

塑性解析における線形計画法の縮約解法

COMPACT PROCEDURE OF LINEAR PROGRAMMING FOR PLASTIC ANALYSIS

香月 智*, 別府万寿博**

Satoshi KATSUKI, and Masuhiro BEPPU

*工博 防衛大学校助教授 土木工学教室 (〒239 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

** 防衛大学校研究科学生 土木工学教室 (〒239 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

This paper presents a new compact procedure of the linear programming problem to solve the plastic analysis of the framed structures. The proposed method decomposes the static approach of the plastic analysis into three processes. One is the procedure to solve the indeterminate simultaneous linear equation made of both the equilibrium condition and the active yield conditions. The second is the distinguish method of new active yield condition. The other is the distinguish method of the true plastic collapse mechanism based on Kuhn-Tucker condition. The three bar truss and the rigid frame structures are solved by using the proposed method as numerical examples.

Key Words: compact procedure, linear programming, plastic analysis, framed structure.

1. 緒言

塑性解析には、上界定理と下界定理に基づく解析手法があるが、それぞれ内力仕事の最小化または外力仕事の最大化問題であるため、最適化手法を用いて解析が行われる。中でも、降伏条件式が線形化関数によって与えられる場合には、線形計画法問題として定式化が可能であり、LP (リニアプログラミング) サブルーチンを使用することによって、煩雑な処理をさけて良好な解が得られる¹⁾。このため、多くの骨組構造物の崩壊荷重解析²⁾や粒状体解析³⁾などで線形計画法による塑性解析が用いられている。しかし、線形計画法を用いた塑性解析は、非常に大きなマトリクス計算を行うため、システムの記憶容量の制約や計算効率上の問題点がある。このため Livesley⁴⁾は、縮約化した塑性解析手法 (Compact Procedure) を提案している。この方法は、全降伏条件式の中からアクティブな降伏条件式を逐次を選定する手法によって、力の釣合条件とアクティブな降伏条件式だけの小さな線形計画問題を逐次に解析し、最終的に崩壊荷重およびそのメカニズムを得るものである。しかし、この方法は単一内力による降伏条件式にしか適用できないため、曲げと軸力によるインターアクションを考慮した場合などの複合内力の降伏条件式を用いた塑性解析に適用することはできなかった。そこで本研究は、複合内力の降伏条件式にも適用可能な縮約化された塑性解析手法を開発提案するものである。すなわちその方法は、下界定理による塑性解析の基本式を原問題として、釣合条件式と選別

されたアクティブな降伏条件式を用いて、基底連立一次方程式を作り、これを用いて逐次にアクティブな降伏条件式を検索しながら、最終的に崩壊荷重を求めるものである。本研究では、提案する手法の基本式を誘導するとともに、得られた基本式の意義についてホロノミック弾塑性解析の基本式と比較して、その基本式の意義について考察した。また、提案手法の妥当性を検証するために曲げと軸力を考慮した門形ラーメンの塑性解析を行い、従来用いられた線形計画法による塑性解析の結果と比較考察した。最後に、立体鋼製砂防ダムの解析を行い、その適用性を検討した。

2. 線形計画法による塑性解析の基本式

下界定理 (Static Approach) による骨組構造物の塑性解析の基本式は、図-1のような線形近似化された降伏関数を用いることによって、以下のような線形計画問題として表される^{1,5)}。

$$\text{Given} : \mathbf{C}^T, \mathbf{F}, \mathbf{N}^T, \mathbf{R} \quad (1-a)$$

$$\text{Unknown: } \mathbf{Q}, \alpha \quad (1-b)$$

$$\text{Objective: } \alpha \rightarrow \text{maximum} \quad (1-c)$$

$$\text{Subject to: } \mathbf{C}^T \mathbf{Q} - \alpha \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1-d)$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{Q} \leq \mathbf{R} \quad (1-e)$$

$$\alpha \geq 0 \quad (1-f)$$

$$-\infty \leq \mathbf{Q} \leq \infty \quad (1-g)$$

ここで、 $\mathbf{C}^T$: 釣合マトリクス、 $\mathbf{F}$: 節点外力ベクト

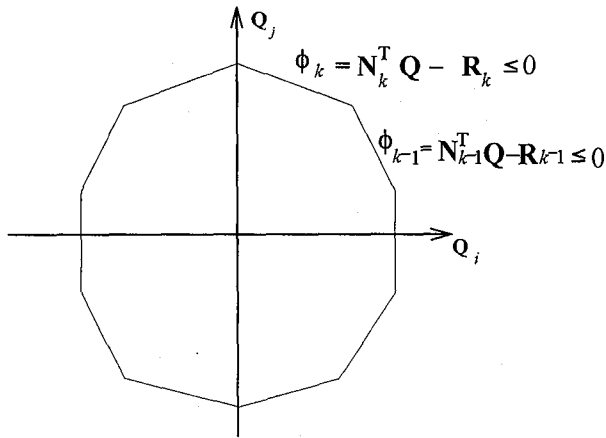


図-1 線形化降伏条件式

ル、 N^T ：降伏条件式の係数マトリクス、 R ：塑性容量ベクトル、 Q ：要素内力ベクトル、 α ：荷重係数であり、式(1-d)および式(1-e)は、それぞれ構造物の力の釣合条件および部材断面の降伏条件を表す。

すなわち、式(1)を線形計画法を用いて解けば、煩雑な計算手順を要することなく塑性崩壊荷重 α_{max} および崩壊メカニズムにおける内力が得られる。図-2に下界定理によるシンプレックス法⁷⁾を示す。ここでは、内力 Q が非負条件を満足しないため、非負な二つの変数ベクトル Q^+ 、 Q^- を用いること、および式(1-e)に対してスラック変数 S が必要なため、計算時に大きなマトリクス容量を要することがわかる。この左辺側にある係数マトリクスのサイズ M_s は、次のようになる。

$$M_s = (2 \times m + k + 1) \times (1 + n + k) \quad (2)$$

ここで、 m ：内力ベクトル Q のサイズ、 k ：降伏条件式の数、 n ：外力ベクトル F のサイズ。よって、①大規模な構造物を解く場合(m, n が大)、②非線形な降伏関数を細かく線形化する場合(k が大)には、計算のマトリクスサイズが大きくなる。このため、線形計画法の計算効率が低下するのみでなく、システムの制限によっては記憶領域確保が困難になる場合もある。

