

アクティブ動吸振器の最適制御則の摂動解

PERTURBATION SOLUTIONS OF OPTIMAL CONTROL LAWS FOR ACTIVE TUNED MASS DAMPERS

阿部雅人*, 藤野陽三**

Masato ABÉ and Yozo FUJINO

*Ph.D. 東京大学講師 工学系研究科土木工学専攻 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

**Ph.D. 東京大学教授 工学系研究科土木工学専攻 (同上)

Optimal control laws for active tuned mass dampers (TMD) are studied by perturbation analysis. The optimal control laws discussed here are those which derived from the quadratic performance index in terms of the state and the control force of the system, namely, the linear quadratic regulator (LQR) control and the Bang-Bang control. Using a single mode approximation of structures, perturbation solutions of gains for both control algorithms are developed and properties of these control schemes are clarified. The root loci are constructed using these perturbation solutions to provide insights on the LQR control which is linear, and the control force is analyzed in the time domain to study the Bang-Bang control which is non-linear. When the control force is limited, the control forces in both control schemes are shown to improve the motion of the TMD to make the TMD more efficient rather than to control the structure directly.

Key words: active tuned mass dampers, bang-bang control, linear quadratic regulator, perturbation solutions.

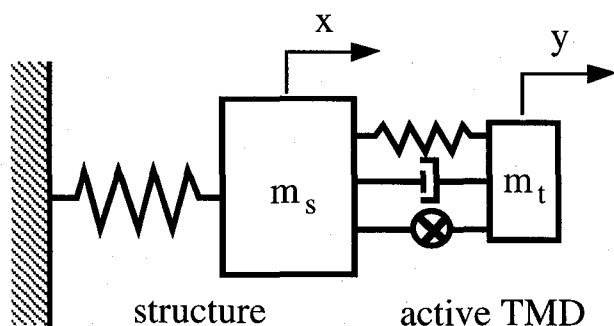


図-1 構造物・アクティブ動吸振器系

1. まえがき

風や中小地震による振動を抑える目的で、アクティブ動吸振器が建設系構造物に盛んに用いられている。定常的外力に対して高い制振性能を持つことや、コンパクトに製作できて設置が比較的容易であることが、応用例が多い要因であると思われる。アクティブ動吸振器は、図

1に示すように、制振対象構造物の固有振動数に同調させたパッシブな動吸振器にアクチュエータをつけ加えることによって、高い制振性能を得ようとするものである。パッシブ動吸振器自体が有効な制振方法であるため、アクティブ動吸振器は必要とされる制御力が他のアクティブ制振手法に比べ比較的小さいことから、将来のさらに高い性能を持つ制振システムの構築にあたって、大きな可能性を持つと目されている¹⁾。また、このシステムはパッシブな動吸振器と、アクチュエータ反力を付加質量でとるフル・アクティブなアクティブ・マス・ドライバ²⁾を組み合わせた形をしているため、ハイブリッド・マス・ダンパーとも呼ばれている³⁾。

アクティブ動吸振器を使用する場合の制御則は、Linear Quadratic Regulator (LQR)や、 H_{∞} などの現代的な線形制御理論によって設計されることが多い^{1)~7)}。それは、

制御対象は構造物だけであるが、安定性を保証するためには、制御系設計には動吸振器の状態変数も含まなくてはならないため、1入力1出力(SISO)系用に発展してきた古典的制御理論では、効率の良い制御系設計が困難であるからである。それに対して、LQR、H_∞などの現代的線形制御理論による設計は、制御効率や不確実性に対する重み関数が与えられれば、ほぼ自動的に重みの与え方に応じて安定な制御則を導くことが出来る。反面、重み関数の変化がどのように制御則の性質の変化につながるのかの関係をつかむのが困難である。そのため、パッシブ動吸振器自体の持つ制振効果と制御力との関わりについて、見通しが立てにくくなっている。

これらのことから、アクティブ動吸振器が構造物を制振する仕組みに、工学的な直観が働きにくく、構造技術者にとって、制御系が「ブラック・ボックス」のようになってしまっている。そのため、ある特定の制御行動が、構造安全性の観点から安全側にのみ働くのか、危険側にも働き得るのか、理解するのが困難である。このことが、大地震時など安全性が問われる際には、アクティブ動吸振器を停止させるように設計することが、一般的であることの一つの要因であると考えられる。また、セミ・アクティブ制御などで見られるように、非線形の特性を持つ振子を動吸振器として使用する際には、従来の線形制御理論が役に立たないため、制御系の働きに対して工学的直観を持っていることが、設計にあたって非常に重要になってくる。

