

2軸曲げを受けるP C部材の弾塑性解析

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF PRESTRESSED CONCRETE MEMBERS SUBJECTED TO BIAXIAL BENDING

川上 洵*, Amin GHALI**, 小俣 富士夫***、若山 悟史***、松塚 忠政***

Makoto KAWAKAMI, Amin GHALI, Fujio OMATA, Satoshi WAKAYAMA and Tadamasa MATSUZUKA

*工博 秋田大学教授 鉱山学部土木環境工学科 (〒010 秋田市手形学園町1-1)

**Ph D, Professor, Dept. of Civil Eng., The University of Calgary, Calgary, Canada T2N 1N4

***秋田大学大学院 鉱山学研究科土木環境工学専攻 (〒010 秋田市手形学園町1-1)

In this study, stresses and strains of prestressed concrete members subjected to axial force and biaxial bending before and after cracking are analysed. The immediate and long term stresses and strains of PC members of arbitrary cross sections subjected to axial force and biaxial bending were firstly determined by accounting for the effects of creep and shrinkage of concrete and relaxation of prestressing steel. Secondly, decompression of the section just before applying live loads or wind forces is analysed. Then, stresses and strains of the member after cracking due to live loads were obtained by considering the inelastic stress-strain relationships for the materials used and by assuming ignore of the concrete in tension. Furthermore, a moment-curvature relationship is obtained by increasing the moment in one direction from zero to ultimate, without changing axial force and the moment in another direction.

key words: biaxial bending, prestressed concrete, time-dependent stress, decompression, elasto-plastic analysis

1. まえがき

R C橋脚やP C斜張橋主桁にみられるように、コンクリート構造物が地震荷重や風荷重等の横荷重を受ける場合、軸圧縮力と2軸曲げを受ける応力状態となる。実構造物の設計においては、R C及びP C部材が、自重やプレストレスにより応力を受け、これらの応力が持続して作用するとき、コンクリートのクリープ、乾燥収縮、及びP C鋼材のリラクセーションによる応力及びひずみの経時変化を求め、さらに、新たな載荷によるひび割れ発生後の挙動を考慮しなければならない。

2軸曲げを受けるコンクリート部材に関して、初期載荷からひび割れに至るまでの時間依存性を考慮した応力解析は少なく¹⁾、対象とする断面も限定されていた。

一方、著者らは、2軸曲げを受けるコンクリート部材のひび割れ強度及び終局強度^{2) 3)}を明らかにしてきた。これらの解析においては、例えば、終局強度の場合、圧縮縁における最大ひずみが終局ひずみに達したとき、応力分布から釣合いを求め、中立軸の位置を決定した後に、

終局強度が得られるとして解析を行った。

これらの研究においては、各強度が得られるものの部材に軸力及び2軸曲げが作用し、使用材料の非線形を考慮した場合、圧縮縁のひずみをはじめ、中立軸位置が未定であり断面内の応力及びひずみも得られていなかった。

本論文は、はじめに2軸曲げを受ける任意形コンクリート断面のP C部材においてプレストレス導入直後(材齢 t_0)及び材齢 t_0 から長期材齢 t までの期間に生じるコンクリートのクリープ及び乾燥収縮そしてP C鋼材のリラクセーションによるプレストレスの減少を考慮し、時間依存性応力を解析する。次に上記材齢 t で、活荷重が載荷され、ひび割れが発生する。このとき、コンクリート、鉄筋及びP C鋼材に対し非線形の応力-ひずみ関係を仮定し弾塑性解析を行うものである。

さらに、本論文においては、断面諸量の算定にあたり、ガウスの積分定理を用いているので箱桁や中空床版等の任意形コンクリート断面の解析が可能である。また、弾塑性解析にあたり、コンクリートの応力-ひずみ関係を

多数の直線の組み合わせとすることで実際に使用するコンクリートの応力-ひずみ関係あるいはCEB-FIPの応力ひずみ関係⁴⁾を考慮することができる。

2. ひび割れ前の時間依存性応力解析

2.1 基礎式

一般的な均等質材料（弾性係数E）からなる部材の断面に軸力及び2軸曲げが作用するときの応力解析は次のようである。軸力N、曲げモーメント M_x 、 M_y が作用するとき断面の変形を図-1に示す。

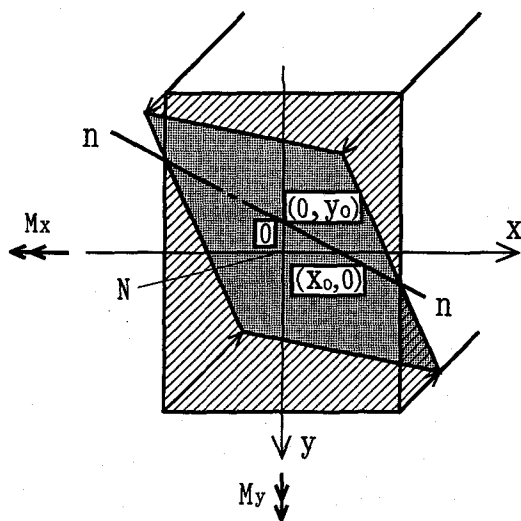


図-1 軸力N、曲げモーメント M_x 及び曲げモーメント M_y が作用したときの変形

平面保持を仮定するのでひずみ分布は、直線分布となる。基準点Oのひずみを ε_o としx軸に関する曲率を ψ_x 、y軸に関する曲率を ψ_y とする。また、z軸は部材軸方向である。ここで、 ψ_x と ψ_y は、 $\partial \varepsilon / \partial y$ と $\partial \varepsilon / \partial x$ で表され、それぞれyz、xz平面における曲率を示す。いま $\{N, M_x, M_y\}$ が作用するとき、任意点(x, y)におけるひずみ及び応力は

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \psi_x y + \psi_y x \quad \dots\dots (1)$$

$$\sigma = E (\varepsilon_o + \psi_x y + \psi_y x) = \sigma_o + \gamma_x y + \gamma_y x \quad \dots\dots (2)$$

式(2)より、軸力及び2軸曲げモーメントに関する釣合式は、

$$N = \int \sigma dA \quad M_x = \int \sigma y dA \quad M_y = \int \sigma x dA \quad \dots\dots (3)$$

式(2)を式(3)へ代入し、マトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & G_x & G_y \\ G_x & I_x & I_{xy} \\ G_y & I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (4)$$

ここで

$$A = \int dA, \quad G_x = \int y dA, \quad G_y = \int x dA$$

$$I_x = \int y^2 dA, \quad I_y = \int x^2 dA, \quad I_{xy} = \int xy dA$$

とする。

従って $\{N, M_x, M_y\}$ が作用し ε_o 、 ψ_x 及び ψ_y を求める式は、式(4)の両辺に逆マトリックスを乗ずることにより

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} A & G_x & G_y \\ G_x & I_x & I_{xy} \\ G_y & I_{xy} & I_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (5)$$

となる。中立軸のx及びy切片は、それぞれ

$$x_o = -\frac{\sigma_o}{\gamma_x} \quad y_o = -\frac{\sigma_o}{\gamma_y} \quad \dots\dots (6)$$

である。

2.2 仮定

軸力及び2軸曲げを受けるPC部材の時間依存性応力解析にあたり、次の仮定を行う。

- ①平面保持の仮定が成り立つものとする。
- ②ひび割れ前の断面において、クリープ、乾燥収縮、リラクセーションを考慮したときの解析及びデコンプレッションまでは全断面有効とする。
- ③軸力は引張を正とし、曲げモーメントは図-2の方向に作用するものを正とする。

