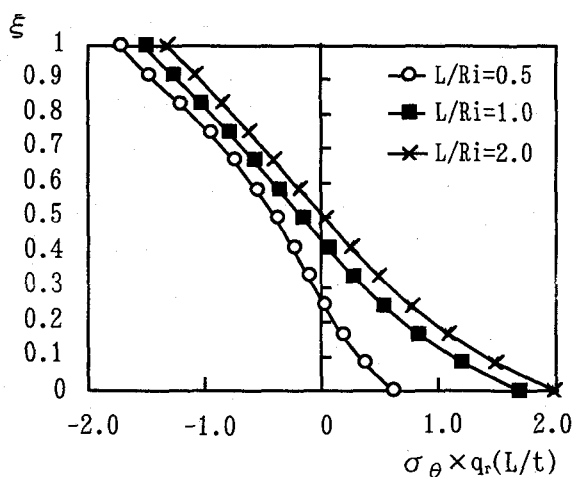
a) σ_y の応力分布



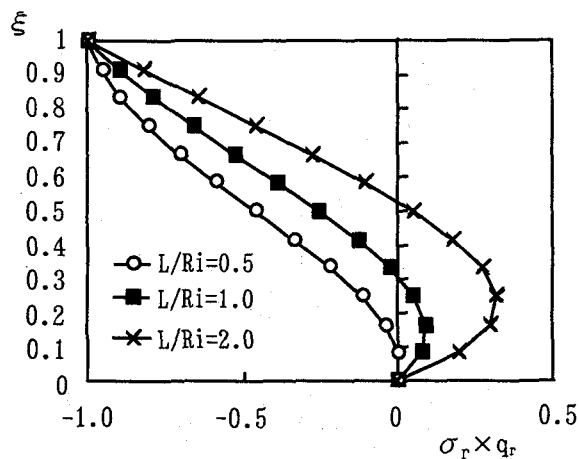
a) σ_y の応力分布



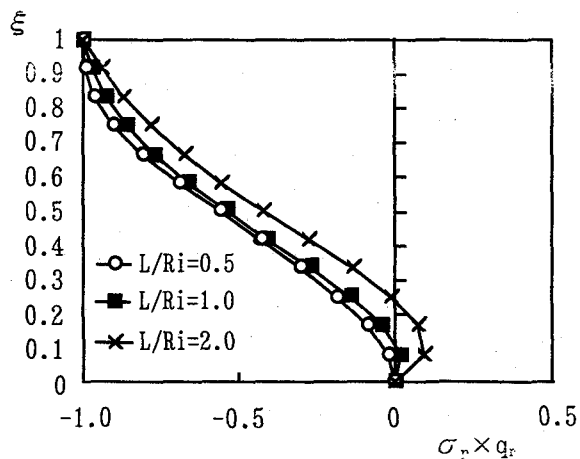
b) σ_θ の応力分布



b) σ_θ の応力分布



c) σ_r の応力分布



c) σ_r の応力分布

Fig.6 周辺単純支持された厚肉円筒パネルの中央点における応力 σ_y , σ_θ および σ_r の厚さ方向の応力分布性状に与える L/Ri の影響;
 $\delta=1.2$, $\phi=45^\circ$, SS-SS

Fig.7 周辺単純支持された厚肉円筒パネルの中央点における応力 σ_y , σ_θ および σ_r の厚さ方向の応力分布性状に与える L/Ri の影響;
 $\delta=1.5$, $\phi=45^\circ$, SS-SS

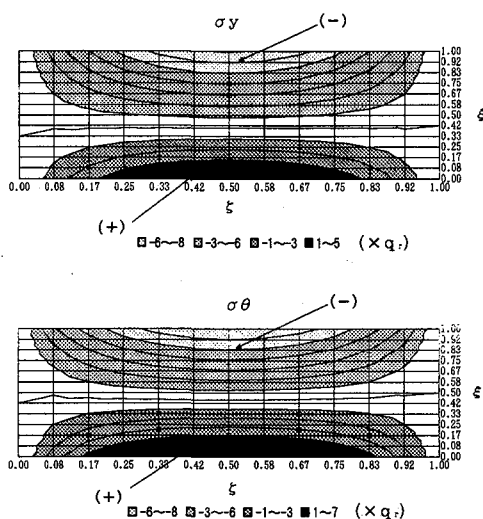


Fig.8 等分布外圧力を受ける周辺単純支持された厚肉円筒パネルの $r\theta$ 面内における応力 σ_y 、 σ_θ の応力分布； $\phi=45^\circ$ 、 $\delta=1.2$ 、 $L/Ri=1.0$ 、 $\nu=0.3$