本論文では、アクティブ動吸振器においてアクチュエータがどのような役割をしているかに着目し、その物理的理解を試みる。そのために、構造物を簡単な1自由度系でモデル化し、構造物・動吸振器系にLQR制御やバン・バン制御を適用する場合について摂動解析を行って、制御力と構造物、動吸振器との相互作用について明らかにする。まず、摂動解析によって、各制御則のゲインを解析的な陽形で求める。そして、古典的な制御系設計でよく見られる根軌跡法は視覚的で直観が働かせやすいことを利用し、線形であるLQR制御則の摂動解を用いて根軌跡を構築することによって、制御系への基本的理解を深める。さらに、非線形なバン・バン制御も含めて論じるために、線形性を仮定せず、時間領域で制御力が

どのような働きをしているかを直接ゲインの摂動解から読みとることによって、考察を加える。

2. 運動方程式

簡単のため、制振対象構造物のモデルとして、図1に示すように1自由度系を用いる。このモデルは、近接した固有振動数を持たない構造物に動吸振器を設置する問題に関しては良い近似を与えることが、既往の研究によって知られている⁸⁾。

構造物の質量と固有振動数は m_s, ω_s 、動吸振器については m_i, ω_i とする。動吸振器の質量比は $\mu = m_i/m_s$ 、同調比は $\gamma = \omega_i/\omega_s$ で与えられる。同調比は、よく知られている最適同調比^{9),10)}に従うものとし、本論文では $\gamma = 1/(1+\mu)$ とした。動吸振器の減衰比は ζ で表し、構造物は無減衰とした。構造物を無減衰としたのは、一般に制振を必要とする構造物の減衰は極めて低いこと、ならびに、構造物減衰の動吸振器最適設計値への影響が軽微であること¹⁰⁾、による。構造物の変位 $x(t)$ は地面に対する相対変位とし、動吸振器の変位 $y(t)$ は $x(t)$ に対する相対変位とした。制御力は関数 $u(t)$ で表し、アクチュエータ・ダイナミクスや、それに伴う時間遅れはここでは無視した。状態量表示による運動方程式は、地震動を x_g としたとき、

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} u(t) + \mathbf{d} \ddot{x}_g(t) \quad (1)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (1a)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2\mu\zeta\omega_i & -\omega_s^2 & \mu\omega_i^2 \\ 0 & -2(1+\mu)\zeta\omega_i & \omega_s^2 & -(1+\mu)\omega_i^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/m_s \\ -1/m_s - 1/m_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1c,d)$$

LQR最適制御を適用する際に用いられる評価関数は、

$$J = \int_0^{t_f} \frac{1}{2} \{ \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + r u^2(t) \} dt \quad (2)$$

である。ここでは、行列 Q の形として、アクティブ動吸振器の設計でよく用いられる

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \quad (2a)$$

となる対角形の場合を考える¹⁾⁷⁾。なお、評価関数が正定値になるように、 r の値は正、 $q_1 \sim q_4$ の値は 0 以上とする。 Q 行列が非対角項を持つこともあり得るが、そのような場合には評価関数の持つ物理的意味が不明確になること、正定値性を簡単な条件で表すことができなくなること、また、実際の設計では、そのような複雑な評価関数を用いることは行われていないこと、などから、式(2a)のような対角形の Q 行列に議論を限定することにした。

以上の LQR 最適制御問題の制御則を摂動法を用いて解析的に求める。そのために、運動方程式の諸量を無次元化する必要がある。ここでは、背戸らの無次元化の方法⁴⁾に若干の変更を加えた以下の無次元化変換を適用する。すなわち、

$$t = \omega_s \tau \quad (3a)$$

$$u = m_s \omega_s^2 \bar{u} \quad (3b)$$

$$\ddot{x}_x = \omega_s^2 \ddot{\bar{x}}_x \quad (3c)$$

$$r = \frac{\bar{r}}{m_s^2 \omega_s^4} \quad (3d)$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1/\omega_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{q}_2/\omega_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{q}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{q}_4 \end{bmatrix} \quad (3e)$$

とする。すると、無次元化された運動方程式は、

$$\ddot{\bar{z}}(\tau) = \bar{A}\bar{z}(\tau) + \bar{B}\bar{u}(\tau) + \bar{d}\ddot{\bar{x}}_g(\tau) \quad (4)$$

$$\bar{z}(\tau) = \begin{bmatrix} \bar{x}'(\tau) \\ \bar{y}'(\tau) \\ \bar{x}(\tau) \\ \bar{y}(\tau) \end{bmatrix} \quad (4a)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2\mu\zeta\gamma & -1 & \mu\gamma^2 \\ 0 & -2(1+\mu)\zeta\gamma & 1 & -(1+\mu)\gamma^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4b)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-1/\mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4c)$$