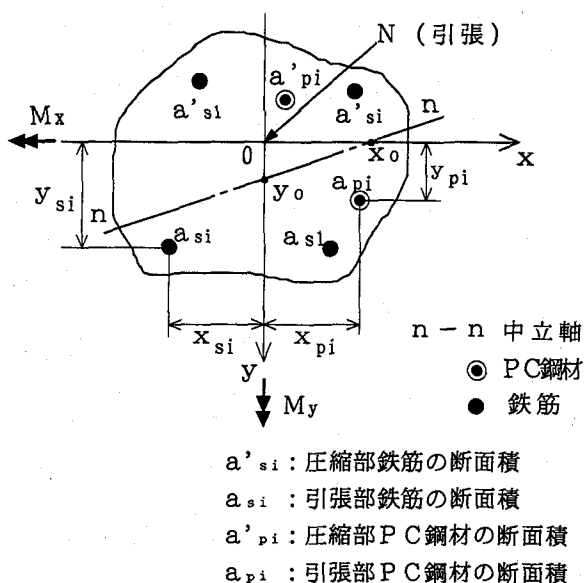


図-2 座標及び軸力と曲げモーメントの正の方向

2.3 荷重直後（材齢 t_0 ）における応力とひずみ

材齢 t_0 において図-2のようなプレストレス力 P_i 及び荷重 $\{N, M_x, M_y\}$ を基準点Oにおける軸力とモーメントに換算し作用荷重とする。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_{eq} = \begin{Bmatrix} N - \sum P_i \\ M_x - \sum P_i y_{pi} \\ M_y - \sum P_i x_{pi} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (7)$$

プレストレス直後のひずみおよび曲率は式(5)及び式(7)より

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o(t_0) \\ \psi_x(t_0) \\ \psi_y(t_0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_o(t_0)} \begin{bmatrix} A & G_x & G_y \\ G_x & I_x & I_{xy} \\ G_y & I_{xy} & I_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_{eq} \quad \dots\dots (8)$$

ここで、 $A, G_x, G_y, I_x, I_y, I_{xy}$ は換算断面に関する断面諸量であり、その詳細をAppendixに示す。

従って、任意点 (x, y) のコンクリート、各鉄筋、及び各PC鋼材の応力は

$$\begin{aligned} \sigma_o(t_0) &= E_o [\varepsilon_o(t_0) + \psi_x(t_0)y + \psi_y(t_0)x] \\ \sigma_{si}(t_0) &= E_{si} [\varepsilon_o(t_0) + \psi_x(t_0)y_{si} + \psi_y(t_0)x_{si}] \end{aligned}$$

プレテンション方式の場合

$$\sigma_{pi}(t_0) = E_p [\varepsilon_o(t_0) + \psi_x(t_0)y_{pi} + \psi_y(t_0)x_{pi}] + \frac{P_i}{a_{pi}}$$

ポストテンション方式の場合

$$\sigma_{pi}(t_0) = \frac{P_i}{a_{pi}}$$

となる。

$\dots\dots (9)$

2.4 時間依存性応力解析

(1) 長期材齢（材齢 t ）のコンクリートのひずみ

応力 $\sigma_o(t_0)$ が材齢 t_0 で生じ、その大きさが材齢 t まで一定であるときひずみは

$$\varepsilon_o(t) = \frac{\sigma_o(t_0)}{E_o(t_0)} \{1 + \phi(t, t_0)\} \quad \dots\dots (10)$$

となる。ここで、 $E_o(t_0)$ は材齢 t_0 でのコンクリートの弾性係数であり、 $\phi = \phi(t, t_0)$ はクリープ係数である。

さらに、 $\Delta\sigma_o$ が材齢 t_0 においてゼロであり材齢 t までに徐々に生じたとき、ひずみは

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_o(t) &= \frac{\Delta\sigma_o(t)}{E_o(t_0)} \{1 + \chi(t, t_0)\phi(t, t_0)\} \\ &= \frac{\Delta\sigma_o}{E_o} \quad \dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\chi = \chi(t, t_0)$ は材齢係数⁵⁾であり、通常0.6~0.9の間で変化するものである。

また、 $\overline{E}_o(t, t_0) = \overline{E}_o$ はコンクリートの材齢修正弾性係数であり

$$\overline{E}_o = \frac{E_o(t_0)}{1 + \chi\phi} \quad \dots\dots (12)$$

(2) 応力とひずみの変化

材齢 t_0 における応力、ひずみは式(8)及び(9)より得られるが、その後の材齢 t までに生じるコンクリートのクリープと乾燥収縮及びPC鋼材のリラクセーションにより、ひずみと曲率は経時変化する。この時間依存性応力を次の4ステップに分けて解析する。

ステップ 1

クリープ及び乾燥収縮が拘束を受けずに自由に生じるとし、材齢 t_0 から t の期間における軸ひずみと曲率の変化を求めると、 $\phi(t, t_0)\varepsilon_o(t_0) + \varepsilon_{cs}(t, t_0)$ 、 $\phi(t, t_0)\psi_x(t_0)$ 、及び $\phi(t, t_0)\psi_y(t_0)$ となる。

$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cs}(t, t_0)$ は、材齢 t_0 から t における乾燥収縮ひずみである。

ステップ 2

ステップ1で求めたクリープ及び乾燥収縮の変化を拘束するために必要なコンクリートの応力は、

$$\sigma_{res} = -\overline{E}_o [\phi \{ \varepsilon_o(t_0) + \psi_x(t_0)y + \psi_y(t_0)x \} + \varepsilon_{cs}] \quad \dots\dots (13)$$

ステップ 3

クリープによる変形を拘束する力は、

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix}_{cc} = -\overline{E}_o \phi \begin{bmatrix} A_o & G_{cx} & G_{cy} \\ G_{cx} & I_{cx} & I_{cxy} \\ G_{cy} & I_{cxy} & I_{cy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_o(t_0) \\ \psi_x(t_0) \\ \psi_y(t_0) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (14)$$

また、乾燥収縮を拘束する力は、

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix}_{cs} = -\overline{E}_o \varepsilon_{cs} \begin{bmatrix} A_o \\ G_{cx} \\ G_{cy} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (15)$$

ここで、 $A_o, G_{cx}, G_{cy}, I_{cx}, I_{cy}, I_{cxy}$ は、コンクリート部分のみの断面諸量である。

さらに、PC鋼材のリラクセーションを拘束する力は、

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix}_{pr} = \begin{Bmatrix} \Delta \overline{\sigma}_{pr} \sum a_{pi} \\ \Delta \overline{\sigma}_{pr} \sum a_{pi} y_{pi} \\ \Delta \overline{\sigma}_{pr} \sum a_{pi} x_{pi} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (16)$$

$\Delta \overline{\sigma}_{pr}$ は材齢 t_0 から t までの低減リラクセーション値⁵⁾である。

クリープ、乾燥収縮による変形及びリラクセーションを拘束する力は式 (14)、(15)、(16) を合計することにより得られる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix}_{cc} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix}_{cs} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix}_{pr} \quad \dots\dots (17)$$

これらの拘束を解除するために、材齢修正換算断面に、 ΔN 、 ΔM_x 、 ΔM_y を逆向きに作用させることにより、ひずみの変化を式 (18) で求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_o \\ \Delta \psi_x \\ \Delta \psi_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_c} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{G}_x & \bar{G}_y \\ \bar{G}_x & \bar{I}_x & \bar{I}_{xy} \\ \bar{G}_y & \bar{I}_{xy} & \bar{I}_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -\Delta N \\ -\Delta M_x \\ -\Delta M_y \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (18)$$

ここで、 $\bar{A}$ 、 $\bar{G}_x$ 、 $\bar{G}_y$ 、 $\bar{I}_x$ 、 $\bar{I}_y$ 、 $\bar{I}_{xy}$ は材齢修正弾性係数を用いて得られる材齢修正換算断面に関する断面諸量である。

ステップ 4

期間 $(t-t_o)$ において、コンクリート、鉄筋及び PC 鋼材の応力変化は

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_c &= \sigma_{res} + \bar{E}_c (\Delta \varepsilon_o + \Delta \psi_x y + \Delta \psi_y x) \\ \Delta \sigma_{si} &= E_s (\Delta \varepsilon_o + \Delta \psi_x y_{si} + \Delta \psi_y x_{si}) \\ \Delta \sigma_{pi} &= \Delta \sigma_{pr} + E_p (\Delta \varepsilon_o + \Delta \psi_x y_{pi} + \Delta \psi_y x_{pi}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (19)$$