この問題解決の一方法として、上界定理(Kinematic Approach)による塑性解析を用いる場合がある。その基本式は、下界定理と同様に線形計画問題となり次のように表される。

$$\text{Given} : C, F, N, R \quad (3-a)$$

$$\text{Unknown: } \dot{u}, \dot{\lambda} \quad (3-b)$$

$$\text{Objective: } R^T \dot{\lambda} \rightarrow \text{minimum} \quad (3-c)$$

$$\text{Subject to: } C\dot{u} - N\dot{\lambda} = 0 \quad (3-d)$$

$$F^T \dot{u} = 1.0 \quad (3-e)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (3-f)$$

$$-\infty \leq \dot{u} \leq \infty \quad (3-g)$$

ここで、 C ：変形適合マトリクス、 N ：降伏条件式に対する単位外向法線マトリクス、 $\dot{u}$ ：節点変位速度ベクトル、 $\dot{\lambda}$ ：塑性乗数速度ベクトルであり、式(3-d)は、崩壊メカニズムにおける構造物の変形適合条件を、式

変数	Q^+	Q^-	α	s	右辺項	行サイズ
目的関数	0	0	1.0	0	*	1
制約条件	C^T	$-C^T$	F	0	0	n
	N^T	$-N^T$	0	I	R	k
列サイズ	m	m	1	k		

図-2 下界定理のシンプレックス法⁷⁾およびマトリクスサイズ

変数	$\dot{u}^+$	$\dot{u}^-$	$\dot{\lambda}$	右辺項	行サイズ
目的関数	0	0	R^T	*	1
制約条件	C	$-C$	$-N$	0	m
	F^T	$-F^T$	0	1.0	1
列サイズ	n	n	k		

図-3 上界定理のシンプレックス法⁷⁾およびマトリクスサイズ

(3-e)はメカニズムの仕事率を単位量(1.0)とする条件を表し、式(3-c)は塑性変形による内力仕事を最小とする目的関数を与えている。この上界定理による基本式は、下界定理による基本式と数値計画法における双対問題となっているため、二つの解は、裏と表の変数間で一致する。この上界定理に基づく、線形計画問題のシンプレックス法⁷⁾を図-3に示す。上界定理では不等式によるスラック変数が不要なため、係数マトリクスサイズの低減がはかられ、そのサイズ M_k は、次式によって与えられる。

$$M_k = (2 \times n + k) \times (m + 2) \quad (4)$$

3. 提案手法の基本式および計算手順

前項では、上界定理を用いるとマトリクスサイズの低減を図ることができることを示した。ところで、降伏条件式は部材断面ごとに作られるので、その係数マトリクス N^T は、要素を多く含む帯状マトリクスとなる。この帯状マトリクスの性質を利用して、降伏条件式と釣合条件式を分離して解き、記憶領域を縮約化して解く手法が、Livesley⁴⁾によって提案されている。しかし、この手法はトラスやはりなどの単一内力に関する降伏条件(ある一列のみに非零係数が現れる)のみにしか適用できず、曲げと軸力など複合内力のインターアクションを考慮した降伏条件式(複数の列に非零係数が現れる)には、適用することができなかった。

3. 1 基底連立一次方程式

提案する手法は、下界定理による解析基本式を原問題として、全降伏条件式の中から、逐次にアクティブな降伏条件式を選別して、段階的に荷重係数の最大化を図り、最終的に崩壊荷重係数を得るものである。

ある計算段階で、式(1-e)の降伏条件式がアクティブである降伏条件式(等号条件)と、非アクティブな降伏条件式(不等号条件)とに選別され、それぞれの式を次のように表すものとする。

$$\mathbf{N}_A^T \mathbf{Q} = \mathbf{R}_A \quad (5)$$

$$\mathbf{N}_I^T \mathbf{Q} \leq \mathbf{R}_I \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{N}_A^T$ 、 $\mathbf{N}_I^T$ ：それぞれアクティブ、非アクティブな降伏条件式の係数マトリクス、 $\mathbf{R}_A$ 、 $\mathbf{R}_I$ ：それぞれアクティブ、非アクティブな降伏条件式の塑性容量ベクトル。

さらに、式(1-d)の釣合条件式の外力に関する項を移項して、次式のように表す。

$$\mathbf{C}^T \mathbf{Q} = \alpha \mathbf{F} \quad (7)$$

よって、原問題は、式(5)と式(7)の等号条件を満足しながら、式(6)の不等式によって形成される許容領域内で、荷重係数を最大化する問題となる。

式(5)と(7)は、連立一次方程式であるが、式の数に対して未知数（ $\mathbf{Q}$ ベクトルの数）が多い不定な連立一次方程式であり、一義的な解を得ることができない。そこで、連立解集合の中からある一義な解を与えるために、「式(5)、(7)を満足する解の中で座標原点（ $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ ）からの距離が最も小さくなる点における解」を求めるものとする。この定義に基づくと、解は係数行ベクトルの一次結合によって与えられる。すなわち、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}\beta_C + \mathbf{N}_A\beta_N \quad (8)$$

ここで、 β_C 、 β_N ：それぞれマトリクス $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{N}_A$ に関する一次結合の係数ベクトル。これを、式(5)、(7)に代入すると、