となる。ここで、 $(\cdot)'$ は、 τ に関する微分である。この方程式は、 x, y が長さの次元を持つ以外は、すべて無次元化されている。対応する最適制御の評価関数は、

$$J = \int_0^{\tau_f} \frac{1}{2} \{ \bar{z}^T(\tau) \bar{Q} \bar{z}(\tau) + r \bar{u}^2(\tau) \} d\tau \quad (5)$$

となる。ただし、

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{q}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{q}_4 \end{bmatrix} \quad (5a)$$

である。この無次元化された方程式を用いて、摂動解析を行う。以下で導かれる結果は、ここで挙げた無次元化変換を逆に用いることによって、いつでも物理次元をもった実際の問題に還元できる。

3. 制御則の摂動解

ここでは、最適制御則を摂動法を用いて陽な形で導く。摂動法を適用するにあたっては、特に建設系構造物の制振問題への応用を考慮して、以下の3つの摂動パラメータを用いた。すなわち、1) 動吸振器の質量比 μ 、2) 動吸振器の減衰比 ζ 、3) 制御力への重みの逆数 $1/\bar{r}$ である。動吸振器の質量比は一般に数%程度であるし、減衰比も 20% 以下であることが多いので、1)、2) の仮定は妥当である。また、文献9や10に与えられている動吸振器の最適設計式から考えて、 μ は ζ より1オーダー小さいものとする。3) の $1/\bar{r}$ については、建設系構造物において、制御力の大きさが外力、特に地震力に対しては非常に小さいことを反映している。

ここでは、まず、よく用いられる LQR 制御則を摂動法によって導き、摂動解に基づいて根軌跡を描いてみることによって、擬似的な SISO 線形制御系としてみたときの基本的特性を論じる。その後、最近、制御力の容量が限られている場合に有効であるとして研究されているバン・バン制御則も解析的に導く。

3. 1. LQR 最適制御則の摂動解

LQR 制御則は、 $\tau \rightarrow \infty$ のときに、

$$\bar{u}(\tau) = -\bar{B}^T \bar{P} \bar{z}(\tau) / \bar{r} \quad (6)$$

で与えられる¹¹⁾。ここで、 $\bar{\mathbf{P}}$ は、以下の行列 Ricatti 方程式の正定値解である。

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}/\bar{r} + \bar{\mathbf{Q}} = 0 \quad (7)$$

この Ricatti 方程式を解くには、通常 Potter の方法¹²⁾が用いられている。Potter の方法は、数値解を求めるには非常に効率的であるが、解析的に適用しにくい。そこで、ここでは、式(7)の正定値解が、 $\bar{r} \rightarrow \infty$ のときに Lyapunov 方程式、

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}} = 0 \quad (8)$$

の解に漸近する事に着目して、特異摂動法(Singular Perturbation Method)¹³⁾を適用することとした。摂動法の特異点として用いられる式(8)自身は、標準的な連立線形方程式に変換することができ、解析的にも比較的容易に解くことが出来るので、この性質を特異摂動法を用いる際に利用することになる。

マトリクスの対称性に留意して変数を減らし、また、各摂動パラメータについて最低次の項まで残すことによって、式(6)による LQR 制御則は、以下のように導かれる¹⁴⁾。

$$\bar{u} = -\frac{1}{\bar{r}}(C_1x' + C_2y' + C_3x + C_4y) \quad (9)$$

$$C_1 = \frac{\mu\bar{r}}{2} \left(\frac{2C_4 + \bar{q}_1}{2\zeta\mu\bar{r} - C_2} \right) \quad (9a)$$

$$C_2 = 2\zeta\mu\bar{r} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\bar{q}_2 + 2\mu^2C_3 - 2\mu C_4}{4\zeta^2\mu^2\bar{r}}} \right) \quad (9b)$$

$$C_3 = -\mu\bar{r} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\bar{q}_1 + \bar{q}_3}{\mu^2\bar{r}}} \right) \quad (9c)$$

$$C_4 = \mu\bar{r} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\bar{q}_4}{\mu^2\bar{r}}} \right) \quad (9d)$$