材齢 t において各材料に生じる応力 $\sigma(t)$ は、載荷直後の応力 $\sigma(t_o)$ に関する式 (9) と時間依存性応力 $\Delta \sigma$ に関する式 (19) の合計により得られる。

3. デコンプレッション

材齢 t において部材断面に生じている応力 $\sigma(t)$ は、上記 2. の解析より導かれ、任意点 (x, y) の応力は

$$\sigma(t) = \sigma_o(t) + \gamma_x(t) y + \gamma_y(t) x \quad \dots\dots (20)$$

$\sigma_o(t)$: 材齢 t における基準点 O のコンクリートの応力

$\gamma_x(t)$: x 軸についての応力分布の勾配

$\gamma_y(t)$: y 軸についての応力分布の勾配

で表され、図-3 のように示される。

いま、同じ部材において活荷重、風荷重または、地震荷重等の軸力 N 及び 2 軸曲げモーメント M_x 、 M_y が作用し、ひび割れが生じるものとする。

これらの $\{N, M_x, M_y\}$ はデコンプレッション力 (サフィックス 1) 及びひび割れ断面に作用する断面力

(サフィックス 2) に分けられる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_2 \quad \dots\dots (21)$$

デコンプレッション力は、図-4 のようにひび割れが生じていない断面でコンクリートの応力をゼロにする断面力であり、材齢 t におけるコンクリートの弾性係数 $E_c(t)$ に基づく換算断面に関する断面諸量を用いて次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} A & G_x & G_y \\ G_x & I_x & I_{xy} \\ G_y & I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sigma_o(t) \\ -\gamma_x(t) \\ -\gamma_y(t) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (22)$$

また、デコンプレッション力によるひずみ及び曲率の変化は式 (23) で表される

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix}_1 = \frac{1}{E_c(t)} \begin{Bmatrix} -\sigma_o(t) \\ -\gamma_x(t) \\ -\gamma_y(t) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (23)$$

よって任意点 (x, y) におけるコンクリートのひずみは

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{o1} + \psi_{x1} y + \psi_{y1} x \quad \dots\dots (24)$$

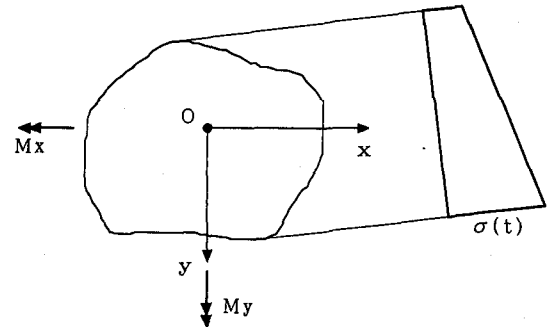


図-3 材齢 t での応力分布図

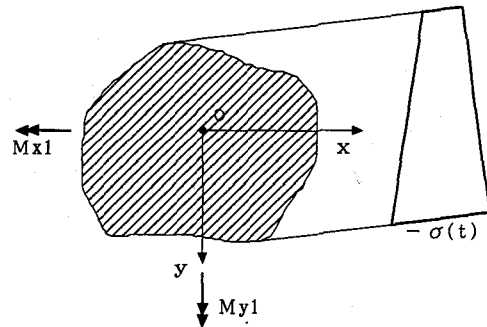


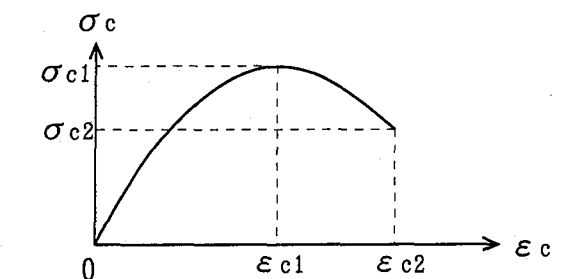
図-4 デコンプレッション状態での応力及びひずみ分布図

4. ひび割れ後の弾塑性解析

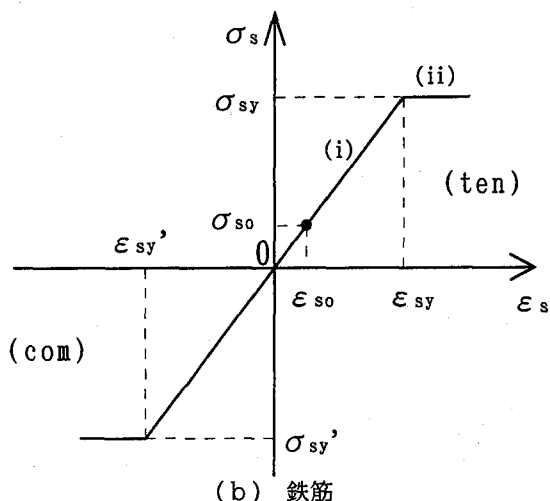
4.1 仮定

ひび割れ時の解析にあたっては、次の仮定を行う。

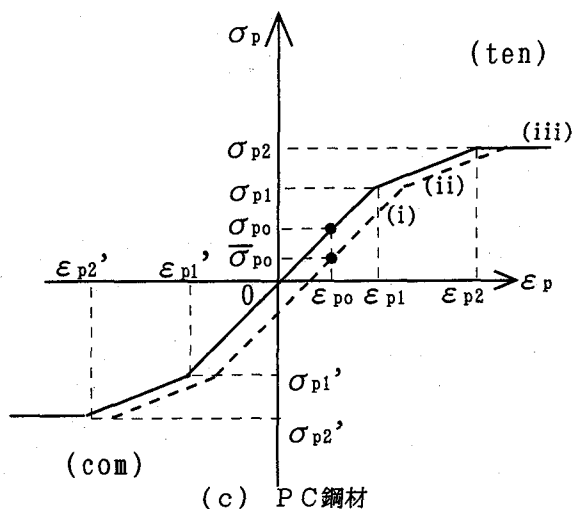
- ① 平面保持の仮定が成り立つものとする。
- ② コンクリートの引張抵抗を無視する。
- ③ 応力-ひずみ関係は、コンクリートに対しては図-5 (a) に示すように任意の曲線とし、鉄筋に対しては、バイリニア、PC鋼材に関してはトライリニアとする。



(a) コンクリート



(b) 鉄筋



(c) PC鋼材

図-5 各材料の応力-ひずみ関係

4.2 各材料の応力度

断面において $\{N, M_x, M_y\}$ が作用するとき各材料の応力度は応力-ひずみ関係から 1) ~ 3) のように表される。

1) コンクリート

図-5 (a) のように任意の曲線で与えられる応力-ひずみ関係を図-6 のように多数の直線で近似する。いまコンクリートの各区間 $i \sim i+1$ における応力は次のように表すことができる。

$$\sigma = C_i \varepsilon + D_i \quad (\varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{i+1}) \quad \dots\dots (25)$$

$$\text{ここで、} C_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}$$

$$D_i = \frac{\sigma_i \varepsilon_{i+1} - \sigma_{i+1} \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}$$

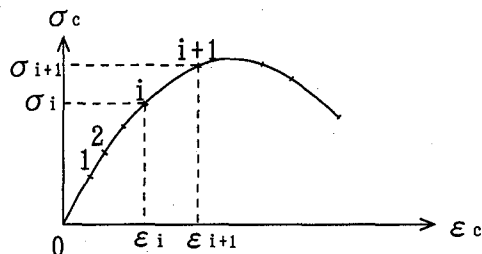


図-6 直線近似された応力-ひずみ曲線

2) 鉄筋

任意点 (x_{si}, y_{si}) にある鉄筋の応力は、次のように示される。

引張部

$$\sigma_{si} = \begin{cases} E_s (\varepsilon_o + \psi_x y_{si} + \psi_y x_{si}) & (0 \leq \varepsilon_s < \varepsilon_{sy}) \\ \sigma_{sy} & (\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s) \end{cases} \quad \dots\dots (26)$$