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C}\beta_C + \mathbf{C}^T \mathbf{N}_A\beta_N = \alpha \mathbf{F} \quad (9)$$

$$\mathbf{N}_A^T \mathbf{C}\beta_C + \mathbf{N}_A^T \mathbf{N}_A\beta_N = \mathbf{R}_A \quad (10)$$

式(9)、(10)は、任意の荷重係数 α に対して、未知数と式の数が等しい連立一次方程式の形となる。本研究ではこれを基底連立一次方程式と呼ぶ。基底連立一次方程式には、①係数マトリクスが正則で解が得られる場合と、②係数マトリクスが特異行列であり解が得られない場合とがある。この二つの条件により処理が異なり、それぞれについて以下に述べる。

3. 2 基底連立一次方程式に解が存在する場合

選ばれたアクティブな降伏条件の組み合わせは、崩壊荷重に達しておらず解の改良の余地がある。式(9)、(10)の係数マトリクスに逆行列が存在するため、その連立解を次式のように表す。

$$\begin{bmatrix} \beta_C \\ \beta_N \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \beta_C^\alpha \\ \beta_N^\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_C^R \\ \beta_N^R \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 β_C^α 、 β_N^α 、 β_C^R 、 β_N^R の肩字 α 、 $\mathbf{R}$ は、それぞれ解の荷重係数に比例する部分と定数部分を表し、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \beta_C^\alpha \\ \beta_N^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{N}_A \\ \mathbf{N}_A^T \mathbf{C} & \mathbf{N}_A^T \mathbf{N}_A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_C^R \\ \beta_N^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{N}_A \\ \mathbf{N}_A^T \mathbf{C} & \mathbf{N}_A^T \mathbf{N}_A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_A \end{bmatrix} \quad (13)$$

式(11)の解を、式(8)に代入して、基底解の内力を次のように表す。

$$\mathbf{Q} = \alpha \mathbf{Q}^\alpha + \mathbf{Q}^R \quad (14)$$

式(14)の解は、釣合条件とアクティブな降伏条件式を任意の荷重係数 α に対して満足するので、これを式(6)に代入することによって、原問題の基本式は次のように修正される。

$$\text{Given} : \mathbf{N}_I^T, \mathbf{Q}^\alpha, \mathbf{Q}^R, \mathbf{R}_I \quad (15-a)$$

$$\text{Unknown: } \alpha \quad (15-b)$$

$$\text{Objective: } \alpha \rightarrow \text{maximum} \quad (15-c)$$

$$\text{Subject to: } \alpha \mathbf{N}_I^T \mathbf{Q}^\alpha \leq \mathbf{R}_I - \mathbf{N}_I^T \mathbf{Q}^R \quad (15-d)$$

$$\alpha \geq 0 \quad (15-e)$$

これは、非負の荷重係数 α のみを未知数とする最大化問題であるので、次式によって数値計画ツールを用いることなく簡易に解が与えられる。

$$\alpha = \min_i \alpha_i \quad (\alpha_i \geq 0) \quad (16)$$

ここで、 α_i は式(15)において単一の降伏条件式 i のみを与えた場合に得られる解（最大値）であり、線形の降伏関数では、次式によって求められる。

$$\alpha_i = (\mathbf{R}_I - \mathbf{N}_I^T \mathbf{Q}^R)_i / (\mathbf{N}_I^T \mathbf{Q}^\alpha)_i \quad (17)$$

式(16)による解によって選ばれたアクティブな降伏条件式は、現段階において式(6)に属していたが、これを新たに式(5)のアクティブな降伏条件式に加えて解析を行うと、凸空間の許容領域では解の改良がなされる。よって、次段階の解析は、式(5)、(6)の組み合わせを変更して行われる。すなわち、式(16)は式(5)(6)の選別判定式となる。

3. 3 基底連立一次方程式に解が存在しない場合

この場合、①真の崩壊荷重である場合と、②真の崩壊荷重にいたる計算過程の不定解の可能性があり、その判定は、Kuhn-Tucker条件によって行われる。すなわち、最後に用いたアクティブな降伏条件の係数ベクトル $\mathbf{N}_A$ が、変形適合マトリクス $\mathbf{C}$ と一次従属関係にあるので、一義的な解を得られない。そこで上界定理で用いた単位仕事率の条件を加えて解析することによって、Kuhn-Tucker条件を調べることができる。すなわち、

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{N}_A \dot{\lambda} = \mathbf{0} \quad (18)$$

$$\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{u}} = 1.0 \quad (19)$$

ここで、式(18)、(19)の連立解で得られる $\dot{\lambda}$ は、塑性乗数速度ベクトルであるとともに、Kuhn-Tucker条件におけるラグランジュ乗数を表している。よって、得られた解が塑性崩壊荷重である場合には、全ての $\dot{\lambda}$ は正值でなければならない。

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (20)$$

すなわち、式(20)が満足されれば、解析を終了し、そ

のときの崩壊モードにおける変形速度 $\dot{\mathbf{q}}$ が次式のように与えられる。

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}_A \dot{\lambda} \quad (21)$$

式(20)が満足されない場合には、負の塑性速度乗数 $\dot{\lambda}_k \leq 0$ に対応する k 番目の降伏条件式を、非アクティブな降伏条件に復帰させることによって、解析を繰り返す。

3. 4 マトリクスサイズ

提案する解析手法では、基底連立一次方程式を解くためのマトリクスサイズが最大領域を占有し、その最大値 M_c は、次式によって与えられる。

$$M_c = m \times m \quad (22)$$

このサイズは、明らかに前述の(2)、(4)で示した線形計画法による所要マトリクスサイズよりも小さい。本法では、式(17)において $(\mathbf{N}_1^T)_i$ ベクトルを用いるが、実際には降伏条件式の i 行目が関与する内力ベクトル要素とその係数のみを必要とするため記憶領域は縮約できる。