$\bar{r}$ が非常に大きいときには、この表現を、以下のようにさらに簡便にすることが出来る。

$$\bar{u} = -\frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\mu\bar{q}_1 - \bar{q}_4}{4\mu\zeta} x' - \frac{\mu\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \mu\bar{q}_3 + \bar{q}_4}{4\mu\zeta} y' + \frac{\bar{q}_1 + \bar{q}_3}{2\mu} x - \frac{\bar{q}_4}{2\mu} y \right) \quad (10)$$

式(9)ならびに(10)は、簡単な解析的な形をしているのみならず、建設系構造物で一般的な設計変数の範囲では数値的にも非常に高い精度の近似を与える¹⁴⁾ため、これらの式をアクティブ動吸振器の初期設計の参考に用いることも可能である。また、以上の式より、重みとゲインの関係を、直接読みとることが出来る。

3. 2. 摂動解による LQR 最適制御則の根軌跡

一般に、式(6)に見られるように、LQR 制御は全状態量のフィードバック系を構成するため、SISO のアプローチによる根軌跡構築は不適當である。しかし、式(10)

で得られた摂動解を見るとわかるように、系の出力を

$$\xi = \frac{\mu\bar{q}_1 - \bar{q}_4}{4\mu\zeta} x' - \frac{\mu\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \mu\bar{q}_3 + \bar{q}_4}{4\mu\zeta} y' + \frac{\bar{q}_1 + \bar{q}_3}{2\mu} x - \frac{\bar{q}_4}{2\mu} y \quad (11)$$

と見立てれば、単一出力 ξ のゲイン $1/\bar{r}$ による SISO フィードバック制御と考えられ、根軌跡を描くことが容易になる。

まず、LQR の根軌跡を描く前に、構造物・動吸振器系の特性についての基本的な理解を得るため、動吸振器の自由度を無視した制御系を設計し、構造物の応答の速度フィードバックを行う場合を考えよう。すなわち、出力を

$$\xi = x' \quad (12)$$

とする場合に相当する。質量比 $\mu = 0.1$ の場合の根軌跡を図 2(a)に示した。動吸振器はパッシブの状態モード減衰が最大になるよう、その設計パラメータを選択した¹⁰⁾。この場合、パッシブ系は 2 つの重根の組を固有値として持つ。そのため、根軌跡図上でゲイン 0 の時の根の位置を示す $\times$ は 2 カ所しか見あたらないが、実際にはそれぞれ重根が重なっているの、計 4 つの根が存在する。また、図中 $\circ$ で示されるゼロは 3 つで、すべて原点にある。図からわかるように、ゲインをあげていくと、根のうち対象な 2 つがゼロに近づく過程で右半面に移動し、系が不安定化する。この知見は、文献 2 に示された計算・実験結果と整合するものである。このように、動吸振器の状態量を無視し、SISO 的に設計を行うと安定性の問題が生じるため、古典的な制御系設計はアクティブ動吸振器の設計には、一般に用いられない。

次に、LQR 制御則のうち、簡単のため、 $\bar{q}_1 = \bar{q}_3 = \bar{q}$ 、 $\bar{q}_2 = \bar{q}_4 = 0$ の場合を検討する。この重みによって、評価関数は構造物のもつ運動エネルギーとひずみエネルギーの和の時間積分値を与えることになる。言い換えれば、この重みによって、構造物の持つ振動エネルギーを最小化する制御則が導かれることになる。そのとき、

$$\xi = \frac{\bar{q}}{4\zeta} x' - \frac{\bar{q}}{2\zeta} y' + \frac{\bar{q}}{\mu} x - \frac{\bar{q}}{2\zeta} y + \frac{\bar{q}}{\mu} x \quad (13)$$