圧縮部

$$\sigma_{si}' = \begin{cases} E_s (\varepsilon_o + \psi_x y_{si} + \psi_y x_{si}) & (\varepsilon_{sy}' < \varepsilon_s' \leq 0) \\ \sigma_{sy}' & (\varepsilon_s' \leq \varepsilon_{sy}') \end{cases} \quad \dots\dots (27)$$

3) PC鋼材

任意点 (x_{pi}, y_{pi}) にあるPC鋼材の応力は次のように示される。

$$\sigma_{pi} = \begin{cases} \frac{\sigma_{p1}}{\varepsilon_{p1}} (\varepsilon_o + \psi_x y_{pi} + \psi_y x_{pi}) & (0 \leq \varepsilon_p < \varepsilon_{p1}) \\ \frac{\sigma_{p2} - \sigma_{p1}}{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p1}} \{ (\varepsilon_o + \psi_x y_{pi} + \psi_y x_{pi}) - \varepsilon_{p1} \} + \sigma_{p1} & (\varepsilon_{p1} \leq \varepsilon_p < \varepsilon_{p2}) \\ \sigma_{p2} & (\varepsilon_{p2} \leq \varepsilon_p) \end{cases} \quad \dots\dots (28)$$

4.3 釣合い式

コンクリート、鉄筋及びP C鋼材に生じる軸力及び2軸曲げを求め、ひび割れ後における釣合い式を考える。

1) コンクリート

直線の近似による応力分布図を図-7に示す。

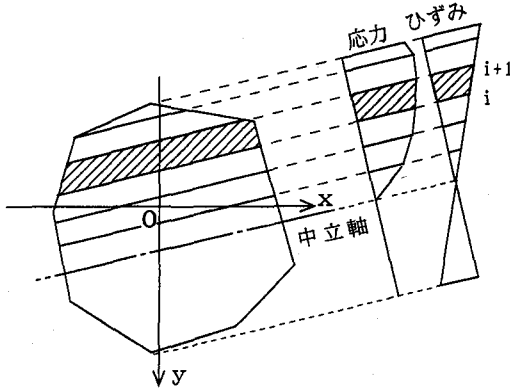


図-7 直線の近似による応力分布図

任意点 (x, y) についてのコンクリートの応力は式 (25) より

$$\sigma_i = C_i (\epsilon_o + \psi_x y + \psi_y x) + D_i \quad \dots\dots (29)$$

図-7の斜線部で示すコンクリートの区間 $i \sim i+1$ における軸力と曲げモーメントは次のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta N_{ci} &= \int \sigma_i dA_{ci} \\ &= (C_i \epsilon_o + D_i) A_{ci} \\ &\quad + C_i \psi_x G_{cxi} + C_i \psi_y G_{cyi} \quad \dots\dots (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{xci} &= \int \sigma_i y dA_{ci} \\ &= (C_i \epsilon_o + D_i) G_{cxi} \\ &\quad + C_i \psi_x I_{cxi} + C_i \psi_y I_{cxyi} \quad \dots\dots (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{yci} &= \int \sigma_i x dA_{ci} \\ &= (C_i \epsilon_o + D_i) G_{cyi} \\ &\quad + C_i \psi_x I_{cxyi} + C_i \psi_y I_{cyyi} \quad \dots\dots (32) \end{aligned}$$

コンクリート圧縮部についての軸力と曲げモーメントは

$$\begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix}_c = \begin{bmatrix} \sum \Delta N_{ci} \\ \sum \Delta M_{xci} \\ \sum \Delta M_{yci} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (33)$$

となる。

2) 鉄筋

長期材齢 (材齢 t) において活荷重が作用する場合、載荷前の鉄筋の応力はゼロでなく、既に応力 σ_{so} 及びひずみ ϵ_{so} が生じている。その場合、図-5 (b) のように応力-ひずみ曲線上で原点を $(\epsilon_{so}, \sigma_{so})$ まで移動させ、その点から載荷に対応するひずみ及び応力を考えることになる。

鉄筋のひずみ及び応力は、応力の大きさにより次の (a) または (b) となる。

(a) σ_{so} が直線 (i) の上にあり、 $\{N, M_x, M_y\}_2$ が作用するとき、応力が直線 (i) の上で変化する場合

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{si} &= \sigma_s - \sigma_{so} \\ &= E_s (\epsilon_o + \psi_x y_{si} + \psi_y x_{si}) \\ (0 \leq \sigma_s < \sigma_{sy}) \quad \dots\dots (34) \end{aligned}$$

(b) σ_{so} が直線 (i) の上にあり、 $\{N, M_x, M_y\}_2$ が作用するとき、応力が直線 (ii) に達する場合

$$\Delta \sigma_{si} = \sigma_{sy} - \sigma_{so} \quad (\sigma_{sy} \leq \sigma_s) \quad \dots\dots (35)$$

よって、鉄筋の軸力及び2軸曲げモーメントは次のようになる。

$$\begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \sum \Delta \sigma_{si} a_{si} \\ \sum \Delta \sigma_{si} a_{si} y_{si} \\ \sum \Delta \sigma_{si} a_{si} x_{si} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (36)$$

3) P C鋼材

P C鋼材も、鉄筋と同様に、長期材齢においてプレストレス力ははじめ時間依存性応力により、既に引張応力が生じている。P C鋼材の引張応力のうちリラクセーションを含めない引張応力を仮に σ_{po} とする。 $\{N, M_x, M_y\}_2$ に対応するP C鋼材の応力を算定する場合は、P C鋼材のリラクセーションを考慮した $\bar{\sigma}_{po} = \sigma_{po} + \Delta \bar{\sigma}_{pr}$ を用いることになる。そこで、実線の応力-ひずみ関係から $(\epsilon_{po}, \bar{\sigma}_{po})$ に原点を移動させ、リラクセーションを考慮した破線の応力-ひずみ関係を用いて、載荷に対応するひずみ及び応力を考えることになる。

P C鋼材のひずみ及び応力は、応力の大きさにより次の (a)、(b) または (c) となる。

(a) $\bar{\sigma}_{po}$ が直線 (i) の上にあり、 $\{N, M_x, M_y\}_2$ が作用するとき、応力が直線 (i) の上で変化する場合

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_p &= \sigma_p - \bar{\sigma}_{po} = E_p (\epsilon_o + \psi_x y_{pi} + \psi_y x_{pi}) \\ (0 \leq \sigma_p < \sigma_{pi}) \quad \dots\dots (37) \end{aligned}$$

- (b) $\bar{\sigma}_{p0}$ が直線 (i) の上にあり、 $\{N, M_x, M_y\}_2$ が作用するとき、応力が直線 (ii) の上で変化する
場合

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_p &= \sigma_p - \bar{\sigma}_{p0} \\ &= \frac{\sigma_{p2} - \sigma_{p1}}{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p1}} \left\{ (\varepsilon_0 + \psi_x y_{pi} + \psi_y x_{pi}) - \varepsilon_{p1} \right\} + \sigma_{p1} - \bar{\sigma}_{p0} \\ &\quad (\sigma_{p1} \leq \sigma_p < \sigma_{p2}) \dots\dots (38)\end{aligned}$$

- (c) $\bar{\sigma}_{p0}$ が直線 (i) の上にあり、 $\{N, M_x, M_y\}_2$ が作用するとき、応力が直線 (iii) に達する場合

$$\Delta\sigma_p = \sigma_{p2} - \bar{\sigma}_{p0} \quad (\sigma_{p2} \leq \sigma_p) \dots\dots (39)$$

これらの応力から P C 鋼材の軸力と 2 軸曲げは次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} \sum_i \Delta\sigma_{pi} a_{pi} \\ \sum_i \Delta\sigma_{pi} a_{pi} y_{pi} \\ \sum_i \Delta\sigma_{pi} a_{pi} x_{pi} \end{Bmatrix} \dots\dots (40)$$

4) 釣合い

作用荷重 $\{N, M_x, M_y\}_2$ に対して、式 (33)、(36) 及び (40) の合計の断面力 $\{N, M_x, M_y\}_{in}$ が釣合うから、

