

薄板の曲げの変位拘束端に生ずる クラック発生方向およびクラックと剥離の分岐問題

BRANCHING PROBLEM OF A CRACK AND A DEBONDING AT AN END OF DISPLACEMENT CONSTRAINT FOR THIN PLATE BENDING

三輪昌弘*、長谷部宣男**、中島将貴***

Masahiro MIWA, Norio HASEBE and Masaki NAKASHIMA

*工修 東海旅客鉄道株式会社 技術本部 (〒103 東京都中央区八重洲 1-6-6)

**工博 名古屋工業大学教授 工学部 社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

***工修 株式会社大林組 (〒101 東京都千代田区神田司町 2-3)

In the case of out-of-plane loading on a thin plate with displacement constraint at a part of the boundary, the branching problem of a crack, generated at the end of a displacement constraint, and of a debonding, generated along the part of the displacement constraint, is considered. Using a rational-mapping and complex-stress functions, two cases of displacement constraint are considered, which are a simply-supported edge and a clamped edge. The loading condition of the simply-supported edge is solved for uniform bending and concentrated torsion, and that of the clamped edge is done for uniform bending and uniform torsion. The stress intensity factor of a micro-crack generated from the end to arbitrary direction, and stress intensity of debonding are calculated. In addition, the strain energy release rates of a crack and a debonding generation are obtained, so that the direction of a crack initiation, and which fracture of a crack or a debonding is produced, have been investigated for different loading conditions.

Key Words: crack, debonding, branching problem, thin plate bending, displacement constraint, stress intensity factor, stress intensity of debonding

1. まえがき

材料の破壊の要因のひとつに、変形の拘束端に生ずる応力集中があげられる。例えば橋梁等の鋼構造物で、補剛材やリブ、フランジなどで面外変形を拘束された板材には、振動、横揺れにより、これらを起点とする疲労クラックの発生がみられる¹⁾。補剛材やリブは板の中間部で、フランジは板の縁端部で面外変形を拘束する構造である。本論文では後者に相当する、板の縁の一部が変位拘束を受け、そこから破壊が生ずる構造モデルを解析する。

構造モデルとして、図-1に示す境界の一部に変位拘束を受ける半無限板が、面外変形を受ける場合を考える。変位拘束の条件には、剛な固定と単純支持の2種類を考える。以下本稿では、これらを固定辺および単純支持辺と呼ぶことにする。この問題は、図-1の斜線で示す変位境界と、それ以外の外力境界とが存在する混合境界値問題として解かれる。混合境界値問題は、変位境界の与え方によって次の2つに分けられる。すなわち、固定辺の条件である、2つの変位成分が境界の一部で与えられ、

他の境界は外力境界である第1種混合境界値問題と、単純支持辺の条件である、外力の1成分と変位の1成分が境界の一部で与えられ、他の境界は外力境界である第2種混合境界値問題とがある。後者は前者に比べて数学的に難しい。

これらの拘束条件は、代表的な板の支持条件であるほかに、例えばここでの板の一部に補強材を溶接あるいは接着剤で取り付けた構造や、板と他の部材の交差部のモデルでもある。図-1の斜線で示す変位拘束境界を、板に取り付けた補強材と考えると、補強材の幅 d が小さい場合には、板と補強材の接合線を軸として、補強材は比較的回転しやすい状態である。一方、長さ a の方向には、板のたわみに対する抵抗が強く、力学的に単純支持の条件として扱うことができる。 d が大きくなって接合線を軸として回転できない場合、固定辺として扱うことができる。一般の変位拘束状態は、固定辺と単純支持辺の中間にあると思われる。