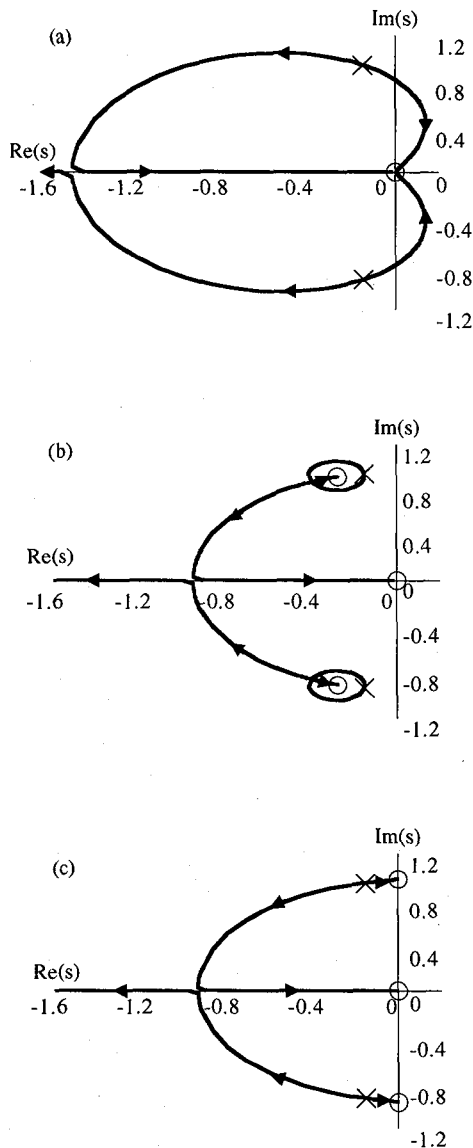


図-2 構造物・アクティブ動吸振器系の根軌跡: (a) 速度フィードバック=式(12); (b) 構造物のエネルギーに重み=式(13); (c) 動吸振器のエネルギーに重み=式(14).

となる。ここで、系のゼロは、摂動解析によると、 $0, -\zeta \pm i$ であり、根軌跡は図 2 (b) に示したようになる。パッシブ動吸振器の設計は速度フィードバックの際と同じにしたので、無ゲイン時の根の位置には図 2 (a) と全く同じである。ゼロが根のすぐ左側にあるため、ゲインが小さいときにはすべての根が一斉に左側へ移動する。根軌跡図では、根が左側にあった方が高い減衰を示すので、ゲインが小さい場合には、図 2 (b) のようなゼロの配置と軌跡は望ましいものである。

最後に、LQR の設計で、評価関数が動吸振器のエネルギーとなる場合、すなわち、 $\bar{q}_1 = \bar{q}_3 = 0, \bar{q}_2 = \bar{q}_4 = \bar{q}$ の場合を図 2 (c) に示す。このとき、

$$\xi = -\frac{\bar{q}}{4\mu\zeta}x' - \frac{\bar{q}}{2\mu\zeta}y' - \frac{\bar{q}}{2\mu}y \approx -\frac{\bar{q}}{4\mu\zeta}x' - \frac{\bar{q}}{2\mu\zeta}y' \quad (14)$$

であり、ゼロは、摂動解で、 $0, \pm i$ である。したがって、4 つの根のうち 2 つが、ゲインをあげるにつれて実軸に近づく。そのため、系の安定性は保証されるものの、制御系全体の減衰は、構造物に重みを加えるときに比べて下がることになる。

このように、摂動解を用いることによって、構造物・アクティブ動吸振器系の根軌跡を描くことができた。ただし、ここで描かれた根軌跡は、摂動の条件 3) の「制御力への重みの逆数 $1/\bar{r}$ が小さい」という仮定に基づいているので、高ゲインの時のアクティブ動吸振器の設計の際に、そのまま用いるのは不適當である。また、全状態量フィードバックの一般の LQR 制御系においては、ゼロの位置が $1/\bar{r}$ の値によって変化するので、ここでの根軌跡構築法は一般の場合に適用されるのではなく、本論文での摂動解析に限定される性質のものである。

3. 3. バン・バン制御則の摂動解

制御力の容量に制限がある場合の有効な制御則として、バン・バン制御が用いられることがある^{15), 16)}。この制御則は、評価関数

$$J = \int_0^{\tau_f} \frac{1}{2} \bar{\mathbf{z}}^T(\tau) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{z}}(\tau) d\tau \quad (15)$$

を、 $\tau_f \rightarrow \infty$ のときに、拘束条件

$$|\bar{\mathbf{u}}| \leq \bar{\mathbf{u}}^{\max} \quad (16a)$$

のもとで最小化するものである。変分計算によって、この問題の解は、

$$\bar{\mathbf{u}} = -\bar{\mathbf{u}}^{\max} \text{sgn}(\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \bar{\mathbf{z}}) \quad (17)$$

であることが示される¹¹⁾。ここで、 $\bar{\boldsymbol{\Lambda}}$ は、Lyapunov 方程式

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\boldsymbol{\Lambda}} + \bar{\mathbf{Q}} = 0 \quad (18)$$

の解であり、 $\text{sgn}(\cdot)$ は、

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & \text{when } a > 0 \\ -1, & \text{when } a < 0 \\ 0, & \text{when } a = 0 \end{cases} \quad (19)$$