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_{in} = \begin{Bmatrix} N_0 + N_s + N_p \\ M_{xc} + M_{xs} + M_{xp} \\ M_{yc} + M_{ys} + M_{yp} \end{Bmatrix} \dots\dots (41)$$

4.4 ニュートン-ラプソン法

釣合い式 (41) を満足する $\{\varepsilon_0, \psi_x, \psi_y\}$ を求めることになる。式 (41) の両者の差を f 、 g 、 h と置き、 ε_{0n} 、 ψ_{xn} 、 ψ_{yn} の関数で表すと式 (42) となる。

$$\begin{Bmatrix} f(\varepsilon_{0n}, \psi_{xn}, \psi_{yn}) \\ g(\varepsilon_{0n}, \psi_{xn}, \psi_{yn}) \\ h(\varepsilon_{0n}, \psi_{xn}, \psi_{yn}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_2 - \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_{in} \dots\dots (42)$$

この f 、 g 、 h をゼロとするようニュートン-ラプソン法を適用して繰り返し計算を行う。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial f}{\partial \psi_x} & \frac{\partial f}{\partial \psi_y} \\ \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial g}{\partial \psi_x} & \frac{\partial g}{\partial \psi_y} \\ \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial h}{\partial \psi_x} & \frac{\partial h}{\partial \psi_y} \end{Bmatrix}_n \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix}_{n+1} = - \begin{Bmatrix} f \\ g \\ h \end{Bmatrix}_n \dots\dots (43)$$

式 (43) において f 、 g 、 h が所定の値以下に収束したとき $\{N, M_x, M_y\}_2$ が作用したときの ε_0 、 ψ_x 、 ψ_y が得られる。ここで、初期値として適切な値を用いないと発散したり、収束が悪くなる。解析過程から判断すると、 $E_0(t)$ を用いて全断面有効と考え換算断面を求め、この断面に $\{N, M_x, M_y\}_2$ が作用するときの $\{\varepsilon_0, \psi_x, \psi_y\}$ を初期値とするとよい。

4.5 最大断面力到達後から終局強度までの解析

4.4 では長期材齢経過後、活荷重 $\{N, M_x, M_y\}$ が作用すると考えた。しかし、 $\{N, M_x\}$ が一定の値で M_y のみがゼロから終局状態まで徐々に増加する場合がある。この挙動を示す $M_y - \psi_y$ 関係を得るための解析を行う。

この場合、 $\{N, M_x\}_2$ を、一定値とし、また ψ_{y2} を漸増させる。これらに対応する ε_{02} 、 ψ_{x2} 及び M_{y2} を求めるものである。はじめに $\{N, M_x\}_2$ に関する釣合い式 (44) を満足させる ε_{02} 、 ψ_{x2} を求める。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} N_0 + N_s + N_p \\ M_{xc} + M_{xs} + M_{xp} \end{Bmatrix} \dots\dots (44)$$

次に ε_{02} 、 ψ_{x2} 及び既知である ψ_{y2} を式 (45) に代入することによって M_{y2} が求められる。

$$M_{y2} = M_{yc} + M_{ys} + M_{yp} \dots\dots (45)$$

ψ_{y2} に対応する M_{y2} が計算されるので $M_{y2} - \psi_{y2}$ 関係を得ることができる。

5. 数値計算例

図-8 はポストテンション方式の P C 部材の断面である。図中に示すように鉄筋は、ピッチ 25cm、かぶり が 7cm の 2 段配置とし、鉄筋量はコンクリート断面の 1% とする。また、P C 鋼材は、4 隅に 8 本ずつ合計 32 本を配置する。いま、プレストレス導入直後の材齢 t_0 において $N = -120\text{MN}$ 、 $M_x = 190\text{MN}\cdot\text{m}$ 、 $M_y = 190\text{MN}\cdot\text{m}$ が作用する。また長期材齢 t で活荷重が作用する。活荷重の大きさは、
i) $N=0$ 、 $M_x=80\text{MN}\cdot\text{m}$ 、 $M_y=80\text{MN}\cdot\text{m}$ の場合
ii) $N=0$ 、 $M_x=80\text{MN}\cdot\text{m}$ と固定し、 M_y をゼロから終局状態まで増加させる場合
の 2 通りである。活荷重作用後のひずみと応力分布を求める。計算にあたり、次の諸数値を用いる。

P C 鋼材の引張力	1.3MN
コンクリートの弾性係数	35GPa
鉄筋の弾性係数	206GPa
P C 鋼材の弾性係数	196GPa
材齢係数	0.8
クリープ係数	2.0
乾燥収縮度	-200×10^{-6}
低減リラクセーション値	-55MPa

コンクリートの応力-ひずみ関係は、図-5 (a) に対し、 ε_{c1} までを放物線とし ε_{c1} から ε_{c2} までは直線とする。

$$\varepsilon_{c1} = -2000 \times 10^{-6} \quad \sigma_{c1} = -40 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{c2} = -3500 \times 10^{-6} \quad \sigma_{c2} = -16 \text{ MPa}$$

図-5 (b)、(c) において

$$\varepsilon_{sy} = 1430 \times 10^{-6} \quad \sigma_{sy} = 294 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{sy}' = -1430 \times 10^{-6} \quad \sigma_{sy}' = -294 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{p1} = 8240 \times 10^{-6} \quad \sigma_{p1} = 1.56 \text{ GPa}$$

$$\varepsilon_{p2} = 15000 \times 10^{-6} \quad \sigma_{p2} = 1.73 \text{ GPa}$$

$$a_s = 7.942 \text{ cm}^2$$

$$a_p = 11.845 \text{ cm}^2$$

$$a_{\text{duct}} = 36.3 \text{ cm}^2$$

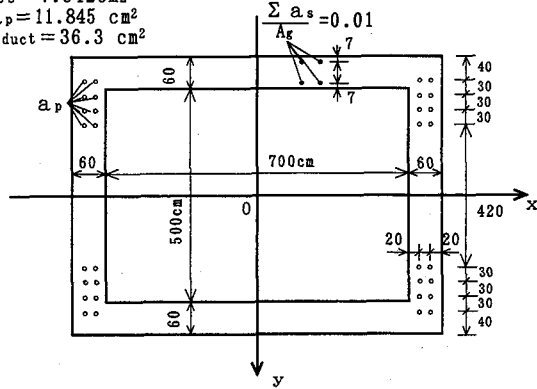


図-8 ポストテンションP C断面

a) 材齢 t_0 における応力とひずみ

材齢 t_0 における換算断面諸量は

$$A = 16.53 \text{ m}^2 \quad I_x = 93.96 \text{ m}^4 \quad I_y = 147.5 \text{ m}^4$$

$$G_x = G_y = I_{xy} = 0$$

材齢 t_0 で作用する力は式(7)より

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -120.0 - 41.6 \text{ MN} \\ 190.0 - 0 \text{ MN-m} \\ 190.0 - 0 \text{ MN-m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -161.6 \text{ MN} \\ 190.0 \text{ MN-m} \\ 190.0 \text{ MN-m} \end{Bmatrix}$$

基準点Oにおけるひずみと曲率は、式(8)より

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -279.3 \\ 57.78 / \text{m} \\ 36.81 / \text{m} \end{Bmatrix}$$

各材料の応力は式(12)より

$$\sigma_c(t_0) = -9.776 + 2.022y + 1.288x \quad (\text{MPa})$$

$$\sigma_s(t_0) = -57.54 + 11.90y_s + 7.583x_s \quad (\text{MPa})$$

$$\sigma_p(t_0) = \frac{1.3 \times 10^6}{0.0011845} = 1.098 \quad (\text{GPa})$$

これらの応力及びひずみ分布図を図-9 (a) に示す。

b) クリープと乾燥収縮及びリラクセーションによる
応力とひずみの変化

コンクリートのみの断面諸量は

$$A_c = 15.64 \text{ m}^2 \quad I_{cx} = 88.80 \text{ m}^4 \quad I_{cy} = 139.9 \text{ m}^4$$

$$G_{cx} = G_{cy} = I_{cxy} = 0$$

コンクリートの材齢修正弾性係数は式(12)より

$$\bar{E}_c(t, t_0) = \frac{35 \times 10^9}{1 + 0.8 \times 2.0} = 13.46 \quad (\text{GPa})$$