変位拘束端の破壊現象には、端点を起点として材料内部に向かってクラックが発生する場合と、板と変位拘束

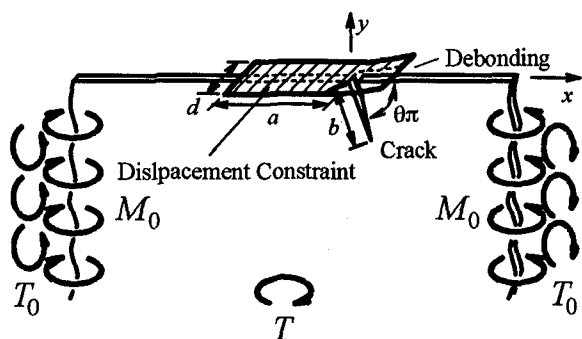


図-1 解析モデル

部分の接合線に沿って、剥がれる場合の2つが考えられる。後者を本論文では剥離と呼ぶことにする。クラックと剥離のどちらの破壊が生ずるか、さらに剥離が生じて進行したとき、その途中からクラックが発生するか否かの考察等を行う。クラックおよび剥離の発生に関するクライテリオンは、ひずみエネルギー解放率を用い、クラック発生方向のそれは、任意方向に発生するクラックのうち、解放されるひずみエネルギーが最大となる方向のものを考える。文献7では、クラックの方向が境界縁に直角方向として解析しているが、本論文では、上記のようにひずみエネルギー解放率最大の方角をとるというクライテリオンを用いる。

解析には、領域を単位円内部に写像する有理型写像関数と複素応力関数による方法を用いる。著者らは、この解法による境界の一部に固定辺³⁾と単純支持辺^{5,6)}を有する薄板曲げの問題の一般解を導いている。これらの一般解を利用して、任意方向に発生したクラック先端の応力拡大係数や、剥離先端の応力の強さを計算し、クラックや剥離が発生するときのエネルギー解放率を求めて、クラック発生方向やクラックと剥離の分岐問題を考察する。

2. 解析形状と写像関数

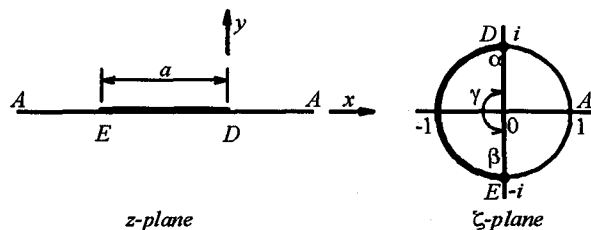
図-2aは、 x 軸上にとった直線境界の一部が変位拘束を受ける半無限板の、クラック発生前の状態を示す。図-2bは、変位拘束端の一つから x 軸と $\theta\pi$ の角度をなすクラックの生じた場合を示す。

図-2aに示す、クラック発生前の半無限領域(z -plane)を単位円内部(ζ -plane)に写像する写像関数は、次式で与えられる。

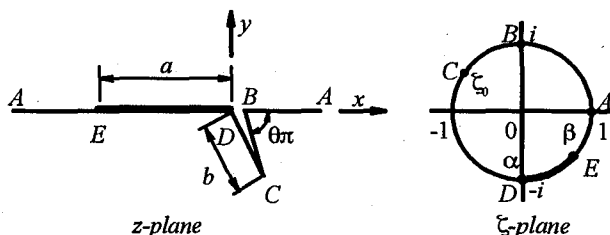
$$z = \omega(\zeta) = -a \left(\frac{i}{1-\zeta} + \frac{1-i}{2} \right) \quad (1)$$

ここに a は、固定辺あるいは単純支持辺の DE の長さである。

つぎに図-2bに示す、 x 軸と $\theta\pi$ ($0 < \theta < 1$)の角度をなす長さ b のクラックを有する半無限領域を、単位円内部に写像する有理写像関数は、Schwarz-Christoffelの変換公式か



(a) クラック発生前



(b) クラック発生後

図-2 解析形状と単位円

ら得られる無理関数より、次式の形に作られる²⁾。

$$z = \omega(\zeta) = k \frac{(1+i\zeta)^\theta (1-i\zeta)^{1-\theta}}{1-\zeta} \\ \doteq \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_c \quad (2)$$

