

不規則分布荷重を受ける直列型剛接構造系の 確率伝達マトリックス法による解析

SERIAL RIGID FRAMES SUBJECTED TO THE STOCHASTICALLY DISTRIBUTED
LOAD BY THE PROBABILISTIC TRANSFER MATRIX METHOD.

河角省治*, 岡林隆敏**, 崎山毅***

Shouji KAWAKADO, Takatosi OKABAYASI and Takesi SAKIYAMA

* (株)PAL構造 部長 電算技術部 (〒852 長崎市旭町8番20号)

**工博 長崎大学 助教授 工学部社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

***工博 長崎大学 教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町1番14号)

Traffic loads on bridge, snow loads and live loads on floor can be modeled as stochastically distributed loads with spatial correlation. This paper is concerned with a method for calculating the variance of the static deflection and the internal forces of serial rigid frames subjected to the correlated stochastically distributed load. The purpose of this paper is to explain the concept of the present method, and to apply the method to rigid frames subjected to the correlated load idealized into the white noise random field. The calculating results show the standard deviations of the response of the displacements and the internal forces of the portal frame and the angle frame under the stochastically distributed load.

Key Words : probabilistic analysis, variance response, rigid frame, random field, correlated stochastically load

1. はじめに

道路橋活荷重, 積雪荷重, 積載荷重などの静的な外力は空間的に変動していると考えられる⁽¹⁾⁽²⁾. このような荷重を受ける構造物の信頼性解析では⁽³⁾, 不規則分布荷重を受ける構造物の静的応答の確率特性を求めることが基礎となる.

このような視点から, 著者らは, 構造物-荷重系を伊藤型の確率微分方程式でモデル化し, これより誘導される応答の共分散の空間的变化を表現する共分散方程式の定式を行い, この共分散方程式を解く手法として確率伝達マトリックス法の提案を行った. そして, この解析理論と手法をこれまで1次元問題に適用してきた⁽⁴⁾⁻⁽⁸⁾.

著者らの研究により, 1次元問題としての静的不規則分布荷重を受ける構造系の解析は, 著者らの提案する解析手法により, 簡易に行えることが確認できた⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾. しかしながら, 静的な不規則荷重を受ける2次元または3次元として扱われる構造物の確率論的解析法については, 効果的な解法は提案されていない.

そこで, 本論文では, 著者らの提案している解析理論の拡張を目的として, まず, 直列型平面剛接構造⁽¹¹⁾の解法を求めることを試みたものである.

本論文では, 直列型平面剛接構造に不規則分布荷重が作

用する問題について, 構造物の変形および断面力の共分散を求める理論を提案している. 本論文において, 共分散方程式を基礎式とする確率伝達マトリックス法の2次元問題への拡張は, 次のように考えることで実現できている. すなわち, 構造系の変形および断面力を表す状態変数は, 部材軸に沿った部材座標系における3自由度の変位および3成分の断面力で定義する. この状態変数を用いることにより, 節点における変位の適合条件および力の釣合条件の統一的な表現が可能となる. このことは, 節点マトリックスおよび境界マトリックスを拡張することで実現する. また, 荷重の扱いにおいても部材垂直方向荷重のみでなく部材軸方向荷重も考慮できるように拡張する.

本論文の計算例のために, 不規則分布荷重は白色雑音過程および指数関数型の自己相関関数を有する確率過程でモデル化した. このような荷重を受ける門形ラーメンと山形ラーメンの静的応答の分散を求めた. さらに, 応答の性状について考察を加えた.

2. 基礎方程式

2.1 直列型剛接構造系の構造要素の状態空間表示

門形ラーメン, 山形ラーメンに代表される直列型剛接構造は⁽¹¹⁾, 柱・はりの線部材を構造要素とし, これを直列

に剛接した2次元構造である。このような構造系は2点境界値問題として扱うことができ、1次元問題の解法を拡張することで解析が可能となる。さらに、このような問題に関する確率論的解析手法を確立することは、多点境界値問題として扱わなければならない任意骨組構造、そして板構造のようなより一般的な構造系の解析の基礎になると考えられる。

連続ばり系などの1次元問題においては、構造要素の部材軸と座標軸は同一として扱われている⁽⁸⁾。しかし、山形ラーメンのような構造系では、部材軸は空間の座標軸に対して傾きを有している、さらに、個々の部材の傾きは任意に扱われなければならない。このような構造系を状態空間に表すには、それぞれの部材の状態変数を部材軸に沿った座標系で定義することが必要となる。ここでは、構造要素の状態空間表示を2次元の問題に拡張する。

構造系は0節点からs節点で構成されるs本の部材からなるものとする。その中で始端の0節点と終端のs節点には境界条件が与えられる。k-1節点とk節点からなる部材長 l_k の $\bar{k}$ 部材に不規則分布荷重 q_k が作用する場合を考える。図-1に示すように、部材の始端から終端方向をx軸とする部材座標 $o-xy$ を定義する。変位成分はx軸方向変位を $u(x)$ 、y軸方向変位を $v(x)$ 、回転 θ 方向変位を $\phi(x)$ のように3自由度の変位成分とする。これらは、それぞれ軸変位、横たわみ、そして、たわみ角を意味する。一方、部材断面力は、軸力 $N(x)$ 、せん断力 $Q(x)$ 、および、曲げモーメント $M(x)$ の3成分とし、これらの正方向は図-1に示している。また、不規則分布荷重 q_k は図-2に示すように、x軸方向成分 q_{kx} とy軸方向成分 q_{ky} に分解される。