で定義される関数である。LQR 制御則の場合と同様の摂動解析を適用すると、制御則は、

$$\bar{u} = -\bar{u}^{max} \operatorname{sgn} \left(\frac{\mu \bar{q}_1 - \bar{q}_4}{4\mu\zeta} x' - \frac{\mu \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \mu \bar{q}_3 + \bar{q}_4}{4\mu\zeta} y' + \frac{\bar{q}_1 + \bar{q}_3}{2\mu} x - \frac{\bar{q}_4}{2\mu} y \right) \quad (20)$$

と導かれる¹⁴⁾。式(20)の括弧の中の表現は、式(10)の表現と同一であり、これから LQR 制御とバン・バン制御が、本質的には似た性質を持っていることが分かる。違いは、LQR は状態量の線形フィードバックであるため制御力が連続微分可能な変化を示すのに対して、バン・バン制御では不連続な矩形波を示すことであり、いずれの制御則においても、制御力の符号は常に一致する。

4. 考察

ここでは、以上より求められた最適制御則のもつ物理的な意味を、構造物、動吸振器、ならびに、アクチュエータ相互の時間的な位相関係に基づいて検討する。評価関数の重みとしては、再び、構造物のエネルギーを与える $\bar{q}_1 = \bar{q}_3 = \bar{q}$, $\bar{q}_2 = \bar{q}_4 = 0$ の場合を取り上げる。

式(10)より、この場合の LQR 制御則は、

$$\bar{u} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\mu \bar{q}}{4\zeta} x' - \frac{\bar{q}}{2\zeta} y' + \frac{\bar{q}}{\mu} x \right) \approx -\frac{1}{r} \left(-\frac{\bar{q}}{2\zeta} y' + \frac{\bar{q}}{\mu} x \right) \quad (21)$$

となる。式(21)をさらに簡略化するために、パッシブ動吸振器の摂動解析から得られている知見を導入する^{15), 17)}。まず第一に、パッシブ動吸振器においては、構造物に対するバネ反力がダッシュポット反力より 1 オーダー大きい¹⁵⁾。つまり、パッシブ動吸振器においては、ダッシュポット反力ではなくバネ反力が主たる制振力となっている。構造物からエネルギーが効率よく吸収されるためには、動吸振器によるバネ反力が、常に構造物の速度と反対の符号を持たなくてはならない。それは、図3に示すように、構造物の応答と動吸振器の応答の位相差が -90 度である場合に相当する。また、数値計算によっても、この関係は、パッシブのみならず、セミ・アクティブや制御力が小さい場合のアクティブ動吸振器についても成り立っていることを、確かめることができる¹⁵⁾。

図3の構造物と動吸振器の位相差の関係をを用いると、式(21)がさらに簡略化される。まず、構造物と動吸振器の応答の振幅比を以下のように定義する。

$$\alpha = \hat{y} / \hat{x} \quad (22)$$

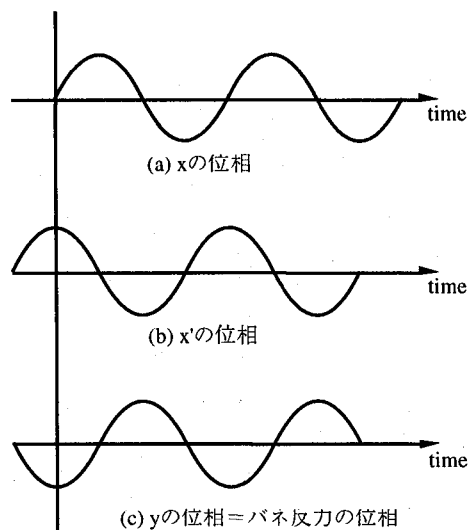


図-3 構造物・動吸振器系の位相関係

ただし、

$$\hat{x} = \sqrt{(x')^2 + x^2}, \quad \hat{y} = \sqrt{(y')^2 + y^2} \quad (22a, b)$$

である。この振幅比を用いると、構造物応答と動吸振器応答の間には、図3の関係からも分かるように

$$y' \approx -\alpha x \quad (23)$$

の関係が成り立つことになる。この関係を用いることによって、式(21)の制御則は、

$$\bar{u} \approx -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{\mu}{2\zeta} \alpha \right) \frac{\bar{q}}{\mu} x \quad (24a)$$

あるいは、

$$\bar{u} \approx -\frac{1}{r} \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{\mu}{2\zeta} \right) \frac{\bar{q}}{\mu} y \quad (24b)$$