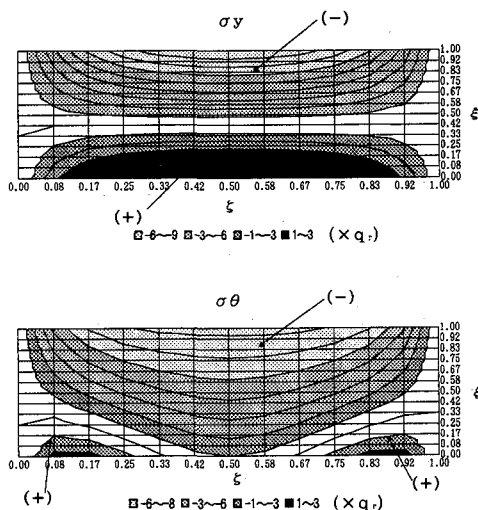
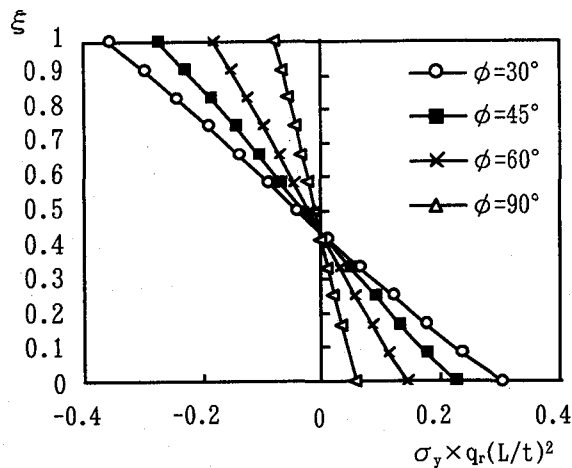


Fig.9 等分布外圧力を受ける周辺単純支持された厚肉円筒パネルの $r\theta$ 面内における応力 σ_y 、 σ_θ の応力分布； $\phi=90^\circ$ 、 $\delta=1.2$ 、 $L/Ri=1.0$ 、 $\nu=0.3$

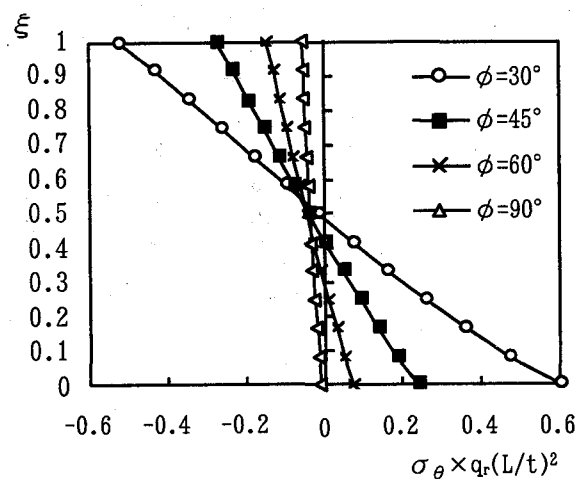
4. あとがき

本文では、Spline Prism法を用いて、等分布外圧力を受ける厚肉円筒パネルの応力解析を行い、厚さ方向の応力分布特性に与えるシェル厚比や扁平角などの影響について検討を行った。得られた結果をまとめると、以下のようになる。

- 1) 厚肉円筒パネルの厚さ方向の応力は、シェル厚に大きく依存し、半径比の増大とともに、非対称で、非線形な分布性状を示す。しかし、半径比が1.2より小さくなると、厚さ方向の応力はほぼ直線分布を示す。
- 2) 厚肉円筒パネルの応力分布性状は扁平角とシェル長比に依存し、また、半径比を一定にした場合、扁平角とシェル長比を小さくすると、相対的にシェル厚が大きくなるのでその応力が非線形な分布性状を示す。
- 3) 固定端での応力はかなり薄い場合でも非線形な分布



