

異方性円板の弾性衝撃応答解析

IMPACT RESPONSE ANALYSIS OF TRANSVERSELY ISOTROPIC CIRCULAR PLATES

小林治俊*, 米田幸司**, 石丸和宏***, 園田恵一郎****

Harutoshi Kobayashi, Koji Yoneda, Kazuhiro Ishimaru and Keiichiro Sonoda

- | | | |
|------|--------------------|---------------------------------|
| * 工博 | 大阪市立大学助教授 | 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138) |
| ** | 大阪市立大学大学院前期博士課程 | 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138) |
| *** | 工修 大阪市立大学大学院後期博士課程 | 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138) |
| **** | 工博 大阪市立大学教授 | 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138) |

Transient elastic waves inside a transversely isotropic circular plate are investigated. Exact analysis is developed using the method of eigenfunction expansion and extended Hu's potential function based on the theory of three dimensional elastodynamics. Numerical results at some locations of interest are shown for a partially distributed uniform load suddenly applied on a plate top surface, and then comparisons between the results of isotropic and transversely isotropic cases are made.

Keywords: circular plate, impact response, stress wave, transversely isotropy

1. はじめに

衝撃荷重を受ける弾性体の波動伝播を動弾性論を用いて究明する研究は、これまではほとんどが等方弾性体を対象としているが、今後は異方弾性体を対象とする研究が盛んになると思われる。それは、近年、軽量でしかも高強度である繊維補強複合材料の開発がめざましく、巨視的には異方性と見なせる複合材料の力学特性を解明する必要性が増しているからである。もちろん、複合材料の力学としての積層板理論を用いることも意味あることであるが、spalling 破壊に関連する板厚方向の応力を無視しているため、この理論で得られる結果は応力波の伝播現象を正しく表現しているとは言えない。さらに、有限要素法に代表される近似解法が衝撃解析に用いられる際のベンチマークとしても動弾性論より得られた結果は重要と思われる。

本研究は、横等方性材料よりなる円板の衝撃応答解析を動弾性論に基づいて行ったものである。解析手法には著者らがこれまで等方材料よりなる多層板構造[1]や異方性の厚肉円筒・球殻[2]の衝撃応答解析に適用した固有関数展開法を用い、固有関数(振動モード関数)を求める際に必要な波動方程式は静的問題の Hu のポテンシャル関数[3]を拡張して導いた。最後に数値計算において、等方性との比較を通じ、材料異方性が応答に及ぼす影響を調べた。

2. 衝撃応答解析

2.1 基礎方程式

図-1は、本研究で取り扱う軸対称、横等方性円板の座標系であり、 (r, θ) 面を等方面とし z 軸を異方軸としている。

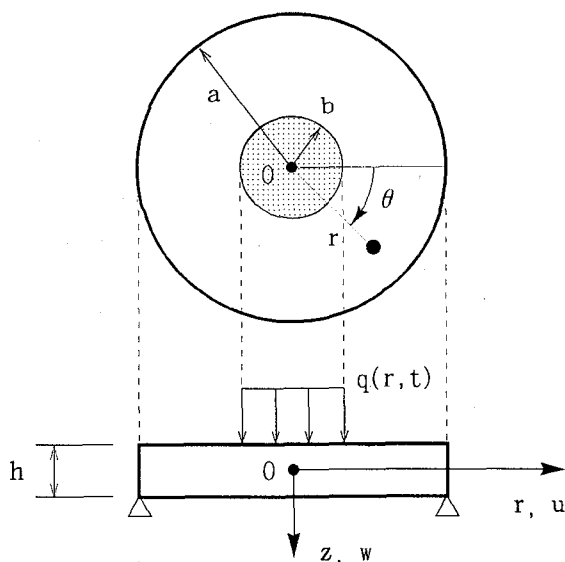


図-1 軸対称円板の座標系

本解析での応力・変位関係は次のように与えられる[4].

$$\sigma_r = C_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + C_{12} \frac{u}{r} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} &= C_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + C_{11} \frac{u}{r} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \\
\sigma_z &= C_{13} \frac{\partial u}{\partial r} + C_{13} \frac{u}{r} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \\
\tau_{rz} &= C_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\
\tau_{\theta z} &= \tau_{r\theta} = 0
\end{aligned} \quad (1)$$

ここに C_{11} は材料定数であり、等方性 (r, θ) 内でのヤング率、ポアソン比を E, ν とし、等方に垂直な面内でのヤング率、ポアソン比、せん断弾性係数をそれぞれ E', ν', G とすれば次のように表される。

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{E[1-(\nu')^2(E/E')]}{(1+\nu)R} \\
C_{12} &= \frac{E[\nu+(\nu')^2(E/E')]}{(1+\nu)R} \\
C_{13} &= \frac{E\nu'}{R}, \quad C_{33} = \frac{E'(1-\nu)}{R}, \quad C_{44} = G
\end{aligned} \quad (2)$$

ただし、

$$R = 1 - \nu - 2(\nu')^2(E/E')$$

変位で表したつり合い式は、 ρ を密度として、

$$\begin{aligned}
L_r(u, w) &= \rho \ddot{u} \\
L_z(u, w) &= \rho \ddot{w}
\end{aligned} \quad (3)$$