拘束応力は式(13)より

$$\sigma_{res} = 10.21 - 1.556y - 0.991x \quad (\text{MPa})$$

クリープ、乾燥収縮及びリラクセーションに対する拘束力の合計は式(17)より

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_x \\ \Delta M_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 157.6 \text{ MN} \\ -138.1 \text{ MN-m} \\ -138.7 \text{ MN-m} \end{Bmatrix}$$

材齢修正換算断面諸量は、

$$\bar{A} = 18.72 \text{ m}^2 \quad \bar{I}_x = 106.1 \text{ m}^4 \quad \bar{I}_y = 170.4 \text{ m}^4$$

$$\bar{G}_x = \bar{G}_y = \bar{I}_{xy} = 0$$

材齢 t_0 から材齢 t までにおける軸ひずみと曲率の変化は式(18)より

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_o \\ \Delta \psi_x \\ \Delta \psi_y \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -625.5 \\ 96.69 / \text{m} \\ 60.46 / \text{m} \end{Bmatrix}$$

各材料の応力変化は式(19)より

$$\Delta \sigma_c = 1.791 - 0.255y - 0.1772x \quad (\text{MPa})$$

$$\Delta \sigma_s = -128.9 + 19.92y_s + 12.45x_s \quad (\text{MPa})$$

$$\Delta \sigma_p = -177.6 + 18.95y_p + 11.85x_p \quad (\text{MPa})$$

この時間依存性応力及びひずみ分布図を図-9 (b) に示す。また、この時間依存性応力を道路橋示方書⁶⁾はじめ各種方法⁷⁾で求めたものを表-1にまとめる。この表から、各方法とも本論文とほぼ同じ値が得られ、本論文の方法が有用な計算方法であることがわかる。

c) デコンプレッション状態における応力とひずみの
変化

材齢 t における換算断面諸量は

$$A = 16.82 \text{ m}^2 \quad I_x = 95.46 \text{ m}^4 \quad I_y = 151.7 \text{ m}^4$$

$$G_x = G_y = I_{xy} = 0$$

デコンプレッション力は式(22)より

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 134.3 \text{ MN} \\ -168.8 \text{ MN-m} \\ -168.5 \text{ MN-m} \end{Bmatrix}$$

デコンプレッション力によるひずみ変化は式(23)より

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix}_1 = 10^{-6} \begin{Bmatrix} 228.1 \\ -50.52 / \text{m} \\ -31.75 / \text{m} \end{Bmatrix}$$

鉄筋、P C鋼材の応力は

$$(\sigma_s)_1 = 46.99 - 10.41y - 6.541x \quad (\text{MPa})$$

$$(\sigma_p)_1 = 44.71 - 9.902y - 6.223x \quad (\text{MPa})$$

デコンプレッション力の応力及びひずみ分布図を図-9

(c) に示す

i) 活荷重 $N=0, M_x=80\text{MN}\cdot\text{m}, M_y=80\text{MN}\cdot\text{m}$ が作用する場合

d) 活荷重によるひずみと応力

ひび割れを生じた断面に作用する $\{N, M_x, M_y\}_2$ は式 (21) より

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} -134.3 \text{ MN} \\ 248.8 \text{ MN}\cdot\text{m} \\ 248.5 \text{ MN}\cdot\text{m} \end{Bmatrix}$$

式 (43) より繰り返し計算を行い式 (42) を満足するひずみ及び曲率を求めると

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix}_2 = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -199.3 \\ 118.1/\text{m} \\ 77.84/\text{m} \end{Bmatrix}$$

鉄筋、P C 鋼材の応力は

$$(\sigma_s)_2 = -41.06 + 24.33y + 16.04x \quad (\text{MPa})$$

$$(\sigma_p)_2 = -39.06 + 23.15y + 15.26x \quad (\text{MPa})$$

$\{N, M_x, M_y\}_2$ による応力及びひずみ変化を図-9 (d) に示す。

(e) ひび割れが発生した後の応力とひずみ

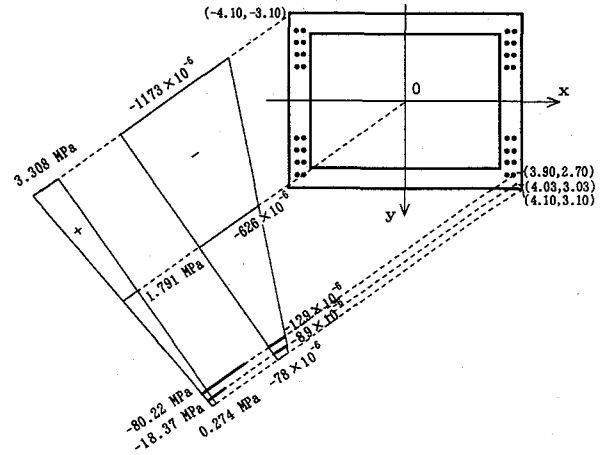
活荷重の作用によるひずみ変化は、式 (24) の ε_1 と式 (43) で得られる ε_2 の合計である。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{Bmatrix} 28.8 \\ 67.58/\text{m} \\ 46.09/\text{m} \end{Bmatrix}$$

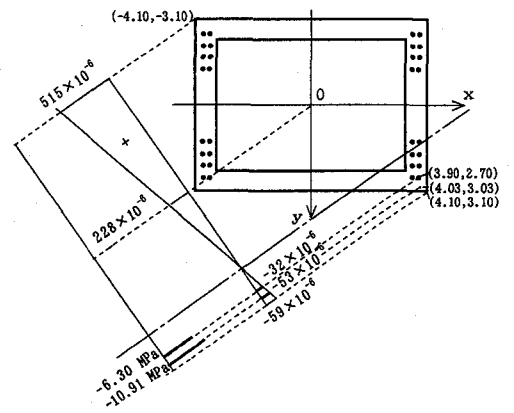
鉄筋、P C 鋼材は材齢 t_0 からの応力を重ね合わせることでひび割れ後の応力が得られ、その結果を図-10 に示す。

$$\sigma_s = -180.5 + 45.74y + 29.53x \quad (\text{MPa})$$

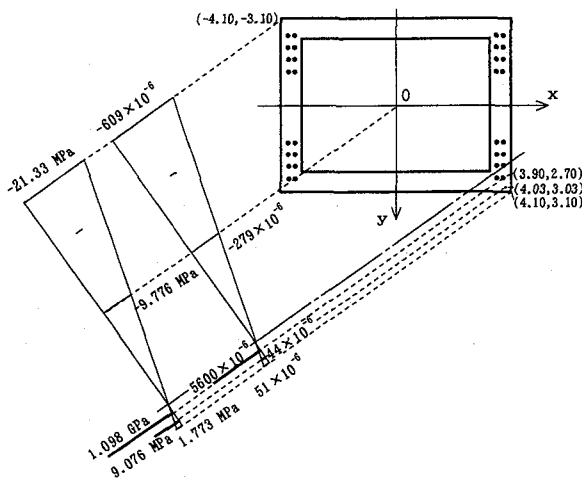
$$\sigma_p = 926.1 + 32.20y + 20.89x \quad (\text{MPa})$$