状態変数として、これら3自由度の変形と3成分の断面力を用いると、 $\bar{k}$ 部材の状態変数 $Y_k(x)$ と $\bar{k}$ 部材に作用する外力ベクトル $F_{Yk}(x)$ は、次式のように表される。

$$Y_k(x) = [u_k(x) \ v_k(x) \ \phi_k(x) \ N_k(x) \ Q_k(x) \ M_k(x)]^T \quad (1)$$

$$F_{Yk}(x) = [0 \ 0 \ 0 \ -q_{kx}(x) \ -q_{ky}(x) \ 0]^T \quad (2)$$

微小変形線形理論によると、 $\bar{k}$ 部材の変形と断面力は、次の状態方程式に支配される。

$$\frac{d}{dx} Y_k(x) = A_{Yk}(x) Y_k(x) + F_{Yk}(x) \quad (3-1)$$

$$\text{境界条件: } Y_k(0) = Y_k^L, Y_k(l_k) = Y_k^R \quad (3-2)$$

この方程式の定義域は $(0 \leq x \leq l_k)$ であり、また、係数マトリックス $A_{Yk}(x)$ は、次式で表される。

$$A_{Yk}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/EA_k(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/EI_k(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

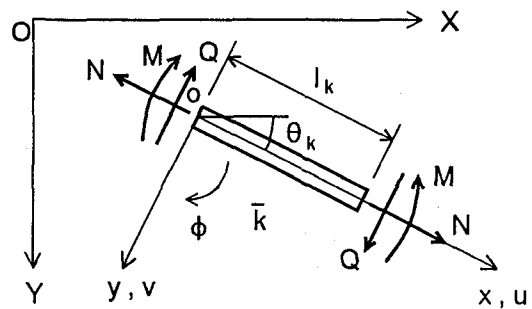


図-1 部材座標と変位成分・断面力成分

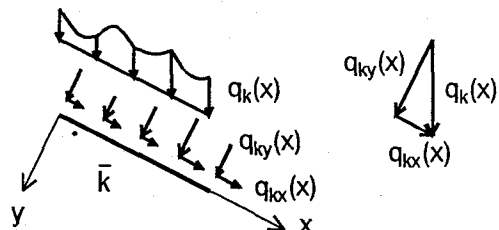


図-2 荷重成分

ここに、 $EA_k(x)$ 、 $EI_k(x)$ は $\bar{k}$ 部材の伸び剛性および曲げ剛性である。

2.2 不規則荷重のモデル化

不規則荷重のモデル化においては、1次元問題で扱われてきた方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾が基本的に適用できる。このとき、状態変数を拡張したことにより外力ベクトルの成分が増えたことの扱いを考慮する必要がある。ここでは、不規則荷重のモデル化の概要について説明する。

構造系に作用する外力ベクトル $F_Y(x)$ は、平均値 $E[F_Y(x)]$ とその回りの変動 $\hat{F}_Y(x)$ に分離することができ、構造系の応答も平均値 $E[Y(x)]$ とその回りの変動 $\hat{Y}(x)$ に分離することができる。系が線形であると、応答の平均値と変動はそれぞれ独立に解析できる。

ここで、不規則荷重を Gauss 確率場と仮定すると、応答量も Gauss 確率場となり、応答量 $Y(x)$ のx点の確率特性は、平均値 $E[Y(x)]$ と共分散 $R_Y(x) = E[\hat{F}_Y(x) \hat{F}_Y^T(x)]$ により完全に規定される。また、平均値応答は従来の構造解析の方法で解くことができる。そこで、本研究では、外力の平均値回りの変動に対する応答の共分散に着目する。以後、式の簡略化のために変数は平均値回りの変動を表すものとする。

本研究では、外力としては不規則分布荷重 $q(x)$ のみ考えることとし、白色雑音過程または任意の空間的相関のある定常確率過程を用いてモデル化する。また、荷重が複数

の部材に分布する場合が考えられるが、荷重の確率特性は部材間で変化しないものとする。

1) 白色雑音過程による荷重モデル

$\bar{k}$ 部材の外力ベクトル $F_{Yk}(x)$ は、正規性白色雑音過程 $n(x)$ と確定関数ベクトル $G_{Yk}(x)$ の積で表される非定常確率過程ベクトルとする⁽⁴⁾⁽⁸⁾。

$$F_{Yk}(x) = n(x) G_{Yk}(x) \quad (5-1)$$

$$G_{Yk}(x) = [0 \ 0 \ 0 \ g_{kx}(x) \ g_{ky}(x) \ 0]^T \quad (5-2)$$

ここに、 $g_{kx}(x)$, $g_{ky}(x)$ は荷重の部材座標成分を得るための確定関数であり、 $q_k(x)$ の部材座標軸に関する方向余弦が用いられる。

(5) 式より、 $F_{Yk}(x)$ は平均値が 0 で、自己相関関数

$$E[F_{Yk}(x_1) F_{Yk}^T(x_2)] = Q_{Yk} \delta(x_1 - x_2) \quad (6)$$

を有する正規性白色雑音過程ベクトルとなる。ここに、 $E[\]$ は集合平均の演算であり、 δ はディラックのデルタ関数である。また、 Q_{Yk} は外力ベクトルの共分散であり、荷重の変動強度を表す荷重強度行列である。なお、荷重が作用しない部材では、 $G_{Yk}(x) = 0$ のようにする。