であり、演算子 L_r, L_z の内容は

$$\begin{aligned}
L_r(u, w) &= C_{11} \left[\nabla_1^2 u - \frac{u}{r^2} \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{44} \frac{\partial u}{\partial z} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial w}{\partial r} \right] \\
L_z(u, w) &= C_{44} \nabla_1^2 w \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[(C_{13} + C_{44}) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \right]
\end{aligned} \quad (4)$$

また、ドットは時間微分 ($= \partial/\partial t$) を意味し、 ∇_1^2 は次に示す演算子である。

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (5)$$

境界条件を次のように規定する。

$$\begin{aligned}
w &= \sigma_z = 0 & (r=a) \\
\tau_{rz} &= 0, \quad \sigma_z = -q(r, t) & (z=-h/2) \\
\tau_{rz} &= \sigma_z = 0 & (z=h/2)
\end{aligned} \quad (6)$$

なお、 $r=a$ での支持条件は解析上の都合による[1]。

ここで、荷重 $q(r, t)$ は Bessel 展開により

$$q(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m J_0(\alpha_m r)$$

$$q_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_m a)} \int_0^a q(r, t) J_0(\alpha_m r) r dr \quad (7)$$

と表せる。ただし J_0 は 0 次の Bessel 関数、 α_m は $J_0(\alpha_m a) = 0$ の m 番目の正根である。

初期条件は静止状態からの衝撃応答を考えると次式で与えられる。

$$u = w = 0, \quad \dot{u} = \dot{w} = 0 \quad (t=0) \quad (8)$$

2.2 固有関数展開法による衝撃応答解析

固有関数展開法[1, 2]によれば、つり合い式(3)の解を次のように慣性項を無視した準静的解 u^s と擾乱解 u^d の和で与えることができる。

$$\begin{aligned}
u &= u^s(r, z, t) + u^d(r, z, t) \\
w &= w^s(r, z, t) + w^d(r, z, t)
\end{aligned} \quad (9)$$

準静的解はつり合い式：

$$\begin{aligned}
L_r(u^s, w^s) &= 0 \\
L_z(u^s, w^s) &= 0
\end{aligned} \quad (10)$$

および境界条件式：

$$\begin{aligned}
w^s &= \sigma_z^s = 0 & (r=a) \\
\tau_{rz}^s &= 0, \quad \sigma_z^s = -q(r, t) & (z=-h/2) \\
\tau_{rz}^s &= \sigma_z^s = 0 & (z=h/2)
\end{aligned} \quad (11)$$

を満足する。ただし応力は式(1)より

$$\begin{aligned}
\sigma_z^s &= C_{13} \frac{\partial u^s}{\partial r} + C_{13} \frac{u^s}{r} + C_{33} \frac{\partial w^s}{\partial z} \\
\tau_{rz}^s &= C_{44} \left(\frac{\partial u^s}{\partial z} + \frac{\partial w^s}{\partial r} \right)
\end{aligned} \quad (12)$$

などで与えられる。

擾乱解は未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ と固有関数(振動モード関数) $U_{mn}(r, z)$, $W_{mn}(r, z)$ の積より成る次の級数で与える。ただし、 m, n はそれぞれ r, z 方向の波数である。

$$(u^d, w^d) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) (U_{mn}, W_{mn}) \quad (13)$$

固有関数は本問題の自由振動解析から得られる振動モード関数であり、方程式：

$$\begin{aligned}
L_r(U_{mn}, W_{mn}) &= -\rho \omega_{mn}^2 U_{mn} \\
L_z(U_{mn}, W_{mn}) &= -\rho \omega_{mn}^2 W_{mn}
\end{aligned} \quad (14)$$

と境界条件：

$$\begin{aligned}
W_{mn} &= \sigma_{z, mn} = 0 & (r=a) \\
\tau_{rz, mn} &= \sigma_{z, mn} = 0 & (z=\pm h/2)
\end{aligned} \quad (15)$$

を満たすものである。ただし、 ω_{mn} は固有円振動数で、応力は式(1)より次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_{z, mn} &= C_{13} \frac{\partial U_{mn}}{\partial r} + C_{13} \frac{U_{mn}}{r} + C_{33} \frac{\partial W_{mn}}{\partial z} \\ \tau_{rz, mn} &= C_{44} \left[\frac{\partial U_{mn}}{\partial z} + \frac{\partial W_{mn}}{\partial r} \right]\end{aligned}\quad (16)$$

固有関数には Betti の相反定理より求められる次の直交性がある。

$$\int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} (U_{ij} U_{mn} + W_{ij} W_{mn}) r dr dz = \delta_{im} \delta_{jn} N_{mn}^2 \quad (17)$$

ここに δ_{im} , δ_{jn} はクロネッカのデルタ, N_{mn} はノルムである。

以上より求められる準静的解および自由振動解が、衝撃問題の境界条件(6)を満足していることは明らかである。したがって次に未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ を求める手順を示す。式(9), (13)を式(3)へ代入し、式(10), (14)を利用すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mn} + \omega_{mn}^2 Q_{mn}) U_{mn} &= -\ddot{u}^s \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{Q}_{mn} + \omega_{mn}^2 Q_{mn}) W_{mn} &= -\ddot{w}^s\end{aligned}\quad (18)$$