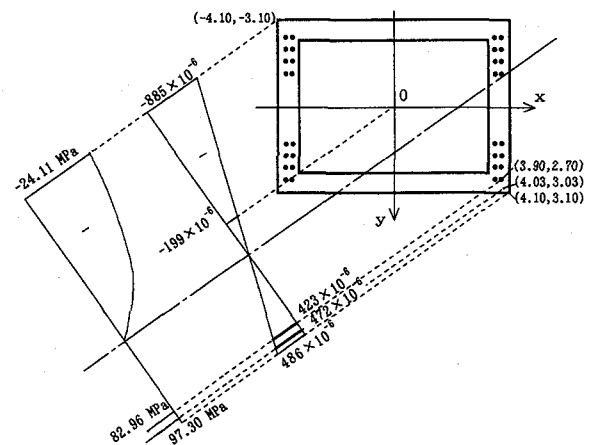
(b) 材齢 t_0 から材齢 t までに生じる変化量



(c) デコンプレッション力による変化量



(a) 材齢 t_0 での応力とひずみ



(d) $\{N, M_x, M_y\}_2$ による変化量

図-9 各材齢における応力及びひずみ分布図

表-1 各種方法による時間依存性応力 (MPa)

	コンクリート 最大	コンクリート 最小	鉄筋	P C鋼材
本論文の方法	3.308	0.274	-18.37	-80.22
道路橋示方書による方法	3.440	0.284	-19.34	-81.50
改良Dischinger法	3.395	0.279	-19.01	-81.09
星壁・佐伯の方法	3.422	0.204	-18.67	-80.67

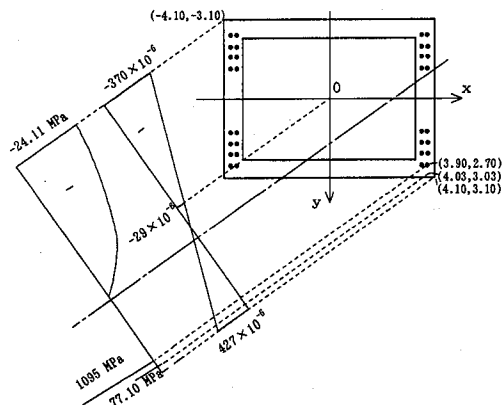


図-10 活荷重作用後の応力及びひずみ分布図

ii) $N=0, M_x=80\text{MN}\cdot\text{m}$ のときの $M_{y2}-\psi_{y2}$ の関係

M_{y2} をゼロから圧縮縁のひずみが -3500×10^{-6} に達する終局状態まで徐々に増加させたときの $M_{y2}-\psi_{y2}$ の関係を図-11に示す。最大の曲げモーメントが作用するとき $M_{y2}=640.2\text{MN}\cdot\text{m}$ であり、そのときのひずみ及び曲率は

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix}_2 = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -772.5 \\ 415.0/\text{m} \\ 595.0/\text{m} \end{Bmatrix}$$

である。このときの応力-ひずみ分布図を図-12に示す。

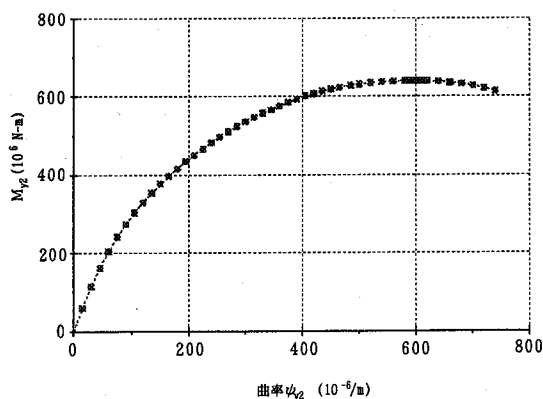


図-11 $M_{y2}-\psi_{y2}$ の関係

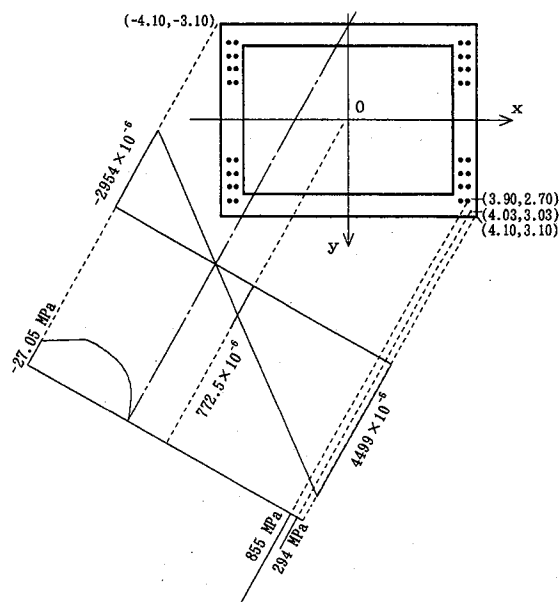


図-12 $M_{y2}=640.2\text{MN}\cdot\text{m}$ が作用したときの応力及びひずみ分布図

6. むすび

本論文では、軸力及び2軸曲げを受けるP C部材に関する時間依存性応力解析及びびび割れ後の弾塑性解析を行ったものである。

得られた成果およびその応用をまとめると以下のとおりである。

- 1) 2軸曲げを受けるP C部材を対象とした解析結果は曲げのみを受ける部材、曲げ圧縮を受ける部材にも適用できる。
- 2) P C部材のみならず、R C部材についても時間依存性応力解析や弾塑性解析を行うことができる。
- 3) コンクリートの応力-ひずみ関係が任意の曲線でも、その関係を直線の組み合わせにより表すことができるので普通コンクリートや高強度コンクリートにも適用できる。
- 4) $\{N, M_x\}$ を一定の値とし、 M_y をゼロから徐々に変化させるときの $M_y-\psi_y$ 関係を解析することができる。
- 5) 鋼材として、鉄筋及びP C鋼材を対象としたコンクリート部材の解析を行ったが形鋼を埋め込んだ柱及び鋼管にコンクリートを充填した柱などの合成柱、そして、コンクリートと鋼材を用いた合成桁等の応力解析にも適用できる。

Appendix

A. 1 材齢 t_0 における換算断面諸量

$$n_s = \frac{E_s}{E_c(t_0)} \quad n_p = \frac{E_p}{E_c(t_0)}$$

とおくと以下のように表せる。

プレテンション方式の場合

$$A = A_g + (n_s - 1) \sum a_s + (n_p - 1) \sum a_p$$

$$G_x = G_{xg} + (n_s - 1) \sum a_s y_s + (n_p - 1) \sum a_p y_p$$

$$G_y = G_{yg} + (n_s - 1) \sum a_s x_s + (n_p - 1) \sum a_p x_p$$

$$I_x = I_{xg} + (n_s - 1) \sum a_s y_s^2 + (n_p - 1) \sum a_p y_p^2$$

$$I_y = I_{yg} + (n_s - 1) \sum a_s x_s^2 + (n_p - 1) \sum a_p x_p^2$$

$$I_{xy} = I_{xyg} + (n_s - 1) \sum a_s x_s y_s + (n_p - 1) \sum a_p x_p y_p$$

ポストテンション方式の場合

$$A = A_g + (n_s - 1) \sum a_s - \sum a_{duct}$$

$$G_x = G_{xg} + (n_s - 1) \sum a_s y_s - \sum a_{duct} y_{duct}$$

$$G_y = G_{yg} + (n_s - 1) \sum a_s x_s - \sum a_{duct} x_{duct}$$

$$I_x = I_{xg} + (n_s - 1) \sum a_s y_s^2 - \sum a_{duct} y_{duct}^2$$

$$I_y = I_{yg} + (n_s - 1) \sum a_s x_s^2 - \sum a_{duct} x_{duct}^2$$

$$I_{xy} = I_{xyg} + (n_s - 1) \sum a_s x_s y_s - \sum a_{duct} x_{duct} y_{duct}$$

A. 2 材齢修正換算断面に関する断面諸量

材齢修正した換算断面の断面諸量を求めるときには

$$\bar{n}_s = \frac{E_s}{E_c(t, t_0)} \quad \bar{n}_p = \frac{E_p}{E_c(t, t_0)}$$