2) 相関のある定常確率過程による荷重モデル

$\bar{k}$ 部材の外力ベクトル $F_{Yk}(x)$ は、任意のパワースペクトル密度を有する定常確率過程ベクトル $Z_k(x)$ と確定関数行列 $G_{YZk}(x)$ の積で表される非定常確率過程ベクトルとする⁽⁵⁾。なお式の表現において、部材座標で定義される量には下指標 k を付した。

$$F_{Yk}(x) = G_{YZk}(x) Z_k(x) \quad (7)$$

$Z_k(x)$ のパワースペクトル密度または自己相関関数が既知の場合は、 $Z_k(x)$ を白色雑音過程を入力とする線形微分方程式の定常解過程で近似的に表現することができ⁵⁾、次の荷重系の状態方程式を得る。

$$\frac{d}{dx} Z_k(x) = A_Z Z_k(x) + N_{Zk}(x) \quad (8)$$

ここで、 $N_{Zk}(x)$ は平均値が 0 で、次のような性質を有する正規性白色雑音過程ベクトルである。

$$E[N_{Zk}(x_1) N_{Zk}^T(x_2)] = Q_Z \delta(x_1 - x_2) \quad (9)$$

ここに、 Q_Z は荷重強度行列である。

(7) 式、(8) 式を構造系の状態方程式と組み合わせることによって構造物-荷重系の状態方程式が定式される。

さらに、 $Z_k(x)$ の共分散を $R_{Zk}(x)$ とすると、 $Z_k(x)$ に関する共分散方程式が導かれる⁽⁵⁾。

$$\frac{d}{dx} R_{Zk}(x) = A_Z R_{Zk}(x) + R_{Zk}(x) A_Z^T + Q_Z \quad (10)$$

ここで、 $Z_k(x)$ は定常確率過程であり、 $dR_{Zk}(x)/dx = 0$ となる。従って、(10) 式は次の連立方程式となり、 $R_{Zk}(x) = R_Z$ について解くことができる。

$$A_Z R_Z + R_Z A_Z^T + Q_Z = 0 \quad (11)$$

なお、ここで定義した A_Z , Q_Z , R_Z などの行列は、パワースペクトル密度または自己相関関数より決定されるが、具体的な計算は数値計算例に示す。

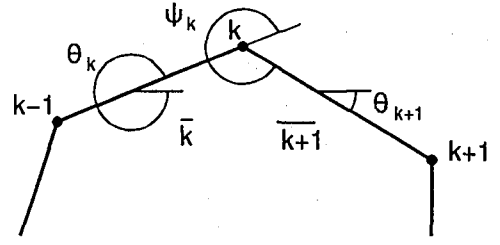


図-3 部材角の定義

3. 構造物-荷重系の状態空間表示

3.1 節点マトリックス

2つの部材が結合する節点において、構造系の変位の適合条件および力の釣合条件、さらに、荷重系の連続条件は満足されなければならない。このような要件を満たすものが節点マトリックスであり⁽¹²⁾⁽¹³⁾、節点マトリックスにより状態変数は部材間で伝達される。状態空間が2次元問題に拡張されたことにより、この節点マトリックスも、以下のように拡張される。

構造系の状態変数 $Y_k(x)$ と荷重系の状態変数 $Z_k(x)$ を合成して、第 $\bar{k}$ 部材の構造物-荷重系の状態変数を

$$X_k(x) = \begin{bmatrix} Y_k(x) \\ Z_k(x) \end{bmatrix} \quad (12)$$

で定義する。ただし、外力を白色雑音過程でモデル化する場合、 $Z_k(x)$ の項は不要となる。

図-3 に示すように、 $\varphi_k = \theta_k - \theta_{k+1}$ で定義される部材角の関係で、 $\bar{k}$ 部材と $\bar{k}+1$ 部材が剛接されているとする。状態変数は、 $\bar{k}$ 部材の終端 X_k^R より $\bar{k}+1$ 部材の始端 X_{k+1}^L に k 節点の節点行列 P_{Xk} により伝達される。

$$X_{k+1}^L = P_{Xk} X_k^R \quad (13)$$

この節点行列 P_{Xk} は、構造系の変位の適合条件、力の釣合条件、および荷重系の連続条件を満たすものであり、次のようなブロックより構成される。

$$P_{Xk} = \begin{bmatrix} P_{Yk} & 0_{6,d} \\ 0_{d,6} & I_d \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここに、 $0_{i,j}$ は $(i \times j)$ の 0 行列を表し、 I_j は j 次元の単位行列である。さらに、 d は荷重系の次元数を表しており、荷重を白色雑音過程でモデル化する場合 $d = 0$ である。また、 P_{Yk} は構造系の状態変数に関する節点マトリックスであり、次式のように表される。

$$P_{Yk} = \begin{bmatrix} C_k & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & C_k \end{bmatrix} \quad (15-1)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} \cos \varphi_k & -\sin \varphi_k & 0 \\ \sin \varphi_k & \cos \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15-2)$$

3.2 構造物-荷重系の状態方程式

2次元問題における状態方程式の表現および解過程の表現は、1次元問題におけるそれらに基本的に同一になる。ここでは、それらの概要について述べる。

構造系の状態方程式 (3) 式と荷重系の状態方程式 (8) 式および (7) 式より、 k 部材の構造物-荷重系の状態方程式は、

$$\frac{d}{dx} X_k(x) = A_{Xk}(x) X_k(x) + N_{Xk}(x) \quad (0 \leq x \leq l_k) \quad (16-1)$$

$$\text{境界条件: } X_k(0) = X_k^L, X_k(l_k) = X_k^R \quad (16-2)$$

のように、平均値 0 の白色雑音過程ベクトル $N_{Xk}(x)$ を入力とする確率微分方程式で表される。ここに、荷重を相関のある定常確率過程でモデル化する場合、

$$A_{Xk}(x) = \begin{bmatrix} A_{Yk}(x) & G_{YZk}(x) \\ 0_{d,6} & A_Z \end{bmatrix} \quad (17-1)$$

$$N_{Xk}(x) = \begin{bmatrix} 0_6 \\ N_{Zk}(x) \end{bmatrix} \quad (17-2)$$

さらに、

$$E[N_{Xk}(x_1) N_{Xk}^T(x_2)] = Q_{Xk} \delta(x_1 - x_2) \quad (18-1)$$

$$Q_{Xk} = \begin{bmatrix} 0_{6,6} & 0_{6,d} \\ 0_{d,6} & Q_Z \end{bmatrix} \quad (18-2)$$