ここで第1式の両辺に U_{ij} , 第2式では W_{ij} を掛けて加え合わせ、次に物体全体にわたって積分し、式(17)の固有関数の直交条件を利用すると

$$\ddot{Q}_{mn} + \omega_{mn}^2 Q_{mn} = \ddot{Z}_{mn}(t) \quad (19)$$

を得る。ただし

$$Z_{mn} = \frac{-1}{N_{mn}^2} \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} (u^s U_{mn} + w^s W_{mn}) r dr dz \quad (20)$$

式(19)の解は周知のように次式で与えられる。

$$\begin{aligned}Q_{mn}(t) &= Q_{mn}(0) \cos \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \dot{Q}_{mn}(0) \sin \omega_{mn} t \\ &+ \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t \ddot{Z}_{mn}(\tau) \sin[\omega_{mn}(t-\tau)] d\tau\end{aligned}\quad (21)$$

積分定数 $Q_{mn}(0)$, $\dot{Q}_{mn}(0)$ を求めるため、初期条件の式(8)に式(9), (13)を代入すると、まず $u=w=0$ より

$$\begin{aligned}u^s(r, z, 0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(0) U_{mn}(r, z) \\ w^s(r, z, 0) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(0) W_{mn}(r, z)\end{aligned}\quad (22)$$

が得られ、第1, 第2式の両辺にそれぞれ U_{ij} , W_{ij} を掛けて加え合わせ、物体全体にわたって積分し、固有関数の直交条件を用いれば、

$$Q_{mn}(0) = Z_{mn}(0) \quad (23a)$$

同様にして

$$\dot{Q}_{mn}(0) = \dot{Z}_{mn}(0) \quad (23b)$$

を得る。

以上が固有関数展開法による定式化であり、次の3, 4節で固有関数および準静的解の具体式を求める。

3. 固有関数

式(14)の解を求めるため、静的問題に対する Hu の変位関数[3]を拡張して、次のように採る。

$$\begin{aligned}U_{mn} &= \frac{\partial^2 \phi_{mn}}{\partial r \partial z} \\ W_{mn} &= \frac{-1}{C_{13} + C_{44}} \left[C_{11} \nabla_1^2 + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega_{mn}^2 \right] \phi_{mn}\end{aligned}\quad (24)$$

これを式(14)へ代入すると、 ϕ_{mn} に関する次式を得る。

$$\begin{aligned}\left[\left(C_{11} \nabla_1^2 + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \omega_{mn}^2 \right) \left(C_{44} \nabla_1^2 + C_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \rho \omega_{mn}^2 \right) - (C_{13} + C_{44})^2 \nabla_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi_{mn} = 0\end{aligned}\quad (25)$$

ここで、境界条件式(15a)を満足するよう ϕ_{mn} を次式に採る。

$$\phi_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{mn}(z) J_0(\alpha_m r) \quad (26)$$

上式を式(25)へ代入し整理すると、次の Φ_{mn} に関する4階の方程式を得る。

$$A \frac{d^4 \Phi_{mn}}{dz^4} + B \frac{d^2 \Phi_{mn}}{dz^2} + C \Phi_{mn} = 0 \quad (27)$$

ただし、

$$\begin{aligned}A &= C_{33} C_{44} \\ B &= (C_{13}^2 + 2C_{13} C_{44} - C_{11} C_{33}) \alpha_m^2 + (C_{33} + C_{44}) \rho \omega_{mn}^2 \\ C &= (C_{11} \alpha_m^2 - \rho \omega_{mn}^2) (C_{44} \alpha_m^2 - \rho \omega_{mn}^2)\end{aligned}\quad (28)$$

次に、

$$\Phi_{mn} = e^{\beta z} \quad (29)$$

とおき式(27)へ代入すると、 β に関する特性方程式

$$A \beta^4 + B \beta^2 + C = 0 \quad (30)$$

を得る。これは β^2 についての2次方程式であるが、 A, B, C すなわち材料定数 C_{ij} , 固有円振動数 ω_{mn} によって根の形式が異なる。全ての形式を考えるとすれば、(1) 2正根、(2) 1正根、1負根、(3) 2負根、(4) 共役複素根となる。したがって、式(30)はこれらの場合に対応して、(1) 4実根、(2) 2実根、2虚根、(3) 4虚根、(4) 2共役複素根をもつことになる。以下では煩雑さをさけるため、4実根の場合の取扱いの方のみを示すことにする。

それで、式(30)を β^2 の2次式とみなした場合の2正根を β_1^2, β_2^2 とすれば、式(27)の解は $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$

を積分定数として

$$\Phi_{mn} = (A_{mn} \cosh \beta_1 z + B_{mn} \sinh \beta_1 z) / \alpha_m \beta_1 + (C_{mn} \cosh \beta_2 z + D_{mn} \sinh \beta_2 z) / \alpha_m \beta_2 \quad (31)$$