と表される。

式(24a)をみると、これは振幅比 α が $2\zeta/\mu$ より小さいときは、構造物の変位の正のフィードバック、大きいときは構造変位の負のフィードバックとなる。よく知られているように、構造物からエネルギーを取り除く最適の方法は正の速度フィードバックであるから¹⁸⁾、式(24a)のアルゴリズムは、構造物の振動エネルギー吸収の観点からは必ずしも効率的でない。特に、変位の負のフィードバックは、構造物にエネルギーを加えることになる。

次に式(24b)に着目する。これは、基本的に動吸振器の速度フィードバックになっており、振幅比 α が $2\zeta/\mu$ より小さいときは負の、大きいときは正のフィードバックになっていることが分かる。すなわち、制御力は、動吸振器の振幅が小さいときには、動吸振器に対して負減

衰のように働き、効率的に動吸振器の振幅、ひいてはバネ反力を増加させる役割を果たしていることになる。また、動吸振器の振幅が大きくなったあとには、正減衰のように働き動吸振器の振幅を抑え、システムが不安定になることを防いでいると考えられる。

このように、制御力が外力に対して比較的限られている状況では、制御力は構造物の応答を直接制御するよりは、動吸振器の運動を制御して、動吸振器の制振効果を高めるという、補助的な役割を担っていると考えられる。

式(20)のバン・バン制御の制御則は、上記の LQR 制御と同様の条件を適用すると、

$$\bar{u} \approx -\bar{u}^{\max} \operatorname{sgn} \left[\left(1 - \frac{\mu}{2\zeta} \alpha \right) \frac{\bar{q}}{\mu} x \right] \quad (25a)$$

あるいは、

$$\bar{u} \approx -\bar{u}^{\max} \operatorname{sgn} \left[\left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{\mu}{2\zeta} \right) \frac{\bar{q}}{\mu} y \right] \quad (25b)$$

となる。基本的には、式(24)に示した LQR 制御則と常に同じ符号の制御力を用いることになる。但し、LQR では α の値の変化に応じて連続的にフィードバックゲインが変化していくのに対して、バン・バン制御では $\alpha = 2\zeta/\mu$ を境に不連続的に制御力の符号が変わることになる。言い換えれば、LQR 制御はバン・バン制御の制御力の不連続的な変化を平滑化した制御則になっていると言える。

5. まとめ

1 自由度系構造物・アクティブ動吸振器系に着目し、その最適制御則を高精度かつ簡便な摂動解で導き、制御力と動吸振器の制振効果の相互関係を論じた。

建設系構造物のように、制御力の大きさに厳しい制限がある場合には、制御力への重みを大きくした LQR 制御を用いたり、バン・バン制御を用いることになる。この場合の摂動解は、式(9)、(10)ならびに(20)に示したように簡単な陽な形をしているので、アクティブ動吸振器の制振原理に対する理解を直観的な方法で深めることができる。本論文では、まず、図2のように、線形の LQR 制御則の根軌跡を描くことによって、一般的な全状態量フィードバック問題では捉えることの困難な、ゲインと制御効果の関係を明確に示した。さらに、非線形のバン・バン制御をも包含する形で、時間領域での制御力と構造物・動吸振器応答の相互作用を検討した。その結

果、許容制御力に制限があるときには、制御力は直接構造物の振動エネルギーを吸収することに用いられているのではなく、動吸振器のバネ反力による制振性能を高めるために用いられていることが明らかになった。このように、動吸振器のバネ反力に主たる制振効果をもたせていることが、アクティブ動吸振器が他のアクティブ制振手法に比べて、比較的小さい制御力で高い制振性能を示していることの一つの理由であると考えられる。

また、本研究から得られた摂動解は、今後、アクティブあるいはセミ・アクティブの動吸振器を開発・構築していく上で、一つの参考を与えるものであると考えられる。例えば、式(24a)や(25a)からわかるように、アクティブ動吸振器の制御則は、動吸振器と構造物の振幅比によってゲインが変わる、構造物の変位の可変ゲインフィードバックであると捉えることが出来る。この性質を用いて、著者らは、建設系構造物によくみられる、制御力ならびに動吸振器の振幅に不等式拘束がある場合の制御則設計用に、ファジー・ルール・ベースに基づいた知的制御を考案している^{19),20)}。このように、拘束条件がある制御問題²¹⁾や、セミ・アクティブ制御問題^{17),22)}に対しては、非線形な制御則が用いられることがあるが、ここで得られたアクティブ動吸振器の制振原理に対する時間領域での知見は、バン・バン制御に見られるように、非線形な制御法にも一定の洞察を与えるものであり、さらに一般的な非線形制御の理解に対しても有用な視点を与えていると考えている。