のようになる。一方、白色雑音過程で荷重をモデル化する場合、(16) 式は (3) 式と同じになり、

$$A_{Xk}(x) = A_{Yk}(x) \quad (19-1)$$

$$N_{Xk}(x) = F_{Xk}(x) \quad (19-2)$$

$$Q_{Xk} = Q_{Yk} \quad (19-3)$$

のようになる。

ここで、構造物-荷重系の始端境界条件 X_0 と終端境界条件 X_e は

$$X_0 = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, X_e = \begin{bmatrix} Y_e \\ Z_e \end{bmatrix} \quad (20)$$

のように表されるものとする。 Y_0, Y_e は構造系の状態変数の境界条件であり、他方、相関のある荷重モデルにおいて、 Z_0, Z_e は荷重系 (8) 式の解の始端および終端における値である。

状態方程式 (16) 式の解は、 $k-1$ 節点の条件を用いると、

$$X_k(x) = \Phi_{Xk}(x, 0) X_k^L + \int_0^x \Phi_{Xk}(x, \lambda) N_{Xk}(\lambda) d\lambda \quad (21)$$

のようになる。さらに、始端境界条件 X_0 を用いたものに変形すると、

$$X_k(x) = \Phi_{Xk}(x, 0) \Lambda(k, 0) X_0 + \sum_{j=1}^k \left\{ \Phi_{Xk}(x, 0) \Lambda(k, j) \times \int_0^{l_j} \Phi_{Xj}(l_j, \lambda) N_{Xj}(\lambda) d\lambda \right\}$$

$$+ \int_0^x \Phi_{Xk}(x, \lambda) N_{Xk}(\lambda) d\lambda \quad (22)$$

となる。ここに、 $\Lambda(j, i)$ は、 i 部材終端より $j+1$ 部材始端へ状態変数を伝達する行列であり、次式で与えられる。

$$\Lambda(j, i) = P_{Xj} \Phi_{Xj}(l_j, 0) P_{Xj-1} \cdots \Phi_{Xi+1}(l_{i+1}, 0) P_{Xi} \quad (23)$$

また、 $\Phi_{Xk}(x_2, x_1)$ は $X_k(x)$ の状態遷移行列であり、

$$\frac{d}{dx} \Phi_{Xk}(x_2, x_1) = A_{Xk}(x) \Phi_{Xk}(x_2, x_1) \quad \Phi_{Xk}(x_1, x_1) = I_{6+d} \quad (24)$$

で定義される。さらに、相関のある荷重モデルにおいて、状態遷移行列 $\Phi_{Xk}(x_2, x_1)$ は

$$\Phi_{Xk}(x_2, x_1) = \begin{bmatrix} \Phi_{Yk}(x_2, x_1) & \Phi_{YZk}(x_2, x_1) \\ 0_{d,6} & \Phi_{Zk}(x_2, x_1) \end{bmatrix} \quad (25)$$

のように分割できる。なお、 $\Phi_{Yk}(x_2, x_1)$ は構造系の状態遷移行列であり、白色雑音過程の荷重モデルではこの項のみとなる。また、 $\Phi_{Zk}(x_2, x_1)$ は荷重系の状態遷移行列である。さらに、 $\Phi_{YZk}(x_2, x_1)$ は、荷重系に単位入力を加えたときの構造物系の応答より構成される行列である。

3.3 構造物-荷重系の境界条件

1次元問題においては、はり要素の4つの状態量に関して、左端で2個および右端で2個の境界条件を与えることにより、境界値問題の解が得られている⁽⁴⁾⁽⁸⁾。2次元問題では、構造系の状態量は6変数となり、境界条件も始端、終端のそれぞれに3条件必要となる。

構造系の始端では、 Y_0 の6変数は境界条件を規定することで3個の未知変数が定まる。これを始端境界ベクトル $\hat{Y}_0$ とする。他方、終端では、 Y_e の6変数は規定された境界条件に対して3変数は0となる。これを終端境界ベクトル $\hat{Y}_e$ とする。

これらの境界ベクトルを用いると、始端境界条件は、

$$Y_0 = B_Y \hat{Y}_0 \quad (26)$$

と表される。終端では、

$$B'_Y Y_e = \hat{Y}_e = 0_3 \quad (27)$$

となる。なお、 B_Y と B'_Y は、構造系の始端と終端の境界マトリックスであり、次のように定義される。

すなわち、始端境界マトリックスでは、始端状態変数の i 番目の未知量が j 成分の場合、 i 行 j 列を1とし、他を0とする。また、終端境界マトリックスでは、終端状態変数の i 番目の既知量が j 成分の場合、 i 列 j 行を1とし、他を0のようにする。

例として、境界条件を固定支点とした場合、

$$B_Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (28-1)$$

$$\mathbf{B}'_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28-2)$$

のように定義される。

これらの境界条件処理は、相関のある荷重モデルの場合、構造物-荷重系として処理される必要がある。構造物-荷重系では、始端と終端の境界ベクトルを、

$$\tilde{\mathbf{X}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_0 \\ \mathbf{Z}_0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}}_e = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_e \\ \mathbf{Z}_e \end{bmatrix} \quad (29)$$

で定義する。さらに、境界マトリックスを用いて、始端と終端ベクトル $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_e$ を

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}_X \tilde{\mathbf{X}}_0 \quad (30-1)$$

$$\mathbf{B}'_X \mathbf{X}_e = \tilde{\mathbf{X}}_e \quad (30-2)$$

のように表す。ここに、始端と終端の境界マトリックスは次式のようなブロックから構成される。

$$\mathbf{B}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_Y & \mathbf{0}_{6,d} \\ \mathbf{0}_{d,3} & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \quad (31-1)$$

$$\mathbf{B}'_X = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_Y & \mathbf{0}_{3,d} \\ \mathbf{0}_{d,6} & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \quad (31-2)$$