で与えられ、式(26)、(31)を式(24)へ代入すると、変位式が

$$U_{mn} = (A_{mn} \cosh \beta_1 z + B_{mn} \sinh \beta_1 z + C_{mn} \cosh \beta_2 z + D_{mn} \sinh \beta_2 z) J_1(\alpha_m r) \\ W_{mn} = [\mu_1 (A_{mn} \sinh \beta_1 z + B_{mn} \cosh \beta_1 z) + \mu_2 (C_{mn} \sinh \beta_2 z + D_{mn} \cosh \beta_2 z)] J_0(\alpha_m r) \quad (32)$$

と求められる。ここで、

$$\mu_i = \frac{C_{44} \beta_i^2 - C_{11} \alpha_m^2 + \rho \omega_{mn}^2}{(C_{13} + C_{44}) \alpha_m \beta_i} \quad (i=1, 2) \quad (33)$$

この変位式を式(16)に代入して応力式的具体式を決定し、それらを式(15b)の境界条件式に代入すると、次の4元連立同次方程式を得る。

$$C [A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}]^T = 0 \quad (34)$$

C は 4×4 の係数行列。したがって、固有円振動数 ω_{mn} を定める振動方程式は次式となる。

$$|C| = 0 \quad (35)$$

上式より ω_{mn} が定まれば、式(34)より積分定数 A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} が決定し、したがって固有関数も確定する。

4. 準静的解

次に式(10)～(12)に示されている準静的問題を考える。準静的問題では慣性項が無く、自由振動問題で $\rho \omega_{mn}^2 = 0$ と置いたものに対応する。Hu の変位関数[3]を用いて、変位 u^s, w^s を次のようにおく。

$$u^s = \frac{\partial^2 \phi^s}{\partial r \partial z} \\ w^s = \frac{-1}{C_{13} + C_{44}} \left[C_{11} \nabla_1^2 + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi^s \quad (36)$$

これを式(10)に代入すると、 ϕ^s は次式を満足すればよいことが分かる。ただし $\phi^s = \phi_1 + \phi_2$ 。

$$\left[\nabla_1^2 + \frac{1}{\gamma_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad (37)$$

ここに、 γ_i^2 は方程式

$$C_{33} C_{44} \gamma^4 + (C_{13}^2 + 2C_{13} C_{44} - C_{11} C_{33}) \gamma^2 + C_{11} C_{44} = 0 \quad (38)$$

を γ^2 の2次式と見なした場合の2根である。ところで Tsai[5]によれば、この2根は glass-epoxy composite では $\gamma_1 = 1.638$, $\gamma_2 = 0.343$, graphite-epoxy composite では $\gamma_1 = 1.393$, $\gamma_2 = 0.222$, また magnesium

では実根で zinc は共役複素根である。ここでは先の自由振動解析と同様に、2正根として議論を進める。

式(37)の解として、境界条件式(11a)を満足するように

$$\phi_i = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{m,i}^s(z) J_0(\alpha_m r) \quad (39)$$

とおき、式(37)へ代入して $\Phi_{m,i}^s$ の具体式を求め、更にそれを式(36)へ代入すれば、次の変位式を得る。

$$u^s = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^s \cosh \gamma_1 z + B_m^s \sinh \gamma_1 z + C_m^s \cosh \gamma_2 z + D_m^s \sinh \gamma_2 z) J_1(\alpha_m r) \\ w^s = \sum_{m=1}^{\infty} [\mu_1^s (A_m^s \sinh \gamma_1 z + B_m^s \cosh \gamma_1 z) + \mu_2^s (C_m^s \sinh \gamma_2 z + D_m^s \cosh \gamma_2 z)] J_0(\alpha_m r) \quad (40)$$

ただし、

$$\mu_i^s = \frac{C_{44} \gamma_i^2 - C_{11} \alpha_m^2}{(C_{13} + C_{44}) \alpha_m^2 \gamma_i} \quad (i=1, 2) \quad (41)$$

これらを、応力式(12)に代入し、更にそれらを境界条件式(11b, c)に代入すれば、積分定数 $A_m^s, B_m^s, C_m^s, D_m^s$ が決定する。

5. 数値計算結果

部分等分布荷重(強度 q_0)が、円板の上面中央部に載荷半径が $b=0.2a$ の円形に、また時間に関してはステップ状に作用する場合 $[q(r, t) = q_0 H(t)]$ で、板厚比を $h/2a=0.2$ として数値計算を行った。

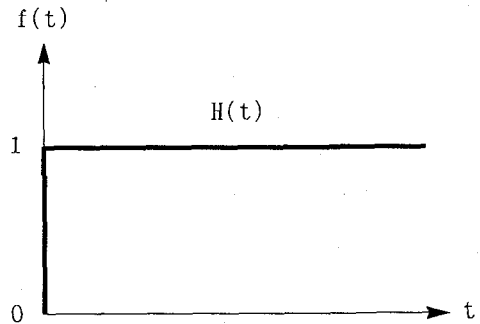


図-2 ステップ関数

横等方性を示すものとして自然界にはマグネシウムや亜鉛があり、また横等方性を示す広範な複合材料とその材料定数は Tsai[6] の成書などに示されているが、複合材料は人工的に生み出すことが可能なものであり、したがって先の円筒・球殻の解析で示したように[2]、本数値計算では等方面と異方面でのヤング率の変化による応答の違いのみを検討することにし、 $E/E' = 1, 2, 3$, $\nu = \nu' = 0.3$, $G' = E'/2(1 + \nu')$ とした場合の結果を示すことにする。