3. 5 解析手順

以上の基本式を用いた解析手順を、図-4に示す。すなわち、

- ① まず、第一段階として全ての降伏条件式を非アクティブなものとして、基底連立一次方程式を作る。
- ② 得られた解を用いて、アクティブな降伏条件式を一つ選ぶ
- ③ 降伏条件式をアクティブと非アクティブに選別する。
- ④ 基底連立一次方程式の係数行列の特異性をチェックする。
- ⑤ 正則であれば、連立方程式を解き、新たにアクティブな降伏条件式を選択し、③からの手順を繰り返す。
- ⑥ 特異行列である場合、Kuhn-Tucker条件を調べ、成立すれば崩壊荷重および崩壊荷重に対する内力ベクトル、変位速度ベクトル、および変形速度ベクトルを求めて解析を終了する。
- ⑦ Kuhn-Tucker条件が成立しない場合には、負の塑性乗数に対応する降伏条件式を非アクティブな降伏条件式に戻して、③からの手順を繰り返す。

4. 提案手法とホロノミック弾塑性解析の比較

前述の基底連立一次方程式は、「釣合条件式とアクティブな降伏条件式を満足する解の中で、座標原点から最短距離となる点を解とする」という仮定に基づいて誘導された。ここでは、この基本式をホロノミック弾塑性解析⁶⁾と比較して、基底連立一次方程式の未知変数 β_C, β_N が持つ物理的意義について考察する。

ホロノミック弾塑性解析は、全変形理論に基づき、その基本条件式は以下になる。

$$\mathbf{C}^T \mathbf{Q} = \alpha \mathbf{F} \quad (23-a)$$

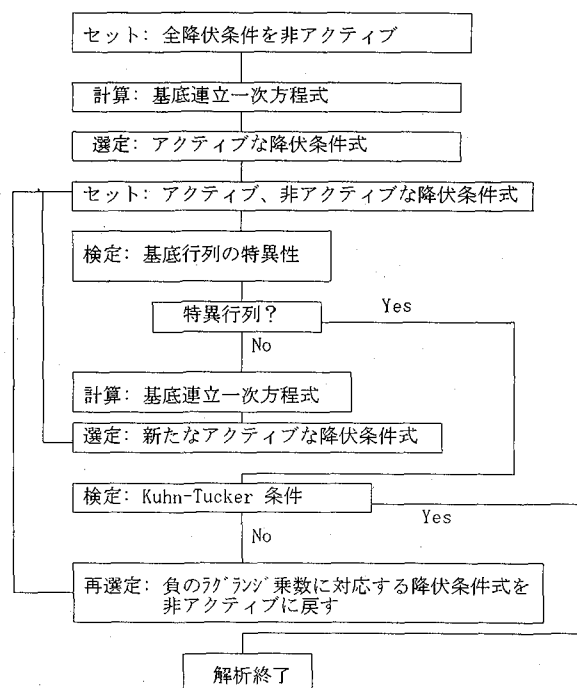


図-4 解析手順

$$\mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{u} \quad (23-b)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^e + \mathbf{q}^p \quad (23-c)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k} \mathbf{q}^e \quad (23-d)$$

$$\mathbf{q}^p = \mathbf{N} \dot{\lambda} \quad (23-e)$$

$$\phi = \mathbf{N}^T \mathbf{Q} - \mathbf{R} \leq 0 \quad (23-f)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (23-g)$$

$$\phi^T \dot{\lambda} = 0 \quad (23-h)$$

ここで、 $\mathbf{k}$: 集成部材剛性マトリクス、 $\mathbf{q}$: 全内変形ベクトル、 $\mathbf{q}^e$: 弾性内変形ベクトル、 $\mathbf{q}^p$: 塑性変形ベクトル、 $\mathbf{u}$: 変位ベクトル、 $\dot{\lambda}$: 塑性乗数ベクトル、 ϕ : 降伏関数ベクトルである。また、式(23-a)、(23-b)はそれぞれ釣合条件、変形適合条件を、また式(23-c)、(23-d)、(23-e)はそれぞれ全変形、弾性変形、塑性変形の構成則を、最後に、式(23-f)は降伏条件を表す。さらに、式(23-h)は、降伏条件式と対応する塑性乗数の相補条件(どちらか一方が常に0)を表す。

この基本条件式に、式(5)、(6)と同様にアクティブと非アクティブな降伏条件式を選別して、釣合条件式とアクティブな条件式を整理すると、次式が得られる。

$$\mathbf{C}^T \mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{u} - \mathbf{C}^T \mathbf{k} \mathbf{N}_A \dot{\lambda} = \alpha \mathbf{F} \quad (24)$$

$$\mathbf{N}_A^T \mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{u} - \mathbf{N}_A^T \mathbf{k} \mathbf{N}_A \dot{\lambda} = \mathbf{R}_A \quad (25)$$

式(24)、(25)を、式(9)、(10)の基底連立一次方程式と比較すると、単純な変数マトリクスの置換を行うことにより、二つの式が等価となることがわかる。すなわち、

$$\mathbf{k} = \mathbf{I} \quad (26)$$

$$\mathbf{u} = \beta_C \quad (27)$$

$$\dot{\lambda} = -\beta_N \quad (28)$$

ここで、 $\mathbf{I}$: 単位マトリクス。

以上のことから、提案する解析手法は、剛性マトリクスを単位行列によって仮定したホロノミック弾塑性解析を擬似的に行いながら、荷重係数を逐次に増加させ、最終的に塑性崩壊荷重を求める手法とも言えることがわかる。その際、基底連立一次方程式の変数 $\beta_c, -\beta_N$ は、それぞれ、弾塑性変位ベクトル $\mathbf{u}$ 、塑性乗数ベクトル λ に相当している。さらに、前項で述べた基底連立一次方程式が特異となり解が得られない場合は、弾塑性解析的には、構造物の崩壊荷重、または、構造の局所的な除荷過程(Local Unloading)に相当しており、前述したKuhn-Tucker条件を用いることによって判別されることもわかる。