4. 不規則応答解析

4.1 共分散方程式

前章までの理論により、2次元の直列型剛接構造系に関する、1次元問題と同じ表現の定式が得られた。この定式を用いることで、不規則応答解析は1次元問題における解析手法が適用可能となる。従って、ここでは、共分散方程式の定式化およびその解法についての概要を示す。

応答 $\mathbf{X}(x)$ は平均値回りの変動のみを考えているので、応答の共分散 $\mathbf{R}_X(x)$ は、 $E[\mathbf{X}(x)\mathbf{X}^T(x)]$ で定義される。 $\bar{k}$ 部材の $\mathbf{R}_{Xk}(x)$ は、

$$\mathbf{R}_{Xk}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Yk}(x) & \mathbf{R}_{YZk}(x) \\ \mathbf{R}_{ZYk}(x) & \mathbf{R}_Z \end{bmatrix} \quad (32)$$

のようなブロックより構成される。 $\mathbf{R}_Z$ は (8) 式で与えられる荷重系の定常応答 $\mathbf{Z}_k(x)$ の共分散である。ただし、荷重を白色雑音過程でモデル化した場合には、 $\mathbf{R}_{Yk}(x)$ の項のみとなる。本論文の目的である、構造系の応答の共分散は、 $\mathbf{R}_{Yk}(x)$ より求めることができる。

応答過程の共分散 $\mathbf{R}_{Xk}(x)$ は、状態変数 $\mathbf{X}_k(x)$ と同じく、節点においては、節点行列により伝達される。 $\bar{k}$ 部材終端の共分散を $\mathbf{R}_{Xk}^R$ 、 $\bar{k}+1$ 部材始端の共分散を $\mathbf{R}_{Xk+1}^L$ とすると、 k 節点の節点マトリックスを用いて、

$$\mathbf{R}_{Xk+1}^L = \mathbf{P}_{Xk} \mathbf{R}_{Xk}^R \mathbf{P}_{Xk}^T \quad (33)$$

のように伝達される。

この $\bar{k}$ 部材の共分散 $\mathbf{R}_{Xk}(x)$ の空間的变化は、応答の解過程 (22) 式を共分散の定義に代入し、白色雑音過程ベクトルの性質を用いて積分を実行した後、若干の式の変形を加

えることにより、次式の共分散方程式として与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \mathbf{R}_{Xk}(x) &= \mathbf{A}_{Xk}(x) \mathbf{R}_{Xk}(x) + \mathbf{R}_{Xk}(x) \mathbf{A}_{Xk}^T(x) \\ &+ E[\mathbf{N}_{Xk}(x) \mathbf{X}_0^T] \Lambda^T(k, 0) \Phi_{Xk}^T(x, 0) \\ &+ \Phi_{Xk}(x, 0) \Lambda(k, 0) E[\mathbf{X}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)] \\ &+ \mathbf{Q}_X \end{aligned} \quad (34-1)$$

$$\text{境界条件: } \mathbf{R}_{Xk}^L = \mathbf{P}_{Xk-1} \mathbf{R}_{Xk-1}^R \mathbf{P}_{Xk-1}^T \quad (34-2)$$

また、構造物-荷重系の始端と終端の境界条件の共分散は、

$$\mathbf{R}_{X0} = E[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0^T], \quad \mathbf{R}_{Xe} = E[\mathbf{X}_e \mathbf{X}_e^T] \quad (35)$$

である。

(34) 式の共分散方程式において、始端境界条件の共分散 $\mathbf{R}_{X0}$ が求められ、さらに、 $E[\mathbf{X}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)]$ およびこれらの転置行列である $E[\mathbf{N}_{Xk}(x) \mathbf{X}_0^T]$ が得られると、この方程式は、微分方程式の数値解法により解くことができる。

4.2 境界条件の処理

(34) 式の共分散方程式は、境界値問題になっており、これを解くために初期値問題への変換を行う。

1) $E[\mathbf{X}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)]$ の誘導

応答の解過程 $\mathbf{X}(x)$ の終端における値は、(22) 式を $\bar{k}$ 部材に適用し $x = l_e$ とすることで得る。この式に、右側より $\bar{k}$ 部材で定義された白色雑音 $\mathbf{N}_{Xk}(x)$ をかけて、白色雑音過程の性質 (18) 式を用いて積分を実行し、さらに、境界条件 (30) 式の関係を用いると、次式の間係を得る。

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathbf{X}}_e \mathbf{N}_{Xk}^T(x)] &= \mathbf{B}'_X \Lambda(s, 0) \mathbf{B}_X E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)] \\ &+ \mathbf{B}'_X \Lambda(s, k+1) \Phi_{Xk}(x, l_k) \mathbf{Q}_{Xk} \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、 $E[\tilde{\mathbf{X}}_e \mathbf{N}_{Xk}^T(x)]$ および $E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)]$ は、構造系と荷重系に関して分割され 2×2 の4つのブロックになる。このブロックの内荷重系の初期条件と外力は独立であること、また、構造系の外力項は0であること、さらに、構造系の終端境界条件を用いることにより、 $E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)]$ は構造系の始端未知量と荷重系の外力項の相関を未知数とする連立方程式として解くことができる。従って、

$$E[\mathbf{X}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)] = \mathbf{B}_X E[\tilde{\mathbf{X}}_0 \mathbf{N}_{Xk}^T(x)] \quad (37)$$

を得る。

2) $\mathbf{R}_{X0}$ の誘導

終端境界の共分散 $\mathbf{R}_{Xe}$ は始端境界の共分散 $\mathbf{R}_{X0}$ と全区間の荷重項 $\mathbf{P}_{Xe}$ によって、

$$\mathbf{R}_{Xe} = \Lambda(s, 0) \mathbf{R}_{X0} \Lambda^T(s, 0) + \mathbf{P}_{Xe} \quad (38)$$