ここに k は、クラック長さを b に決める定数で $k = \frac{b(1-i)^{-\theta}}{2\theta(1-\theta)^{1-\theta}}$, E_0, E_k, E_c, ζ_k は複素定数, n は分数式の項数で本論文では $n=24$ を用いている。また、クラック先端 C に対応する単位円上の点 ζ_0 は、 $\zeta_0 = (1-2\theta+i)/(1-2\theta-i)$ で与えられる。式(2)を用いて写像される形状は、分数式の和の形で表される有理写像関数を用いている。そのため、クラック先端 C は、厳密には鋭い角を持った形状とはならず、微小な丸みを有している。しかし、クラック先端の曲率半径 ρ とクラック長さ b の比 ρ/b は、 $\theta=0.5$ のとき最小、 θ が0または1に近づくにつれて徐々に大きくなるが、そのオーダーは $\rho/b=10^{-7} \sim 10^{-12}$ と非常に小さく、クラックは十分に鋭い。また本論文で扱う問題は、クラック長さ b に対して、境界 DE の長さ a を十分に長くとり、 $b/a \ll 1$ を解析の対象としている。そのため、この写像関数を使って得られる解の精度は、相対的にさらに向上する。なお DE の長さ a は、写像関数の式(2)には陽には現れず、後述の応力関数にはパラメータとして含まれる。

なお、クラック発生前の形状を写像する写像関数の式(1)は、クラック発生後の式(2)において、 $E_k=0$ ($k=1, 2, \dots, n$)の特別な場合である。

3. クラックと剥離のひずみエネルギー解放率

クラック先端の応力拡大係数や、剥離先端の応力の強さを複素応力関数を用いて求め、さらに、これらの値を

用いてクラックや剥離のエネルギー解放率を求める。

図-2 の DE 部分に、直交するたわみ角の 2 成分 $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ を与えるとき、 DE を固定辺、固定辺と自由境界の接点 D, E を固定端と呼ぶことにする。また、 DE 部分に x 軸方向のたわみ角 $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ 、 y 軸方向の曲げモーメント $my=0$ なる条件を与えると、 DE を単純支持辺、単純支持辺と自由境界の接点を単純支持端と呼ぶ。

3.1 固定辺の解

図-2b に示す半無限板の境界の一部 DE が固定辺、 x 軸方向無限遠で一樣曲げモーメント M_0 と一樣ねじりモーメント T_0 が作用してクラックが発生した場合を考える。

複素応力関数 $\phi(\zeta)$ の一般解は、式(2)の写像関数を用い、荷重 M_0 と T_0 に対してそれぞれ式(3)、(4)で与えられる³⁾。

$$\phi(\zeta) = \chi(\zeta) \left[\frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} - \frac{M_0 E_0}{4D(1+\nu)\chi(1)(1-\zeta)} - \frac{M_0}{4D\kappa(1+\nu)} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right] + const \quad (3)$$

$$\phi(\zeta) = \chi(\zeta) \left[\frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} - \frac{iT_0 E_0}{4D\chi(1)(1-\zeta)} + \frac{iT_0}{4D\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right] + const \quad (4)$$

ここに、 ν は Poisson 比、 D は板の曲げ剛さ、および Plemelj 関数 $\chi(\zeta)$ 、その他の定数は次式で与えられる。

$$\chi(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{1-\lambda} (\zeta - \beta)^\lambda; \quad \lambda = 0.5 - i\delta; \quad \delta = \frac{\ln \kappa}{2\pi};$$

$$\kappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}; \quad A_k = \phi'(\zeta_k); \quad B_k = \frac{E_k}{\omega'(\zeta_k)}; \quad \zeta_k' = \frac{1}{\zeta_k} \quad (5)$$

また、 α, β は固定端 D, E に対応する単位円上の点である。複素定数 A_k は、式 $\phi'(\zeta_k) = A_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) の実部、虚部に関する $2n$ 元、すなわち今の場合、48 元連立 1 次方程式を解いて決められる。

図-2a に示す、クラック発生前の $\phi(\zeta)$ は、写像関数を式(2)の代わりに式(1)を用いればよい。すなわち、式(3)、(4)において $E_0 = -ia, E_k = B_k = 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) として、それぞれ次式で得られる。

$$\phi(\zeta) = \frac{iaM_0\chi(\zeta)}{4D(1+\nu)\chi(1)(1-\zeta)} + const; \quad (6)$$

$$\phi(\zeta) = \frac{-aT_0\chi(\zeta)}{4D\chi(1)(1-\zeta)} + const \quad (7)$$

応力成分は、式(6)、(7)の $\phi(\zeta)$ の一階微分のオーダーで表される。 $\phi(\zeta)$ のなかの一階微分 $\chi(\zeta)$ の $\zeta = \alpha$ および $\zeta = \beta$ で、すなわち固定端 D および E で特異性を示し応力は無限大となる。したがって、固定端を始点として板の内側