5. 非線形降伏関数への応用

非線形降伏関数を用いる場合には、式(17)に代わる非線形降伏関数による最大荷重係数の算定法とアクティブな降伏関数の線形化を行うことによって、前述の基本式および解析手順をそのまま用いて塑性解析を行うことができる。断面 j の非線形な降伏関数は、一般に次式のように与えられる。

$$\phi_j(\mathbf{Q}) \leq 0 \quad (29)$$

非線形な降伏関数においても、式(16)の定義はそのまま適用できる。

$$\alpha = \min \alpha_j \quad (\alpha_j \geq 0) \quad (30)$$

ただし、 α_j は断面 j ごとに、次の最大化問題を解くことによって得られる。

$$\text{Given} : \mathbf{Q}_j^a, \mathbf{Q}_j^R \quad (31-a)$$

$$\text{Unknown: } \alpha_j \quad (31-b)$$

$$\text{Objective: } \alpha_j \rightarrow \text{maximum} \quad (31-c)$$

$$\text{Subject to: } \phi_j(\alpha \mathbf{Q}_j^a + \mathbf{Q}_j^R) \leq 0 \quad (31-d)$$

$$\alpha \geq 0 \quad (31-e)$$

ここで、 $\mathbf{Q}_j^a, \mathbf{Q}_j^R$ は、それぞれ $\mathbf{Q}^a, \mathbf{Q}^R$ の断面 j に関する部分ベクトルを表す。式(31)は、 α_j のみが未知数であり、降伏関数は凸関数であるので、ニュートン法などで簡易に解析することができる。また、降伏関数の形によっては、解析的に解くことができる。

式(30)によってアクティブとなった降伏関数を、一次テイラー展開を用いて線形化降伏関数に変換する。よって、式(5)における線形化降伏関数の係数ベクトル $[\mathbf{N}_A^T]_j$ および塑性容量ベクトル $\mathbf{R}_{A_j}$ は、 $\mathbf{Q}$ において降伏関数がアクティブ($\phi_j(\mathbf{Q}) = 0$)であることから、それぞれ次式のように与えられる。

$$[N_{A1}, \dots, N_{Ai}, \dots, N_{Am}]_j = \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial Q_1}, \dots, \frac{\partial \phi_j}{\partial Q_i}, \dots, \frac{\partial \phi_j}{\partial Q_m} \right] \quad (32)$$

$$R_{Aj} = \frac{\partial \phi_j}{\partial Q_1} Q_1 + \dots + \frac{\partial \phi_j}{\partial Q_i} Q_i + \dots + \frac{\partial \phi_j}{\partial Q_m} Q_m \quad (33)$$

このように非線形の降伏関数は、逐次にテーラー展開点($\mathbf{Q}$)を移動させながら解析を行うが、その際の線形

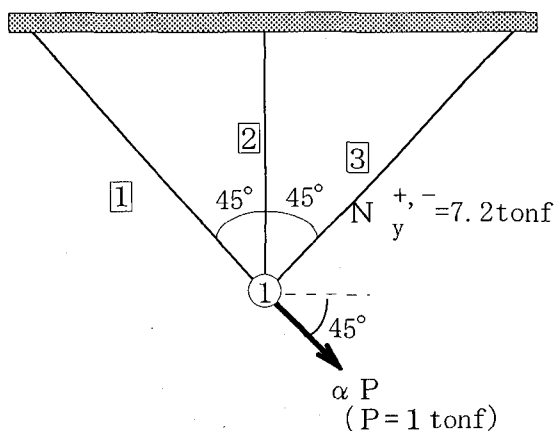


図-5 3部材トラス

化降伏関数の急激な変化を回避するため、次式によるMove Limit条件が付加される。

$$\alpha \leq (1 + \varepsilon) \alpha_0 \quad (34)$$

ここで、 α_0 ：前段階の荷重係数、 ε ：Move Limit係数。

6. 計算例と考察

6.1 3部材トラス

本法の解析過程を図-5に示す3部材トラスの塑性解析を例として具体的に示す。まず、式(7)で示した構造全体の釣り合い条件式(式(1-d))は、次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} 0.707 & 0 & -0.707 \\ -0.707 & -1.0 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 707 \\ -707 \end{bmatrix} \quad (35)$$

また、降伏条件式(式(1-e))は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7200 \\ 7200 \\ 7200 \\ 7200 \\ 7200 \\ 7200 \end{bmatrix} \quad (36)$$

解析の第一段階では、アクティブな降伏条件は選ばれていないので、基底連立一次方程式は、式(9)のみによって作られ次のようになる。

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} \beta_c = \alpha \mathbf{F} \quad (37)$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} 0.707 & 0 & -0.707 \\ -0.707 & -1.0 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0 & -1.0 \\ -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{c1} \\ \beta_{c2} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 707 \\ -707 \end{bmatrix} \quad (38)$$

これを解いて、基底連立一次方程式の解の係数ベクトル β_c が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \beta_{c1} \\ \beta_{c2} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 707 \\ -353 \end{bmatrix} \quad (39)$$

よって、式(8)による内力ベクトルは次のようになる。

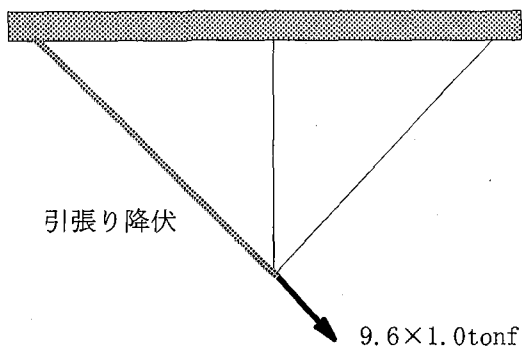


図-6 第1段階の解

$$Q = \alpha \begin{bmatrix} 750 \\ 353 \\ -250 \end{bmatrix} \quad (40)$$

この解を式(36)に一行ごとに代入すると、式(17)による解が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.6 \\ -9.6 \\ 20.4 \\ -20.4 \\ 28.8 \\ -28.8 \end{bmatrix} \quad (41)$$