のように表すことができる。 $\mathbf{P}_{Xe}$ は共分散方程式 (34) 式において初期条件を $\mathbf{R}_{X0} = 0$ のようにしたときの終端での解として計算できる。

さらに、(38) 式の各マトリックスは、構造系と荷重系に関して分割され、 2×2 の4つのブロックになり、(38) 式も4つの式に分割される。その分割された式に、境界条件 (26), (27) 式を用いると (38) 式は連立方程式として解くことができ、これにより $\mathbf{R}_{X0}$ を得る。

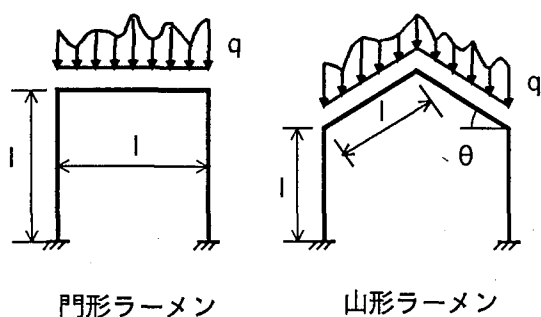


図-4 構造モデル

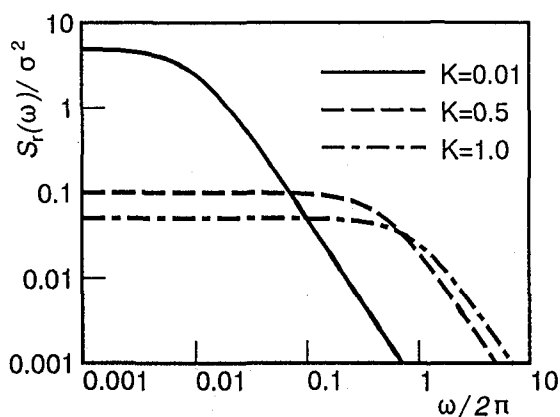


図-5 相関のある荷重のパワースペクトル密度

5. 数値計算と考察

5.1 解析モデルについて

不規則荷重を受ける直列型剛接構造の実際の構造物への適用としては、積雪荷重を受ける1層の建屋などが考えられる。しかし、本論文においては、解析理論と手法の提案を目的としているため、基本的な構造モデルを考えている。また、2次元問題の特徴である、部材角および荷重方向の取扱いを検証できるような解析モデルを採用した。

そこで、図-4 に示すような、はり部材に鉛直方向不規則分布荷重を受ける柱脚固定の門形ラーメンおよび山形ラーメンを解析モデルとした。また、荷重は白色雑音過程および、指数関数形の自己相関関数を有する確率過程でモデル化した。

なお、数値計算においては、状態変数は無次元化して解析を行い、不規則分布荷重の強度は、一様分布荷重強度 p および基準部材長 l により $\sigma^2 l / p^2 = 1$ に規定した。また、軸方向変形が小さくなるように、 $EA/EI = 1000$ のような一定値とした。

指数関数形の自己相関関数の場合、不規則分布荷重の自己相関関数 $R_r(\lambda)$ およびパワースペクトル密度関数 $S_r(\omega)$

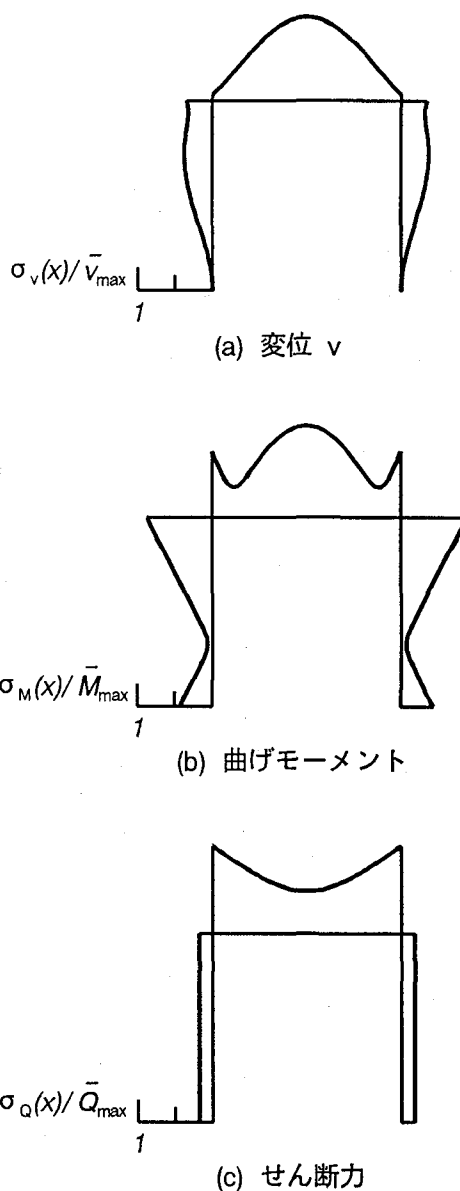


図-6 白色雑音過程でモデル化された荷重を受ける門形ラーメンの応答の標準偏差

は次式である。

$$R_r(\lambda) = \sigma^2 e^{-\Omega|\lambda|} \quad (39)$$

$$S_r(\omega) = \frac{\sigma^2 \Omega}{\pi(\Omega^2 + \omega^2)} \quad (40)$$

このとき、荷重系の次元数は $d = 1$ であり、係数行列などは以下のように与えられる。

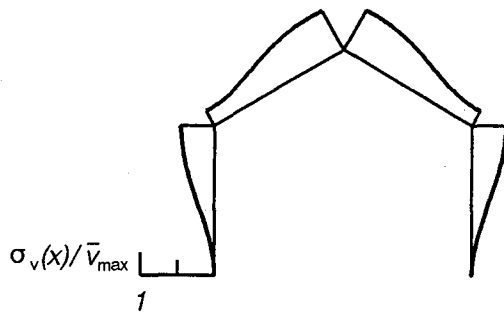
$$A_Z = [-\Omega] \quad (41-1)$$

$$G_{YZk} = [0 \ 0 \ 0 \ -g_{kx}\sqrt{2\Omega} \ -g_{ky}\sqrt{2\Omega} \ 0]^T \quad (41-2)$$