に向かってクラックが発生したり、あるいは板と固定辺の接合面に沿って剥離が生ずる可能性がある。

2 つの可能性のうち、まずクラックが発生する場合を考える。クラック先端の応力拡大係数 $K = k_B + ik_S$ は、クラックと x 軸のなす角 $\delta_0 = -\theta\pi$ 、単位円上のクラック先端点 $\zeta_0 = (1-2\theta+i)/(1-2\theta-i)$ 、および式(3)、(4)を用いて、

$$k_B - ik_S = -2D(1+\nu)\exp(-i\delta_0/2)\phi'(\zeta_0)/\sqrt{\omega''(\zeta_0)} \quad (8)$$

から求められる。さらに、クラックのエネルギー解放率 G_{crack} は応力拡大係数 $K (=k_B + ik_S)$ を用いて次式で表せる⁷⁾。

$$G_{crack} = \frac{\pi\kappa}{D(1+\nu)^2} K\bar{K} \quad (9)$$

次に、固定端 D を始点として、固定辺 DE に沿って薄板が剥離する場合を考える。クラック先端の応力拡大係数 K に対応して、剥離先端の応力拡大係数を本論文では剥離先端の応力の強さと言い、 $\tilde{\alpha}_0$ で表す。固定端 D に対応する単位円上の $\zeta = \alpha$ での $\tilde{\alpha}_0$ は、次式で表わされる⁷⁾。

$$\tilde{\alpha}_0 = 2\sqrt{2}D(1+\nu)\exp(-\pi\delta) \frac{|\omega'(\alpha)(\alpha-\beta)^\lambda g(\alpha)|}{\omega'(\alpha)(\alpha-\beta)} \times \exp\left\{i\lambda\left(\theta_A + \pi + \frac{\gamma}{2}\right)\right\} \quad (10)$$

ただし、 $g(\alpha) = \lim_{\zeta \rightarrow \alpha} [\phi'(\zeta)(\zeta - \alpha)^\lambda (\zeta - \beta)^{1-\lambda}]$ 、 θ_A は剥離面と x 軸がなす角でいまの場合 $\theta_A = \pi$ 、 γ は単位円上で α と β の中心角 $\gamma = \angle\alpha\beta$ である(図-2a)⁹⁾。 M_0 が作用するときの $g(\alpha)$ は式(6)より、

$$g(\alpha) = \frac{iaM_0}{4D(1+\nu)\chi(1)} \cdot \frac{(1-\lambda)(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)} \quad (11)$$

また、 T_0 が作用するとき、式(7)より $g(\alpha)$ は次式で表される。

$$g(\alpha) = \frac{aT_0}{4D\chi(1)} \cdot \frac{(1-\lambda)(\alpha-\beta)}{(1-\alpha)} \quad (12)$$

したがって、 M_0 と T_0 が同時に作用するときの剥離先端の応力の強さは、式(10)、(11)および(12)より、重ね合わせによって次式で得られる。

$$\tilde{\alpha}_0 = \left\{ (1+\nu)T_0 - iM_0 \right\} \frac{(1-\lambda)\alpha^\lambda}{\sqrt{2}} \quad (13)$$

よって、剥離発生時のエネルギー解放率 G_{deb} は、 $\overline{1-\lambda} = \lambda$ 、 $\overline{\alpha^\lambda} = \alpha^{1-\lambda}$ および式(13)を用いて、最終的に次式で得られる⁷⁾。

$$G_{deb} = \frac{\pi\kappa}{2D(1+\nu)^2} \tilde{\alpha}_0 \bar{\alpha}_0$$

$$= \frac{\kappa a}{16\pi D} \left\{ \pi^2 + (\ln \kappa)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{M_0}{1+\nu} \right)^2 + T_0^2 \right\} \quad (14)$$