式(16)の定義により、仮の崩壊荷重係数が次のように求まる。

$$\alpha = \min \alpha_i = 9.6 \quad (42)$$

α_1 が選ばれたので、アクティブな降伏条件式は、式(36)の第一行となり、次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = 7200 \quad (43)$$

第1段階の解析は、ここで終了するが、この状態は、図-6に示すような構造物の降伏状態に対応していることがわかる。

第二段階は、式(9)、(10)による基底連立一次方程式が次のように改良される。

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0.707 \\ 0 & 2.0 & -0.707 \\ 0.707 & -0.707 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{c1} \\ \beta_{c2} \\ \beta_{N1} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 707 \\ -707 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7200 \end{bmatrix} \quad (44)$$

この基底係数行列は、正則であるため式(42)の解は塑性崩壊荷重ではないことが確認され、解析を続行する。

これを解いて、内力ベクトルの解は次のようになる。

$$Q = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1414 \\ -1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7200 \\ -10180 \\ 7200 \end{bmatrix} \quad (45)$$

よって、式(45)を式(36)に代入して式(17)の解を求めると、

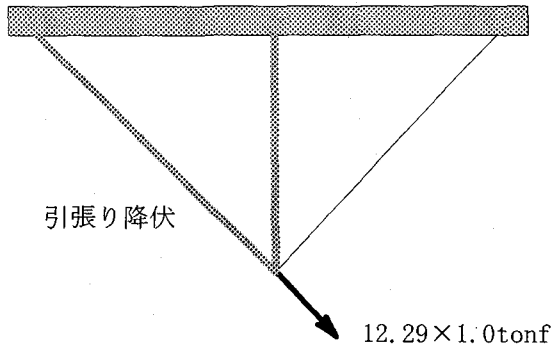


図-7 第2段階(崩壊状態)の解

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{不定} \\ \infty \\ 12.29 \\ -2.11 \\ -0.0 \\ 14.40 \end{bmatrix} \quad (46)$$

となり、式(16)の定義により仮の崩壊荷重が次のように求められる。

$$\alpha = \alpha_3 = 12.29 \quad (47)$$

よって、アクティブな降伏条件式が次のように改良される。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7200 \\ 7200 \end{bmatrix} \quad (48)$$

しかし、これを用いた基底連立一次方程式の係数行列は、非正則行列であるため、式(18)、(19)によるKuhn-Tucker条件を確認する。その連立方程式は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0 & -1.0 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} 707 & -707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = 1.0 \quad (50)$$

これによる解は、

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.07 \times 10^{-4} \\ -7.07 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \times 10^{-3} \\ 7.07 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (52)$$

となり、塑性乗数ベクトルが非負であることからKuhn-Tucker条件は満足され、これが真の崩壊メカニズムであることがわかる。得られた解を、図-7に示す。

6. 2 門形ラーメン(線形化降伏条件式)

複合内力による降伏条件への適用性を検討するために、図-8に示す門形ラーメンの曲げと軸力を考慮した解析を行った。まず、図-9に示す線形化降伏関数を用いて

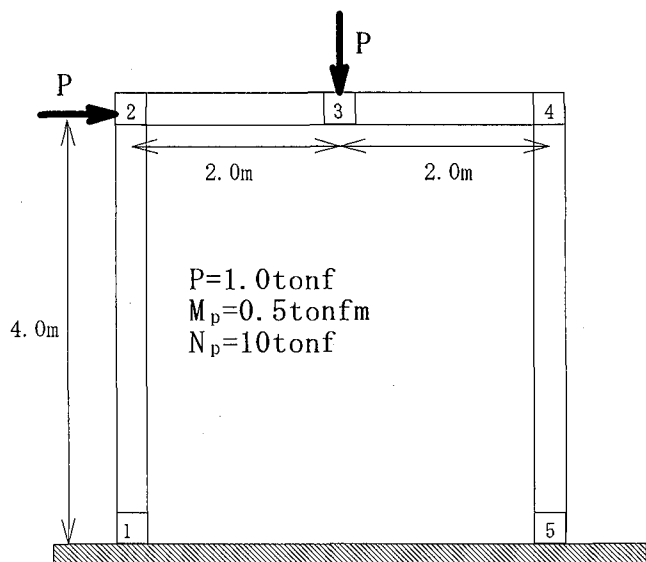


図-8 門形ラーメン

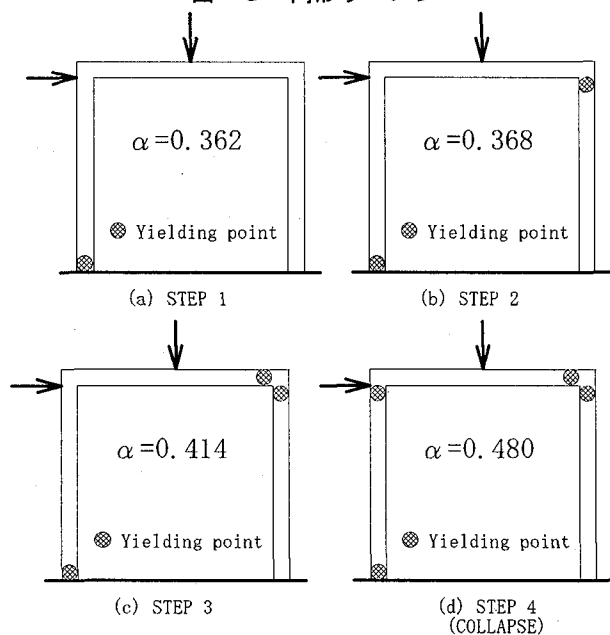


図-10 解析過程

解析を行い線形計画法を用いた解析と比較した。ここでは、降伏関数が線形で与えられるので、線形計画法の下界定理または上界定理による解析が可能である。

図-10に、提案する手法の計算過程で得られた構造物の降伏モードと、対応する荷重係数を表す。

提案する手法は、あたかも弾塑性解析のように、解析が進むにつれて降伏点の数（アクティブな降伏関数の数）が増え、それに伴う荷重係数が大きくなっている。この計算例では4段階目で、4つの断面が塑性化し、崩壊荷重 $\alpha = 0.480$ に達している。比較のために行った線形計画法による塑性解析の結果は、全く同じ崩壊荷重および崩壊モードが得られた。計算効率の面で見ると、線形計画法は一度の解析で、崩壊荷重を得られるので、線形計画法による解析の方が良い。しかし、計算に要する記憶領域を、表-1によって比較すると、線形計画