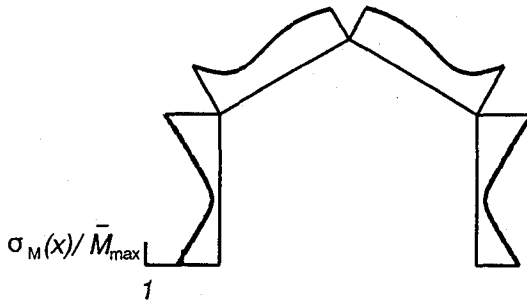
$$Q_Z = [\sigma^2] \quad (41-3)$$

$$\Phi_Z(x_1, x_2) = [e^{-\Omega|x_1 - x_2|}] \quad (41-4)$$

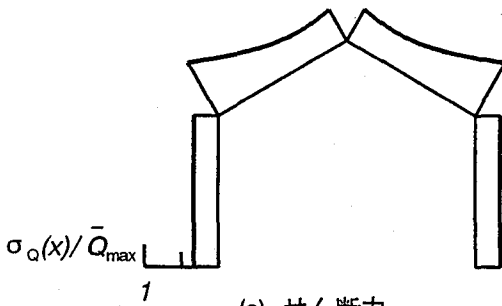
$$R_Z = [\sigma^2 / 2\Omega] \quad (41-5)$$



(a) 変位 v

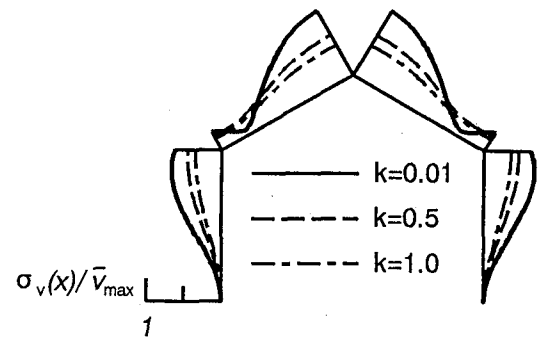


(b) 曲げモーメント

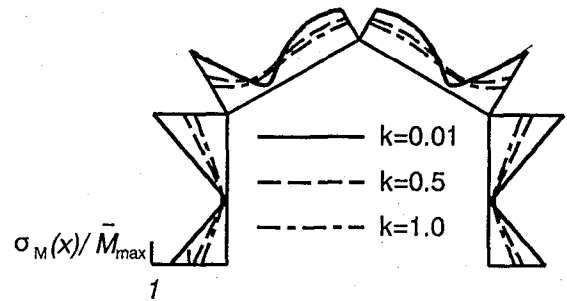


(c) せん断力

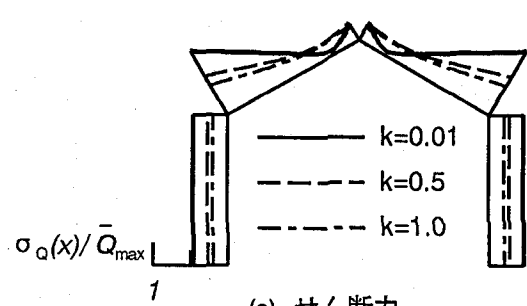
図-7 白色雑音過程でモデル化された荷重を受ける山形ラーメンの応答の標準偏差



(a) 変位 v



(b) 曲げモーメント



(c) せん断力

図-8 指数関数型の相関関数でモデル化された荷重を受ける山形ラーメンの応答の標準偏差

ここで、 g_{kx} 、 g_{ky} は前述の鉛直荷重の部材座標軸に関する成分である。

このような荷重モデルについて、荷重の空間的な相関の程度を表す、波数パラメータ $k = \Omega/2\pi l$ を種々変化させた解析を行った。図-5 に解析に用いた荷重モデルのパワースペクトル密度関数を示す。

また、より一般的なパワースペクトルを有する荷重については荷重モデルに対するフィルター方程式を用いることで同じ手順の解析が可能である⁽⁵⁾。

なお、以下に示す解析結果の図において、それぞれの応答の標準偏差は、一様分布荷重 p が作用する場合における、それぞれの構造の応答の最大値 $\bar{v}_{max}$ 、 $\bar{M}_{max}$ および

$\bar{Q}_{max}$ で規準化している。

5.2 門形ラーメンの解析

図-6 は、白色雑音過程でモデル化された不規則荷重を受ける門形ラーメンの解析結果である。図(a)は部材垂直方向の変位応答の標準偏差である。変位応答は柱脚で確率1で0となり、変動しないことを示している。また、はり中央で応答の標準偏差は最大となっている。さらに、はり柱の接合節点では座標変換により不連続となり、はり両端の応答の標準偏差は小さく、柱頭においては大きな値を示している。図(b)は曲げモーメント応答の標準偏差であり、柱頭およびはり中央で大きな値となり、はり中央で最

大値となっている。また、はりと柱の接合節点で応答の標準偏差は連続しており、一様分布荷重 p が作用する確定論の解析で 0 となる位置において極小値となるが、確率 1 で 0 となる点はない。図(c)はせん断力応答の標準偏差である。荷重が変動するためにせん断力は確率 1 で 0 となる点はない。また、はり中央で極少となっている。さらに、荷重の作用しない柱のせん断力応答の標準偏差は変化しない。