振動数方程式(35)は Regula-Falsi 法により数値的に解き、固有値を求めた。数値計算は全て無次元化して行

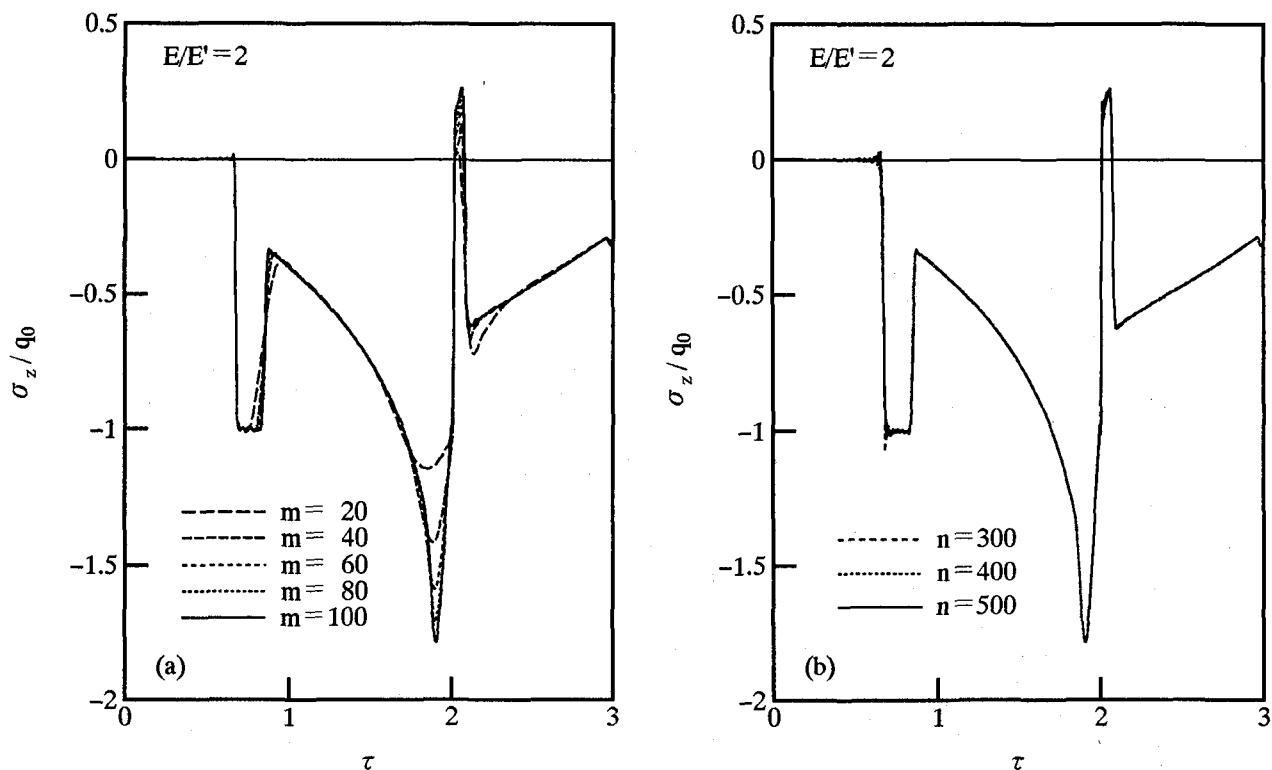


図-3 応力 σ_z ($r=0, z=0$) の収束状況 : (a) m 変化 ($n=1000$) ; (b) n 変化 ($m=100$)

い、時間に関しては、ラメの定数 $\lambda = 2\nu\mu/(1-2\nu)$, $\mu = G$ を用いた等方性体の縦波の速度 $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ を基準に採り、無次元時間 $\tau = c_1 t/h$ を使用した。したがって、ヤング率比 $E/E' = 1, 2, 3$ に対応する縦波の速度比はおおよそ $1 : 0.75 : 0.65$ である。

衝撃応答計算で用いた級数の収束性は着目点、時刻によっても変化する。一例として、収束が極めて遅い板厚方向の応力 σ_z の板中央点 ($r=0, z=0$) での収束状況を図-3に示している。この図から荷重の Bessel 展開に関係する級数項 m が収束に大きく寄与していること、また $m \geq 100$, $n \geq 500$ 程度で応答の急激な変化を十分に表現できることが理解できる。以下では、 σ_z については $m=100$, $n=1000$ として計算を行い、 σ_z に比べて収束性の良好な他の応力や変位はこれを参考に収束程度を確かめて応答計算を行った。