と置くと、以下の式によって得られる。

$$\bar{A} = A_g + (\bar{n}_s - 1) \sum a_s + (\bar{n}_p - 1) \sum a_p$$

$$\bar{G}_x = G_{xg} + (\bar{n}_s - 1) \sum a_s y_s + (\bar{n}_p - 1) \sum a_p y_p$$

$$\bar{G}_y = G_{yg} + (\bar{n}_s - 1) \sum a_s x_s + (\bar{n}_p - 1) \sum a_p x_p$$

$$\bar{I}_x = I_{xg} + (\bar{n}_s - 1) \sum a_s y_s^2 + (\bar{n}_p - 1) \sum a_p y_p^2$$

$$\bar{I}_y = I_{yg} + (\bar{n}_s - 1) \sum a_s x_s^2 + (\bar{n}_p - 1) \sum a_p x_p^2$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xyg} + (\bar{n}_s - 1) \sum a_s x_s y_s + (\bar{n}_p - 1) \sum a_p x_p y_p$$

A. 3 ガウスの積分定理

A. 1 の $A_g \sim I_{xyg}$ にはガウスの積分定理を適用する。

図-A-1 (a) のような中空断面に関する面積分は

$$H_{mn} = \iint x^m y^n dA \quad \dots\dots (A.1)$$

となる。ここで m と n は、整数であり 0、1、2 の組み合わせによって A 、 G_x 、 G_y 、 I_x 、 I_y 、 I_{xy} を求めることができる。

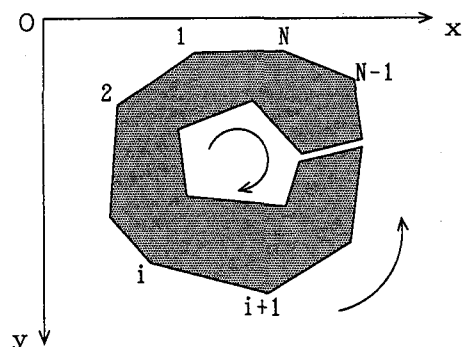
図-A-1 (b) のように

$$t = (x - x_i), \quad y = y_i + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} t \quad \text{とおくと式}$$

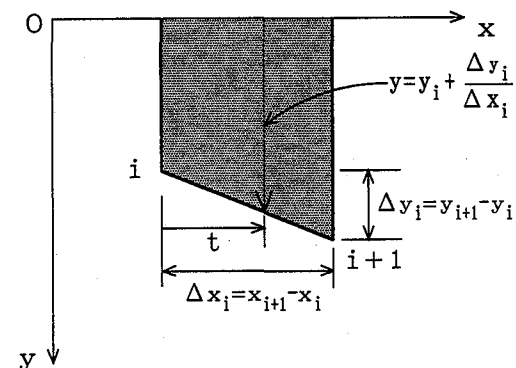
(A.1) は

$$\begin{aligned} H_{mn} &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^N \int_0^{\Delta x_i} (x_i + t)^m \left(y_i + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} t \right)^{n+1} dt \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=0}^n \left\{ {}_m C_j x_i^{m-j} \Delta x_i^{j+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} \left({}_{n+1} C_k \frac{y_i^{n+1-k} \Delta y_i^k}{k+j+1} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots (A.2) \end{aligned}$$

ここで、 ${}_m C_j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$ ${}_{n+1} C_k = \frac{n+1!}{k!(n+1-k)!}$ となる。



(a) 分割されたコンクリート断面



(b) 節点 i の周囲

図-A-1 任意形コンクリート断面

式 (A.2) より、コンクリート総断面に関する断面諸量は求まるが、これらをサフィックス g をつけて表すと

$$A_g = H_{00} = \sum_{i=1}^n \left\{ (\Delta x_i) \left(y_i + \frac{\Delta y_i}{2} \right) \right\}$$

$$G_{xg} = H_{01} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\Delta x_i}{2} \left(y_i^2 + y_i \Delta y_i + \frac{\Delta y_i^2}{3} \right) \right\}$$

$$G_{yg} = H_{10} = \sum_{i=1}^n \left\{ x_i \Delta x_i \left(y_i + \frac{\Delta y_i}{2} \right) + \Delta x_i^2 \left(\frac{y_i}{2} + \frac{\Delta y_i}{3} \right) \right\}$$

$$I_{xg} = H_{02} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\Delta x_i}{3} \left(y_i^3 + \frac{3 y_i^2 \Delta y_i}{2} + y_i \Delta y_i^2 + \frac{\Delta y_i^3}{4} \right) \right\}$$

$$I_{yg} = H_{20} = \sum_{i=1}^n \left\{ x_i^2 \Delta x_i \left(y_i + \frac{\Delta y_i}{2} \right) + 2 x_i \Delta x_i^2 \left(\frac{y_i}{2} + \frac{\Delta y_i}{3} \right) + \Delta x_i^3 \left(\frac{y_i}{3} + \frac{\Delta y_i}{4} \right) \right\}$$

$$I_{xyg} = H_{11} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{x_i \Delta x_i}{2} \left(y_i^2 + y_i \Delta y_i + \frac{\Delta y_i^2}{3} \right) + \frac{\Delta x_i^2}{2} \left(\frac{y_i^2}{2} + \frac{2 y_i \Delta y_i}{3} + \frac{\Delta y_i^2}{4} \right) \right\}$$

A. 4 記号

本論文で用いる記号は次のとおりである。

A	:断面積
G	:断面1次モーメント
I	:断面2次モーメント
a	:鉄筋及び鋼材の面積
N	:軸力
M	:曲げモーメント
t	:材齢
ε	:ひずみ
ψ	:曲率
σ	:応力
γ	:応力勾配
P	:プレストレス力
x_o	:中立軸位置のx切片
y_o	:中立軸位置のy切片
E	:弾性係数
$\overline{E}$	:材齢修正弾性係数
ϕ	:クリープ係数
χ	:材齢係数
ε_{cs}	:乾燥収縮ひずみ
$\Delta \sigma_{pr}$	:低減リラクセーション値
σ_{sy}	:鉄筋の降伏応力度
ε_{sy}	:鉄筋の降伏ひずみ
σ_{p1}	:P C鋼材の弾性限界の応力度
σ_{p2}	:P C鋼材の降伏応力度
ε_{p1}	: σ_{p1} に対するひずみ
ε_{p2}	: σ_{p2} に対するひずみ

添字

o	:基準点に関するもの
x	:x軸に関するもの
y	:y軸に関するもの
c	:コンクリート
s	:鉄筋
p	:P C鋼材
duct	:ダクト
res	:拘束
cc	:クリープ
cs	:乾燥収縮
pr	:リラクセーション
so	:ひび割れが生じる前の鉄筋の応力-ひずみ関係を移動させた点
po	:ひび割れが生じる前のP C鋼材の応力-ひずみ関係を移動させた点
1	:デコンプレッションに関するもの
2	:ひび割れ断面に関するもの
-	:材齢修正に関するもの

参考文献

- 1) Adrian, C.A and Triantafillou, T.C : "Creep and Shrinkage Analysis of Composite Systems Under Axial Load and Biaxial Bending", Materials and Structures, Vol. 25, No.153, pp.543-551, 1992.
- 2) Kawakami, M, et al. : "Limit States of Cracking and Ultimate strength of Arbitrary Concrete Section Under Biaxial Bending", ACI Journal, Vol.82, No.2, pp.203-212, 1985.
- 3) 川上 洵 他: 2軸偏心荷重を受ける任意形コンクリート部材の終局強度解析、構造工学論文集Vol.38A, pp.1237-1244, 1992.
- 4) Comité Euro - International du Béton (CEB) - Federation internationale de la Précontrainte (FIP): "Model Code for Concrete Structures (MC-90)", Thomas Telford, London, 1993.
- 5) Ghali, A and Favre, R : "Concrete Structures; Stresses and Deformations, 2nd ed.", E & FN Spon (Chapman and Hall), London, UK, pp.444, 1995.
- 6) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説 III コンクリート橋編, 1994.
- 7) 中井 博, 栗田 章光: 鋼・コンクリート合成構造のクリープ・乾燥収縮解析における種々の基礎式に関する一考察、構造工学論文集Vol.36A, pp.1275-pp.1284, 1990.

(1995年9月18日受付)