謝辞

本研究を進めるにあたり、米国 Northwestern 大学の T. Igusa 教授からご指導を頂いた。また、本研究は、一部、米国科学財団 (National Science Foundation) の研究助成 BCS-8858549、ならびに、清水建設和泉研究室と Northwestern 大学との共同研究プロジェクトによるものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Chang, J. C. H. and Soong, T. T. : Structural control using active tuned mass dampers, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.121, pp.355-366, 1980.
- 2) Kobori, T., Koshika, N., Yamada, K. and Ikeda, Y. :

- Seismic response controlled structure with active mass driver system. Part 1: Design, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 20, pp.133-149, 1991.
- 3) 金子美香, 三田彰: ハイブリッドマスダンパーのエネルギー吸収特性と制御手法に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, No.449, pp.103-110, 1993.
 - 4) 背戸一登, 猿渡克己, 藤田勝久, 古石喜郎: 能動的動吸振器の研究, 日本機械学会論文集 (C編) 57巻538号, pp.44-51, 1991.
 - 5) Yoshida, K., Shimogo, T. and Nishimura, H.: Optimal control of random vibration by the use of an active dynamic vibration absorber (experimental considerations on the effect of the control with feedforward link, *JSME International Journal, Series III*, Vol.31, pp.387-394, 1988.
 - 6) 田村和夫, 柴慶治, 和田章: 強風時のエネルギー吸収に基づく同調質量ダンパーの制振指標に関する検討, 日本建築学会構造系論文集, No.468, pp.51-60, 1995.
 - 7) 玉木利裕, 坂井藤一, 小川一志, 加賀谷博昭, 村上謙一, 西義和: アクティブ制振装置を適用した橋梁主塔架設時の風振動制御, 第3回振動制御コロキウム講演論文集, Part B, pp.75-82, 1995.
 - 8) Abé, M. and Igusa, T.: Tuned mass dampers for structures with closely spaced natural frequencies, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 24, pp.247-261, 1995.
 - 9) Den Hartog, J. P.: *Mechanical Vibrations*, 4th ed, McGraw-Hill, New York, 1956.
 - 10) 阿部雅人, 藤野陽三: 摂動解による同調質量ダンパー(TMD)-構造物系の動特性の理解と制振評価, 土木学会論文集 No.446, pp.157-166, 1992.
 - 11) Bryson, A. E. and Ho, Y.-C.: *Applied Optimal Control*, Hemisphere, New York, 1975.
 - 12) Potter, J. E.: Matrix quadratic solutions, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 14, pp. 496-501, 1966.
 - 13) Bender, C. M. and Orszag, S. A.: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1978.
 - 14) Abé, M.: Vibration control using analytically based artificial intelligence, *Ph. D. Thesis*, Department of Civil Engineering, Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, 1995.
 - 15) Bhartia, B. and Nagashima, I.: Saturation control of buildings with AMD of bounded capacities, *The 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, LaJolla, California, pp.3561-3569, 1993.
 - 16) Mongkol, J., Bhartia, B. and Fujino, Y.: Optimal linear-saturation control of structures by modal decomposition, *Proceedings of the Fifth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction*, Gold Coast, Queensland, Australia, pp.1455-1460, 1995.
 - 17) Abé, M. and Igusa, T.: Semi-active dynamic vibration absorbers for controlling transient vibration, *Journal of Sound and Vibration*, (印刷中).
 - 18) Abé, M. and Igusa, T.: A rule-based feedforward control strategy with incomplete knowledge of disturbance" *First World Conference on Structural Control*, Los Angeles, California, USA, pp.(TA4) 63-70, 1994.
 - 19) 阿部雅人, 藤野陽三: アクティブ動吸振器による建設系構造物のファジー制御, 第38回自動制御連合講演会前刷集, pp.491-492, 1995.
 - 20) Abé, M.: A rule-based control algorithm for active tuned mass dampers, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1995. (印刷中).
 - 21) 有壁剛生, 畑山貴善, 中村幸: 可変ゲイン DVFB法を用いた橋梁主塔の制振, 第3回振動制御コロキウム講演論文集, Part B, pp.69-74, 1995.
 - 22) Pinkaew, T. and Fujino, Y.: Development of semi-active mass damper for control of civil structures, *Proceedings of International Symposium on Public Infrastructure Systems Research*, Korea, pp.153-162, 1995.

(1995年9月18日受付)