図-4は、板厚方向の応力 σ_z の板中央点 ($r=0, z=0$) での時間的变化を示したものである。時間きざみは $\Delta\tau = 0.01$ として描いている。応答曲線が不連続に変動している箇所は、荷重の載荷中央点 ($r=0, z=-h/2$)、載荷端部 ($r=b, z=-h/2$) で発生した応力波の波面やそれに続く板の上下面や側面からの反射波の波面が到達した応答を示している。これらの応答時刻は波線理論[7]を用いれば等方性の場合は確定できるが、異方性の場合は縦波の影響以外は特定することは困難である。載荷中央点からの最初の応力波の到達後に応答が始まり、その後下面中央 ($r=0, z=h/2$) からの反射縦波の到達により引張り応力がいずれの場合にも生じており、

spalling 破壊に関連して興味深い。また荷重強度を越える大きな圧縮応力が生じており、ヤング率比が大きいほどその値も大きい。

次に、円板上下面の中央点 ($r=0, z=\pm h/2$) での応力 σ_r の初期 ($0 < \tau < 10$) および長期 ($0 < \tau < 60$) 応答

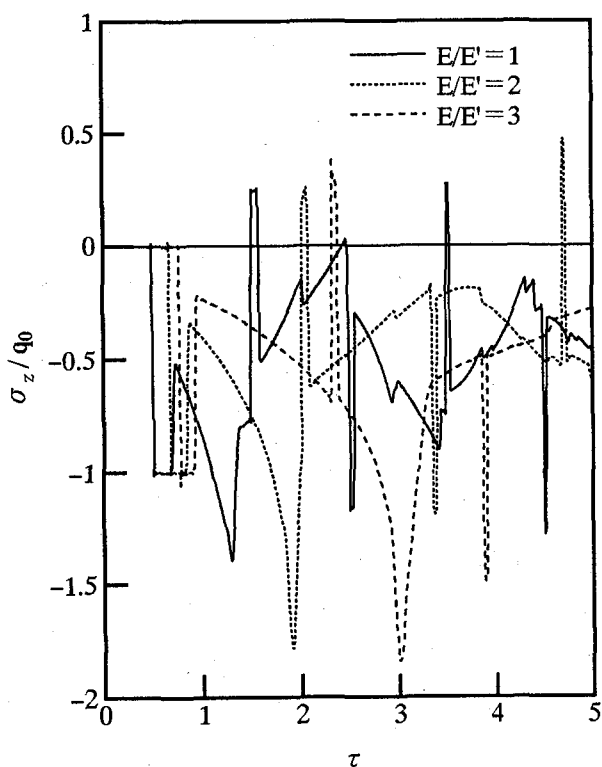


図-4 応力 σ_z ($r=0, z=0$) の初期応答

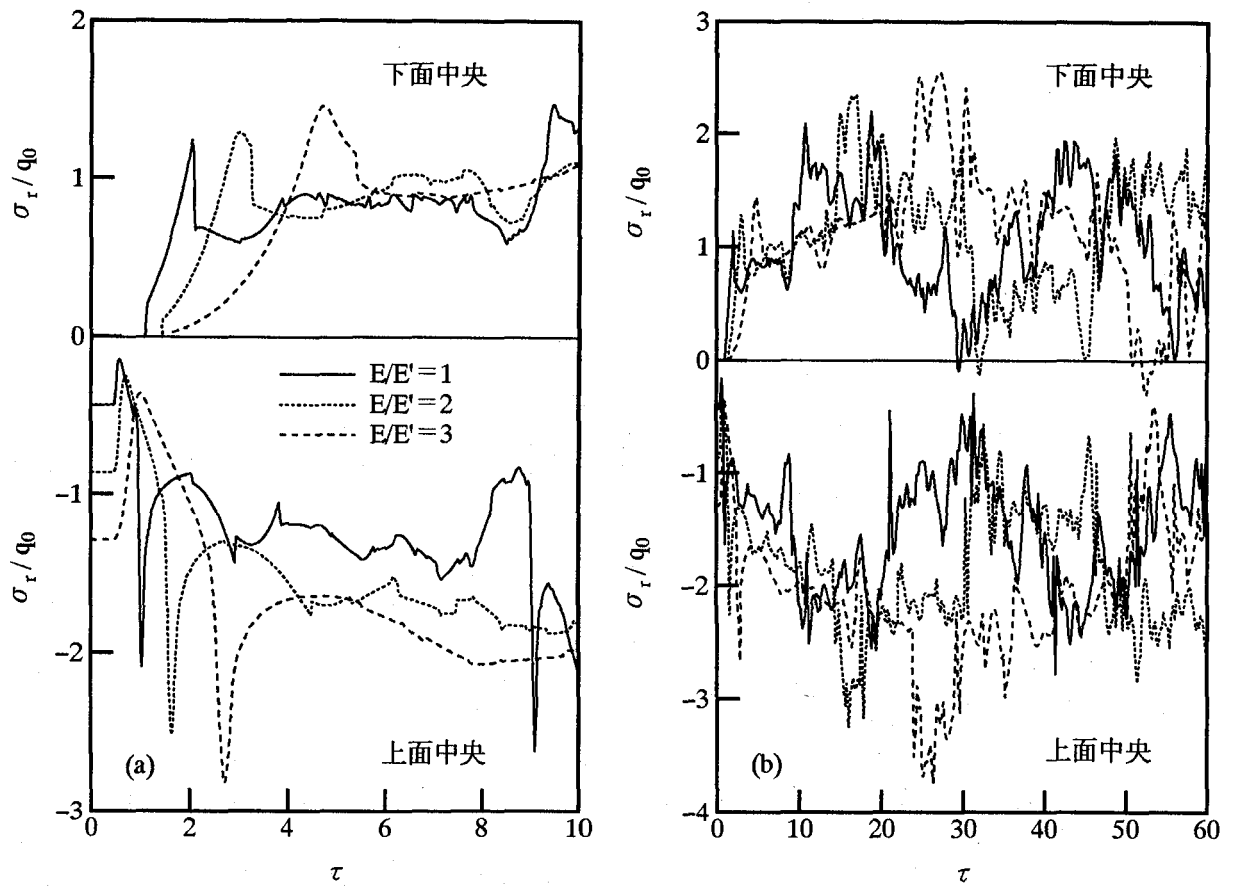


図-5 応力 σ_r ($r=0, z=\pm h/2$) の (a)初期応答 ; (b)長期応答

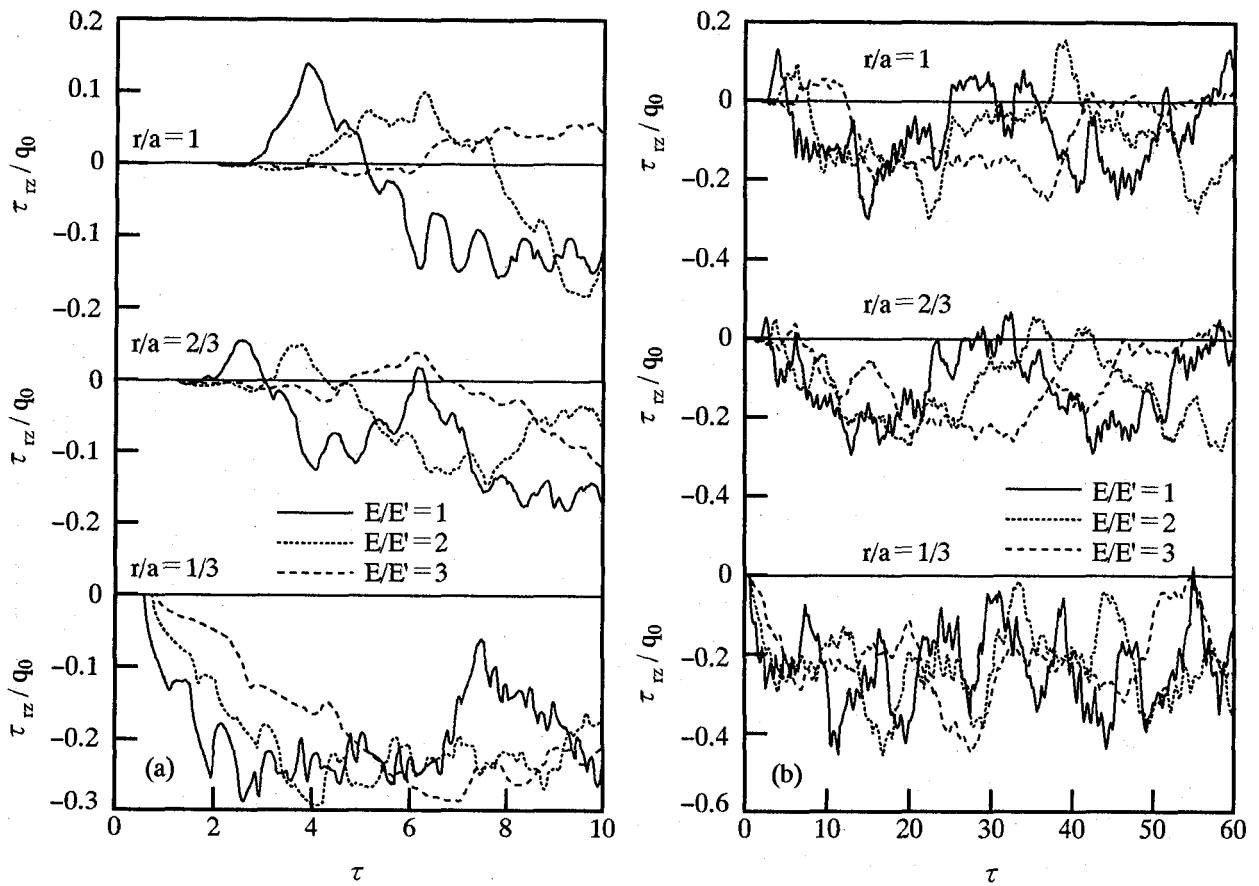


図-6 $z=0$ 断面上のせん断応力 τ_{rz} の (a)初期応答 ; (b)長期応答

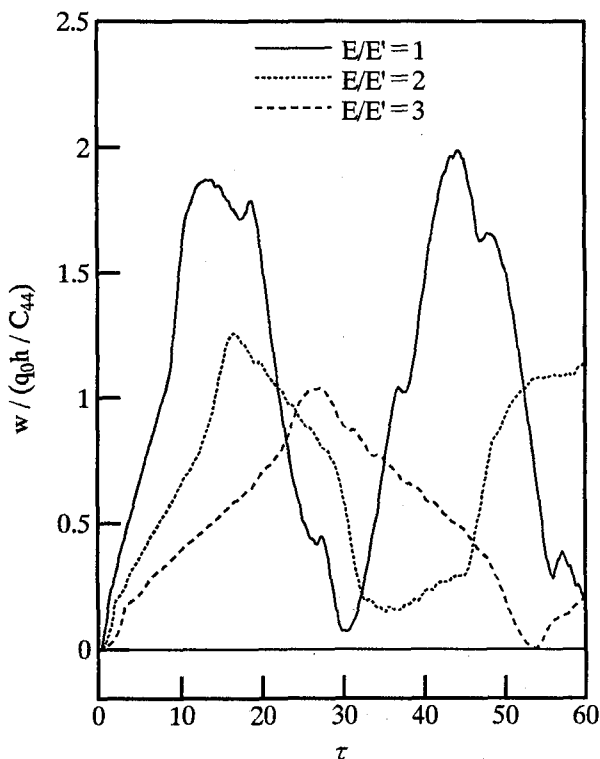


図-7 変位 w ($r=0, z=0$) の長期応答

曲線を図-5に示している。無次元基本周期は $E/E' = 1, 2, 3$ に対して $T=29.8, 38.1, 56.3$ であり、ヤング率比が大きいほど長い。まず、図-5aの初期応答を検討すると、上面中央では、衝撃荷重が作用した瞬時に応答値を持っている。