クラックのない場合の G_{deb} は、厳密解として求まる。

3.2 単純支持辺の解

図-2a, b に示す半無限板の、直線境界の一部 DE が単純支持辺、 x 軸方向無限遠で一様曲げモーメント M_0 と y 軸方向無限遠で集中ねじりモーメント T が作用する場合を考える。 T は、単純支持辺に作用したと考えてもよい。固定辺の場合と異なり、次の理由により、荷重として x 軸方向無限遠で一様ねじりモーメント T_0 の代わりに集中ねじりモーメント T を考える。すなわち、クラック発生前の半無限板の一部が単純支持辺の場合、 T_0 を荷重として求まる応力関数 $\phi(\zeta)$ には特異性を示す項が含まれず、単純支持端に破壊の原因となる応力集中を生じない。つまり T_0 の荷重によっては、ここで考える破壊の可能性はない。

クラック発生後(図-2b)、一様曲げモーメント M_0 が作用する問題の複素応力関数は、式(2)の写像関数を用いて次式で与えられる⁹⁾。

$$\begin{aligned}\phi(\zeta) &= H(\zeta) + \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\overline{A_k B_k}}{\zeta_k - \zeta} \left[1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\overline{A_k B_k} \zeta_k'^2}{\zeta_k' - \zeta} \left[1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k')} \right] \right\} + const; \\ H(\zeta) &= -\frac{M_0}{4D(1+\nu)} \left\{ \frac{E_0}{1-\zeta} \frac{\chi(\zeta)}{\chi(1)} - \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \left[1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{E_k} \zeta_k'^2}{\zeta_k' - \zeta} \left[1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k')} \right] \right\} \quad (15)\end{aligned}$$

また、集中ねじりモーメント T が作用するときは、次式で与えられる⁹⁾。

$$\begin{aligned}\phi(\zeta) &= H(\zeta) + \frac{1}{2\kappa} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\overline{A_k B_k}}{\zeta_k - \zeta} \left[1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\overline{A_k B_k} \zeta_k'^2}{\zeta_k' - \zeta} \left[1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k')} \right] \right\} + const; \\ H(\zeta) &= \frac{T}{2\pi\kappa D(1-\nu)} \\ &\quad \times \log \frac{-2\chi(1)\chi(\zeta) + (2-\alpha-\beta)\zeta + 2\alpha\beta - \alpha - \beta}{1-\zeta} \quad (16)\end{aligned}$$

ただし、単純支持の場合の Plemelj 関数 $\chi(\zeta)$ は、式(5)の指数が $\lambda=0.5$ ($\delta=0$) の場合として与えられ、その他の定数は固定辺の場合と同じで、 A_k は式 $\phi'(\zeta_k) = A_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) の実部、虚部に関する $2n$ 元連立方程式を解いて求められる。

図-2a のクラック発生前の、点 D を始点とする剥離の問題について述べる。 M_0 または T が作用する場合の複素応力関数 $\phi(\zeta)$ は、式(15)、(16)において $E_0 = -ia$, $E_k = B_k = 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) として、それぞれ次式で表せる。

$$\phi(\zeta) = \frac{iaM_0\chi(\zeta)}{4D(1+\nu)\chi(1)(1-\zeta)} + const \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\phi(\zeta) &= \frac{T}{2\pi\kappa D(1-\nu)} \\ &\quad \times \log \frac{-2\chi(1)\chi(\zeta) + (2-\alpha-\beta)\zeta + 2\alpha\beta - \alpha - \beta}{1-\zeta} + const \quad (18)\end{aligned}$$

固定辺の場合と同様、応力成分は式(17)、(18)の $\phi(\zeta)$ の一階微分のオーダーで表され、 $\phi(\zeta)$ 中の $\chi(\zeta)$ の $\zeta = \alpha$ および $\zeta = \beta$ で、すなわち単純支持端 D および E で特異性を示し無限大となる。したがって、単純支持端を始点として板の内側に向かってクラックが発生したり、あるいは板と単純支持辺との間に剥離を生ずる可能性がある。クラックのエネルギー解放率 G_{crack} は、固定辺と同じ方法で、式(15)、(16)および(8)を用いて式(9)によって表される。