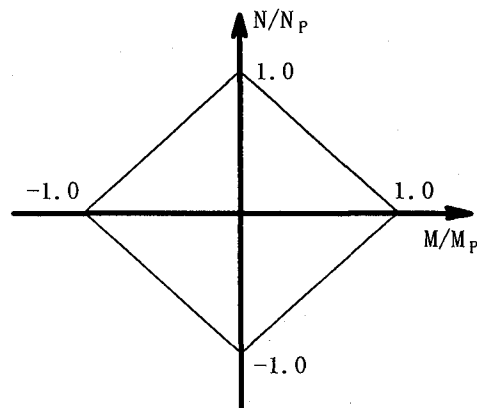


図-9 線形化降伏関数

表-1 記憶領域の比較

手 法	線形計画法 Static approach	線形計画法 Kinematic approach	提案手法 基底連立一次 方程式
記憶領域	1 8 5 6	6 6 3	1 6 9
比	11.0	3.9	1.0

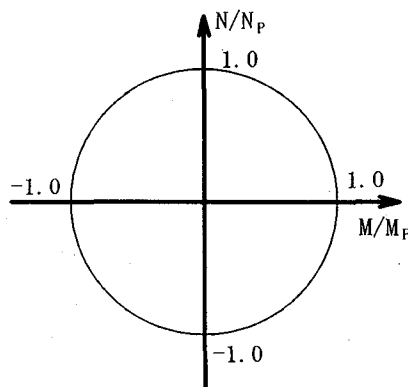


図-11 非線形降伏関数

法による解析では、提案する手法に比べて、下界定理では1.1倍、上界定理においても4倍の記憶領域が必要であることがわかる。

6.3 門形ラーメン(非線形降伏関数)

図-8に示す構造で、降伏関数を図-11に示す非線形降伏関数を用いた解析を行った。比較のために、逐次線形化手法を用いた塑性解析手法によって同様の解析を行った。

図-12に、提案する手法と、逐次線形計画法による塑性解析の計算回数と崩壊荷重の収束状況を比較して示す。これより、提案手法は、逐次線形計画法に比べて、解析当初は小さな荷重係数が得られるが、解析回数ごとに急激に荷重係数が増加し、4回目の解析で崩壊荷重が

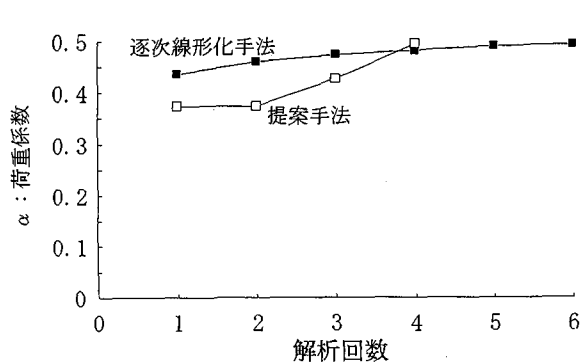


図-12 解析回数と収束状況

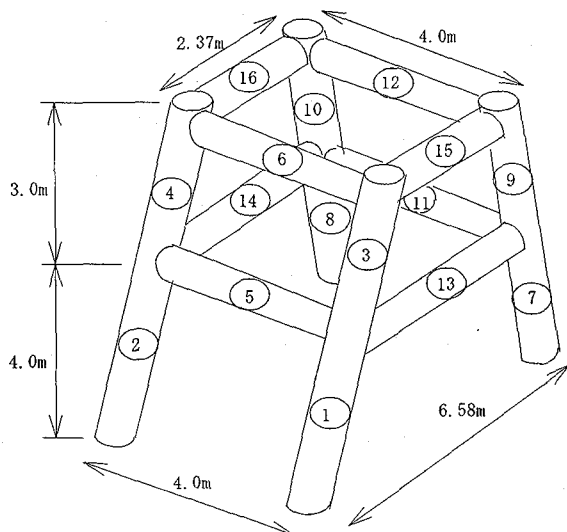


図-14 オープン式鋼製砂防ダム

得られるのに対して、逐次線形計画手法は、当初から比較的大きな荷重係数を得て、緩やかな増加によって6回目の繰り返し計算を必要としている。すなわち、計算の収束は提案手法の方が良いことがわかる。これは、本法は段階的に着実にアクティブな降伏条件を付加しながら、解の改良方向を決定するのに対して、逐次線形計画法では単に線形化降伏関数上での改良予測と、ムーブリミット条件による収束制御しかできないためである。すなわち、非線形の降伏関数においては記憶領域の効率化に加えて、計算回数においても提案手法の方が効率的であることが認められた。

図-13には、提案する手法と逐次線形計画法によって得られた崩壊モードを示す。逐次線形化手法を用いた場合の方が提案する手法よりも、若干小さい崩壊荷重となるが、ほぼ等しく、いずれの崩壊荷重も、前述の線形降伏関数の場合よりも大きい。これは、非線形降伏関数が線形化降伏関数よりも外側に広がる領域を形成するためである。崩壊荷重の大きさでは、わずかの違いであるが、その崩壊モードをみると、逐次線形計画法では2つの点でしかアクティブな降伏条件が得られないのに対し、提案手法は4カ所の部材端で降伏している。ここで、逐次線形計画法のアクティブとは、下界定理の降伏条件に対する双対変数がアクティブであることを基準にして