これは、作用圧縮荷重 q_0 とつり合う圧縮応力 $\sigma_z = -q_0$ による半径方向および円周方向のひずみが拘束されるため、応力 σ_r, σ_θ が生じるからである。一方、下面中央では荷重中央点 ($r=0, z=-h/2$) からの応力波の到達と共に応答が始まっており、これは数値計算結果の正しさを示すものでもある。興味深いことは上面中央の応答で大きく鋭い波形がごく初期に現れており、また下面中央でもこれほど鋭くはないが顕著な応答が見られる。これらは表面波の影響があるものと考えられる。図-5bの長期応答を見ると複雑な応答曲線となっているが、ヤング率比が大きいほど周期が長くなるので右へシフトしたものとなっている。ヤング率比が大きくなれば (r, θ) 面内の剛性が高まることになり、 σ_r の応答値も大きくなっている。しかしながら、静的解に対する応答倍率はいずれの場合もおおよそ2倍程度である。

図-6には、 $z=0$ 断面でのせん断応力 τ_{rz} の初期および長期応答曲線を示している。着目点は $r/a=1/3, 2/3, 1$ の3点とした。なお、 $r/a=1$ は支持面である。各着目点ともに応答は応力波の到達と共に始まり、支持面に近いほど応答開始後しばらくは引張り応力となっている。各ケースとも基本周期による応答曲線の違いはあるが、最大応答値はそれほど変わらない。

最後に、板中央点 ($r=0, z=0$) での変位 w の長期

応答曲線を図-7に示している。変位にはヤング率比 E/E' の違いが応答値に明らかに現れている。ヤング率比が大きいことは、(r, θ) 面内の剛性が高まることであるから、ヤング率比が大きいほど一種の膜力効果により変形としては小さくなるものと考えられる。

6. おわりに

本文では、衝撃荷重を受ける横等方性円板を固有関数展開法により解析する方法を示し、時間に関してステップ状で空間には部分等分布荷重が作用した場合の数値計算結果を示した。ここでは、等方面と異方面のヤング率比のみをパラメータとしたが、広範な材料定数を設定することが可能である。数値結果のまとめは次の通りである。

1. いずれの応答も応力波の到達とともに始まる。
2. σ_z の初期応答では、板の下面からの反射応力波の影響により引張り応力が生じ、その後はヤング率比が大きい(等方面内の剛性が高い)ほど大きな圧縮応力が発生する。