点 D での剥離先端の応力の強さ $\tilde{\alpha}_0$ は、 $\lambda=0.5$ ($\delta=0$) として式(10)で得られ、 M_0 が作用するときの $g(\alpha)$ は式(17)により次式で表わされる。

$$g(\alpha) = \frac{iaM_0}{8D(1+\nu)\chi(1)} \cdot \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha} \quad (19)$$

また、 T が作用するときは、式(18)によって次式で表される。

$$g(\alpha) = \frac{-T\chi(1)}{2\pi\kappa D(1-\nu)} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} \quad (20)$$

M_0 と T が同時に作用する場合の $\tilde{\alpha}_0$ は、式(19)、(20)および(10)より、次式で得られる。

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{-i\sqrt{a}M_0}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}i(1+\nu)}{\pi(3+\nu)} \cdot \frac{T}{\sqrt{a}} \quad (21)$$

よって剥離の進展によるエネルギー解放率 G_{deb} は、 $1-\lambda = \lambda$, $a^\lambda = a^{1-\lambda}$ より最終的に次式で与えられる。

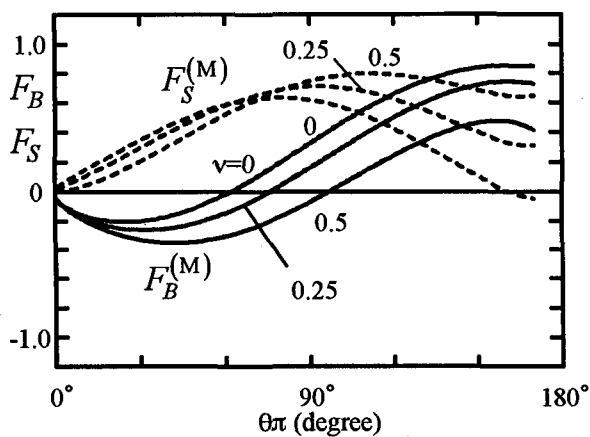
$$G_{deb} = \frac{\pi\kappa a}{16D(1+\nu)^2} \left\{ M_0 + \frac{4(1+\nu)}{\pi(3+\nu)} \frac{T}{a} \right\}^2 \quad (22)$$

4. 剥離とクラックの発生

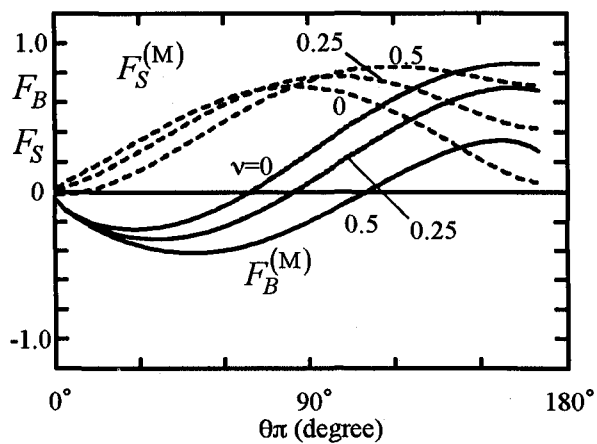
これまでに導いた、クラック発生のエネルギー解放率 G_{crack} 、および剥離発生のエネルギー解放率 G_{deb} を用いて、固定端または単純支持端から発生する、クラック発生方向およびクラックと剥離の分岐問題の考察を行う。

4.1 固定辺の場合

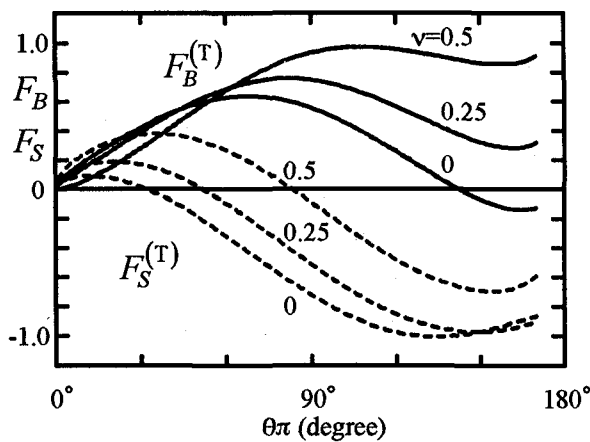
微小クラック発生直後、すなわち $b \rightarrow 0$ でのひずみエネルギー解放率をもってクラック発生のひずみエネルギー解放率とする。微小クラックが発生するときに解放されるひずみエネルギーを、微小クラックの応力拡大係数 K