a) σ_y の応力分布



b) σ_θ の応力分布

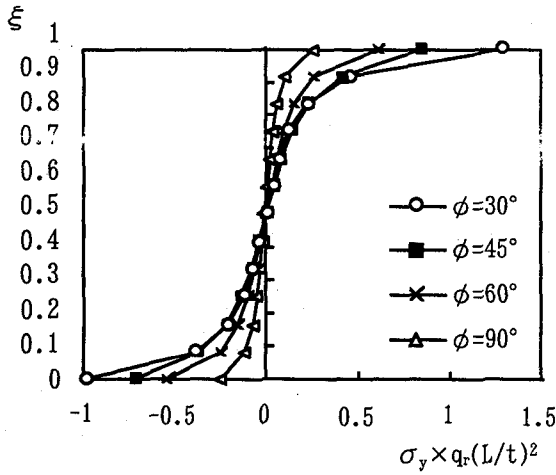
Fig.10 円弧面が固定された厚肉円筒パネルの中央点における応力 σ_y および σ_θ の厚さ方向の応力分布性状に与える ϕ の影響；SS-SS, $\delta=1.2$, $L/Ri=1.0$

を示し、シェル厚の増大に従って、荷重の載荷面にかなり大きな引っ張り応力が局所的に生じてくる。

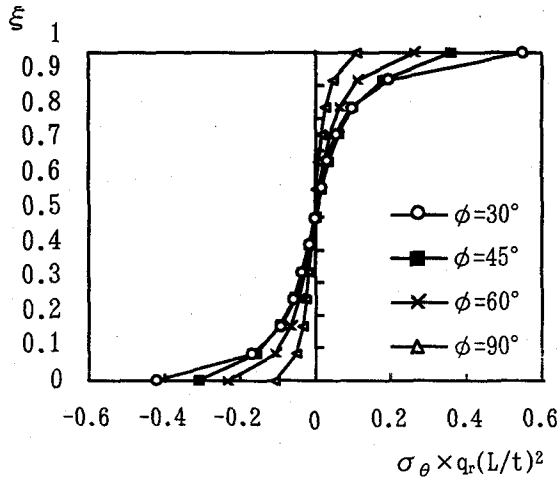
4) シェルの厚さ方向の垂直応力は、厚板の場合と異なり、シェル厚が小さくなると、曲率の影響により下面側に引張応力が生じてくる。この引張応力は、シェル厚比 t/L または t/B が0.2以内になると顕著にみられる。

5) したがって、固定端の表面近傍に発生する大きな引張応力、 σ_y 、 σ_θ や曲率の影響により下面側領域に発生する引張応力、 σ_r は、コンクリートシェルの設計において配慮する必要があると思われる。

最後に、本研究は大同工業大学研究奨励金の援助を受けて行ったもので、ここに関係各位に謝意を表します。数値計算には大同工業大学情報処理センターを利用させて頂きました。また、貴重なご意見を頂きました査読者に謝意を表します。



a) σ_y の応力分布



b) σ_θ の応力分布

Fig.11 円弧面が固定された厚肉円筒パネルの固定面中央における応力 σ_y および σ_θ の厚さ方向の応力分布性状に与える ϕ の影響; SS-SS, $\delta=1.2$, $L/Ri=1.0$

APPENDIX

式(16)で与えられるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$[K_{uu}] = (L\phi D_0/t) \left\{ \overset{111}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + \overset{010}{D_1} \overset{000}{I_{mi}} \overset{100}{J_{nj}} A_1 + \overset{100}{D_1} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + D_2(t/L)^2 \overset{001}{I_{mi}} \overset{110}{J_{nj}} A_1 + D_2(1/\phi)^2 \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_2 \right\}$$

$$[K_{uv}] = (L\phi D_0/t) \left\{ \overset{101}{D_1(t/L)} \overset{010}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + \overset{000}{D_1(t/L)} \overset{010}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + \overset{011}{D_2(t/L)} \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 \right\}$$

$$[K_{uw}] = (L\phi D_0/t) \left\{ \overset{100}{D_1(1/\phi)} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_3 + \overset{00-1}{(1/\phi)} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_3 + \overset{010}{D_2(1/\phi)} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_4 + \overset{00-1}{D_2(1/\phi)} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_4 \right\}$$

$$[K_{vu}] = (L\phi D_0/t) \left\{ \overset{011}{D_1(t/L)} \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + \overset{000}{D_1(t/L)} \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + \overset{101}{D_2(t/L)} \overset{010}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 \right\}$$