3. σ_r の応答では、板の上面において表面波とみられる波動の影響が現れ、またヤング率比が大きくなるほど、最大応答値が大きい。
4. τ_{rz} の応答は、固有周期の違いにより応答曲線に位相差が出るが最大応答値はそれほど変わらない。
5. 変位 w は、ヤング率比が大きくなれば小さな応答値となる。

参考文献

1. 小林治俊, 園田恵一郎, 石丸和宏 (1992) 鋼・コンクリート合成円版の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, 土木学会, **38A**, 1497-1504.
2. 小林治俊, 石丸和宏, 園田恵一郎 (1995) 軸対称, 厚肉円筒・球殻の弾性衝撃応答, 構造工学論文集, 土木学会, **41A**, 1177-1184.
3. Hu Hai-chang (1953) On the Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity of a Transversely Isotropic Body, Acta Scientia Sinica, **2(2)**145-151.
4. Lekhnitskii, S. G. (1981) Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Mir Publishers, Moscow.
5. Tsai, Y. M. (1983) Thermal Stress in a Transversely Isotropic Medium Containig a Penny-shaped Crack, ASME Journal of Applied Mechanics, **50(1)**24-28.
6. Tsai, S. W. (1986) Composites Design-1986, Think Composites, Ohio.
7. 小林治俊, 奥田東吾, 園田恵一郎 (1992) 衝撃を受ける単純支持はりの応力波伝播解析, 構造工学論文集, 土木学会, **38A**, 1505-1514.

(1995年9月18日受付)