5.3 山形ラーメンの解析

図-7 に白色雑音過程でモデル化された不規則荷重を受ける山形ラーメンの解析結果を示す。応答の標準偏差の形状は門形ラーメンの場合と同じような傾向を示している。しかし、荷重が部材に対して傾いているため、応答の標準偏差の最大値は多少小さくなっている。また、図(a)の部材垂直方向の変位応答の標準偏差において、はりの柱側端部の値が門形ラーメンにおける結果と比べて大きくなり、さらに、図(b)のモーメント応答の標準偏差において、門形ラーメンでははり中央の値が最大を示していたが、山形ラーメンでは山形の頂部と柱頭の値はあまり変わらなくなっている。

図-8 は、指数関数形の自己相関関数を有する確率過程でモデル化した不規則荷重を受ける山形ラーメンの解析結果である。図は荷重モデルのスペクトルパラメータを $k = 0.01, k = 0.5, k = 1.0$ と変化させたときの応答の標準偏差を示している。 $k \rightarrow 0$ とすると、等分布荷重の強度が不規則に変化する応答に漸近し、応答の標準偏差の最大値は 1 に近づく。一方、 $k \rightarrow \infty$ とすると、荷重を白色雑音過程でモデル化した場合の応答形状に漸近する。図より、 k の変化により応答の標準偏差形状が、変動する等分布荷重を受ける場合の形状から最も複雑な荷重である白色雑音を受ける場合の形状へと、連続的に移行する状況が理解できる。このとき、パラメータ k の値にかかわらず荷重のパワーを一定としているため、応答の標準偏差値は低下している。

6. おわりに

本論文は、著者らが提案している不規則分布荷重を受ける 1 次元構造系の確率伝達マトリックス法による解法を拡張し、2 次元問題である直列型剛接構造系の解法を提案したものである。本解法には、次のような特徴がある。

- (a) 境界行列および節点行列を変更するだけで、どのような直列型剛接構造系に対しても適用が可能である。
- (b) 荷重系の係数行列を変更するだけで、任意の空間的相関のある荷重に対して適用可能である。
- (c) 数値解析に適した算法になっているために、計算機が有効に活用できる。

本論文では、状態変数の定義、節点および境界マトリックスの定義、そして、構造物-荷重系としての取扱いと状態変数の共分散を未知数とした場合の処理について説明した。本研究で得られた結果を要約すると、次のようになる。

(1) 直列型剛接構造系の解法において、構造要素の状態変数は 2 次元問題を表現できるよう拡張した。さらに、不規則荷重を線形微分方程式の解過程で表すことにより、拡大した状態変数を定義した。

(2) 節点における変位の適合条件、力の釣合条件を節点マトリックスで表現することにより、不規則分布荷重を受ける直列型剛接構造系の挙動を伊藤型の確率微分方程式で定式化した。

(3) 伊藤型の確率微分方程式に対応する共分散方程式の解法を示し、不規則分布荷重を受ける直列型剛接構造系の解析手法を提案した。

(4) 本解法を、白色雑音過程あるいは指数関数形の自己相関関数を有する確率過程でモデル化した分布荷重を受ける門形ラーメンおよび山形ラーメンに適用し、その有効性を確認した。さらに、得られた応答の特性について若干の考察を加えた。

今後の課題として、本解法の一般的な 2 次元問題への拡張や信頼性解析への応用を検討している。

なお本研究の計算は、マトリックス演算ソフトウェア MATLAB を用いて行ったことを付記する。

参考文献

- 1) 白木渡, 高岡宣善, 松保重之, 山本克之: 都市高速道路高架橋における渋滞時活荷重のモデル化, 土木学会論文集, No. 362/I-4, pp.239-248, 1985 年 10 月。
- 2) H.O.Madsen, S.krenk and N.C.Lind: *Method of Structural Safety*, Prentice-Hall, Inc., 1986.
- 3) 白木渡, 松保重之, 山本克之, 高岡宣善: 道路橋における 2 径間連続主桁の信頼性解析, 土木学会論文集, No. 368/I-5, pp.225-234, 1986 年 4 月。
- 4) 岡林隆敏: 不規則な分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第 316 号, pp.11-21, 1981 年 12 月。
- 5) 岡林隆敏, 浦川剛, 吉田啓三: 相関のある不規則分布荷重を受けるはりの解析, 土木学会論文報告集, 第 341 号, pp.155-162, 1984 年 1 月。
- 6) 岡林隆敏, 花井正美, 吉田啓三: 不規則分布荷重を受けるアーチ部材の分散・共分散解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 423 号, pp.97-104, 1991 年 5 月。
- 7) 岡林隆敏, 河角省治, 吉田啓三, 生田泰清: 不規則な初期たわみを有する柱の確率論的解析, 構造工学論文集, Vol.40A, pp.645-655, 1994 年 3 月。
- 8) 岡林隆敏, 河角省治, 吉田啓三: 不規則分布荷重を受ける連続ばりの分散・共分散解析, 土木学会学論文集, No. 525/I-33, pp.117-126, 1995 年 10 月。
- 9) 河角省治, 岡林隆敏, 崎山毅: 数式処理プログラムによる不規則構造解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.597-604, 1995 年 3 月。
- 10) 河角省治, 岡林隆敏, 崎山毅: マトリックス演算ソフトウェア MATLAB による不規則分布荷重を受ける構

造系の解析, 第19回構造工学における数値解析シン
ポジウム論文集, pp.327-332, 1995年7月.

11) 小松定夫: 構造解析II, 丸善株式会社, 1982年10月.

12) 成岡昌夫, 遠田良喜: 伝達マトリックス法(コンピュ
ータによる構造工学講座), 倍風館, 1975年3月.

13) 大地洋三: マトリックス構造解析, コロナ社, 1979年8
月.

(1995年9月18日 受付)