$$[K_{vv}] = (L\phi D_0/t) \left\{ \overset{001}{(t/L)^2} \overset{110}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + \overset{111}{D_2} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_1 + D_2(1/\phi)^2 \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_2 \right\}$$

$$[K_{vw}] = (L\phi D_0/t) \left\{ \overset{000}{D_1(t/L)(1/\phi)} \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_3 + \overset{000}{D_2(1/\phi)} \overset{010}{(t/L)} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_5 \right\}$$

$$[K_{wu}] = (L\phi D_0/t) \left\{ \overset{010}{D_1(1/\phi)} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_6 + \overset{00-1}{(1/\phi)} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_6 + \overset{100}{D_2(1/\phi)} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_5 + \overset{00-1}{D_2(1/\phi)} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_5 \right\}$$

$$[K_{wv}] = (L\phi D_0/t) \left\{ \overset{000}{D_1(t/L)(1/\phi)} \overset{010}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_6 + \overset{000}{D_2(t/L)(1/\phi)} \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_5 \right\}$$

$$[K_{ww}] = (L\phi D_0/t) \left\{ \overset{00-1}{(1/\phi)^2} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_7 + \overset{111}{D_2} \overset{000}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_8 + \overset{100}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_8 + \overset{010}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_8 + \overset{00-1}{I_{mi}} \overset{000}{J_{nj}} A_8 + (t/L)^2 \overset{001}{I_{mi}} \overset{110}{J_{nj}} A_8 \right\}$$

ただし、 I_{mi} と J_{nj} は、次式で示される。

$$I_{mi} = \int_0^{tu} N_{n,k}(\xi) N_{n,k}(\xi) \{ \xi + 1/(\delta-1) \} d\xi d\xi$$

$$J_{nj} = \int_0^1 N_{n,k}(\eta) N_{n,k}(\eta) \{ \xi + 1/(\delta-1) \} d\xi d\xi$$

ここで、 t, u は、それぞれ導関数の次数である。また、 C は乗数である。また、 A_i は、次式で定義される。

$$A_1 = \int_0^1 Z \iota(\xi) Z p(\xi) d\xi,$$

$$A_2 = \int_0^1 \dot{Z} \iota(\xi) \dot{Z} p(\xi) d\xi$$

$$A_3 = \int_0^1 Z \iota(\xi) \dot{\dot{Z}} p(\xi) d\xi$$

$$A_4 = \int_0^1 \dot{Z} \iota(\xi) \dot{\dot{Z}} p(\xi) d\xi$$

$$A_5 = \int_0^1 \ddot{Z} \iota(\xi) \dot{Z} p(\xi) d\xi$$

$$A_6 = \int_0^1 \ddot{Z} \iota(\xi) Z p(\xi) d\xi$$

$$A_7 = \int_0^1 \dot{\dot{Z}} \iota(\xi) \dot{\dot{Z}} p(\xi) d\xi$$

$$A_8 = \int_0^1 \ddot{Z} \iota(\xi) \ddot{Z} p(\xi) d\xi$$

ただし、 $\dot{}$ は導関数である。

参考文献

- 1). Noor, A.K. and Burton, W.S.: Assessment of computational models for multilayered composite. *Applied Mechanics Reviews*, 43(4), 67-97, 1990.
- 2). Reddy, J.N. and Liu, C.F.: A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *Int. J. Eng. Sci.* 25, 319-330, 1985.
- 3). Gilewski, W. and Radwanska, M.: A survey of finite element models for the analysis of moderately thick shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 9, 1-21, 1991.
- 4). Okumura, I.: On stresses in very thick cylindrical panels analyzed by the three-dimensional theory of elasticity. *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.31, pp.73-83, 1982.
- 5). 水澤富作、高木信治: Spline Prism法を用いた長方形厚板の三次元曲げ解析について. *土木学会論文集*, 第489号/I-27, 101-110, 1994.
- 6). 高木信治, 水澤富作: Spline Prism法を用いた扇形厚板の三次元解析について. *構造工学論文集*, 40A, 1-12, 1994.
- 7). Zienkiewicz, O.C. and Too, J.J.M.: The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes. *Procs ICE*, 53, 147-172, 1972.
- 8). Cheung, Y.K.: *Finite strip method in structural analysis*. New York: Pergamon Press, 1977.
- 9). 水澤富作、加藤年宏: Spline Prism法を用いた厚肉円筒パネルの振動解析について. *構造工学論文集*, 41A, 65-71, 1995.

(1997年 9月6日受付)