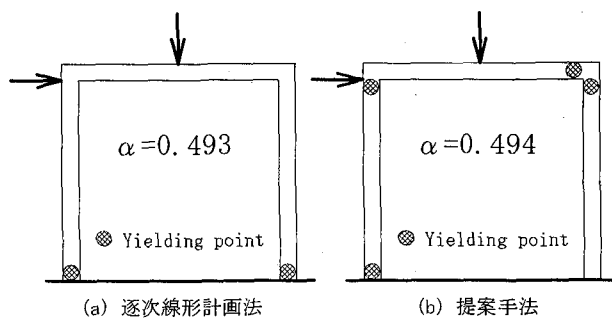


図-13 崩壊モード

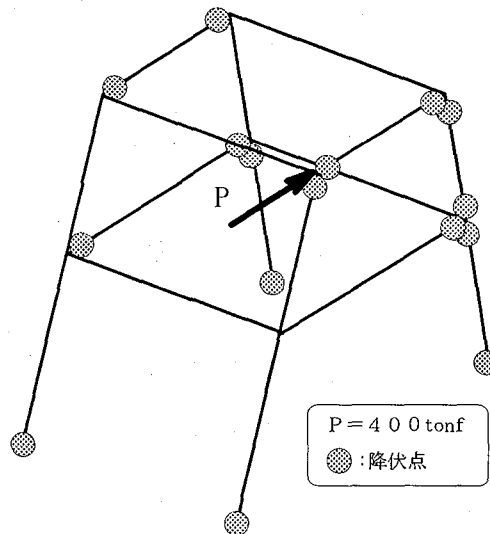


図-15 塑性崩壊荷重状態

表-2 断面諸元

部材番号	全塑性モーメント M_p (tonfm)	全塑性軸力 N_p (tonf)	全塑性ねじりモーメント T_p (tonfm)
①-⑥	215	1165	248
⑦-⑭	145	772	168
⑮⑯	122	651	141

おり、内力状態をチェックすると、提案手法と同様に上部の点で99%降伏状態であることは判明できる。このように、逐次線形計画法が100%アクティブな降伏状態に収束できないのは、非線形降伏条件式を一次テイラー展開近似(式(32), (33))したことの補完として式(34)の Move Limit条件式を同時に制約条件式に用いるため、降伏条件式に代えてこの Move Limit条件がアクティブになるためである。一方、提案手法では、降伏条件式に対する解析を終了した後、Move Limit条件のチェックおよび補正に入るため、式(18), (19)に基づく崩壊メカニズムのチェックが確実に行われる。この相違が図-13におけるメカニズムの相違として表れたものである。

6. 4 立体鋼製砂防ダム

オープン式鋼製砂防ダムは、土石流中の巨礫を捕捉する目的で作られる構造物であるが、弾性応答を越えた限界状態を用いて設計する手法が検討されている。そこで、試みに図-14に示す立体型の鋼製砂防ダムの塑性解析を行った。本構造の各部材は鋼管でできている。各断面ごとの、複合力による降伏条件式は次のものを用いた。

$$\left(\frac{M_1}{M_p}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{M_p}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_p}\right)^2 \leq 1.0 \quad (53)$$

ただし、 M_1 : 断面の第1軸周りのモーメント、 M_2 : 断面の第2軸周りのモーメント、 N : 断面軸力、 T : 断面のねじりモーメント、 M_p : 断面の全塑性モーメント、 N_p : 断面の全塑性軸力、 T_p : 断面の全塑性ねじりモーメント。計算に用いた降伏断面力を、表-2に示す。図-15には、解析された塑性崩壊荷重と崩壊モードを示す。構造全体で16カ所に降伏断面が生じて崩壊に達しており、その塑性崩壊荷重は400tonfとなった。この結果は、別途行った弾塑性解析の最大荷重状態と一致した。

7. 結 言

本研究は、記憶領域を縮約した効率的な塑性解析手法を提案したものであり、その成果を要約すると以下のようになる。

- 1) 基底連立一次方程式を用いて、アクティブな降伏条件と釣合条件によって作られる一般逆行列問題を解く手法を考案し、これを用いて効率的に荷重係数の最大化を図る解析手法を提案した。
- 2) 誘導した解析基本式が、単位行列による剛性マトリ

クスを用いたホロノミック弾塑性解析手法と同意義であることを示し、基底連立一次方程式の弾塑性解析との比較に基づく物理的意義を考察した。

- 3) 非線形な降伏関数を用いた塑性解析へ応用する方法へと基本式を拡張した。

- 4) 3部材トラス、門形ラーメンおよび立体鋼製砂防ダムを解き、本法の妥当性と適用性を、線形計画法による塑性解析結果と比較して示した。

参考文献

- 1) M. Z. Cohn and G. Maier: Engineering Plasticity by Mathematical Programming, Pergamon Press, 1979.
- 2) 石川信隆、三原徹治、香月 智、古川浩平: Optimal Design of Skeletal Structures under Elastic and Plastic Design Criteria, 土木学会論文集, 第350号/I-2, pp.97~104, 1984年10月.
- 3) 香月 智、石川信隆: 塑性解析を用いた粒状体の変形挙動解析, 構造工学論文集, Vol. 40A, pp.375~136, 1994年3月.
- 4) Uri Kirsch: Optimum Structural Design, McGraw-Hill, 1981.
- 5) Livesley, R.K.: A Compact Fortran Sequence for Limit Analysis, Numerical Method and Engineering, Vol. 5, No. 3, pp.446-449, 1973.2.
- 6) Grierson, D.E.: Deformation Analysis at Plastic Collapse, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, Pergamon Press, 1979.

(1995年9月18日受付)