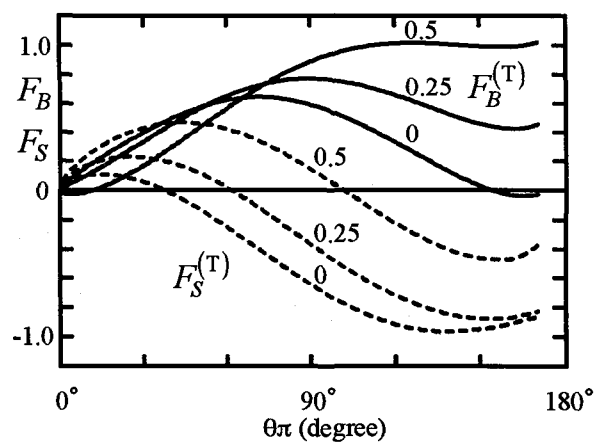
(a) 一様曲げモーメント M_0 , $b/a=0.001$



(c) 一様曲げモーメント M_0 , $b/a=0.0005$



(b) 一様ねじりモーメント T_0 , $b/a=0.001$



(d) 一様ねじりモーメント T_0 , $b/a=0.0005$

図-3 クラック発生角度 $\theta\pi$ と無次元化した応力拡大係数 F_B, F_S (固定辺)

ら求める。しかし、クラック発生後の固定端近傍の応力成分は、固定辺とクラックのなす角($\theta\pi$)より決まる特異性のオーダーを有し、クラック先端近傍では、クラック先端からの距離に対して -0.5 乗のオーダーの特異性を示す。このように、固定端とクラック先端の各々の異なる特異性が影響し、クラック長さ $b \rightarrow 0$ のときの応力拡大係数は急激に変化するため³⁾、外挿によって $b=0$ のときの値を求めることができない。したがってここでは、クラック発生のエネルギー解放率として、 $b/a=0.001$ および $b/a=0.0005$ の微小クラックの応力拡大係数を用い、これより求まるひずみエネルギー解放率をもってクラック発生のエネルギー解放率とする。

式(8)と(3)または(4)から求まる応力拡大係数 K を次式で無次元化し、得られた F_B, F_S のグラフをそれぞれ $b/a=0.001$ および $b/a=0.0005$ の場合について、図-3a, b および図-3c, d に示す。

$$F_B^{(M)} + iF_S^{(M)} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{k_B^{(M)} + ik_S^{(M)}}{M_0 \sqrt{a}}; \quad (23a)$$

$$F_B^{(T)} + iF_S^{(T)} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{k_B^{(T)} + ik_S^{(T)}}{T_0 \sqrt{a}} \quad (23b)$$

ここに、添字(M), (T)は、それぞれ曲げモーメント M_0 , ねじりモーメント T_0 が作用した場合を表す。図-3a と 3c, 3b と 3d を比較してわかるように、クラック長さ $b \rightarrow 0$ のとき、 M_0 の場合は $F_B^{(M)}$ が全体的に負、 $F_S^{(M)}$ が正の方向に移動し、 T_0 の場合には $F_B^{(T)}, F_S^{(T)}$ とも正の方向に移動しており、それぞれの値に差異が見られる。

M_0 と T_0 が同時に作用するときの応力拡大係数は、重ね合わせによって $k_B = k_B^{(M)} + k_B^{(T)}$, $k_S = k_S^{(M)} + k_S^{(T)}$ で表せる。したがって、固定端からのクラック発生のエネルギー解放率は、式(9)および(23)により最終的に次式で得られる。

$$G_{crack} = \frac{\pi \kappa a}{D(3+\nu)^2} \left\{ \left(M_0 F_B^{(M)} + T_0 F_B^{(T)} \right)^2 + \left(M_0 F_S^{(M)} + T_0 F_S^{(T)} \right)^2 \right\} \quad (24)$$

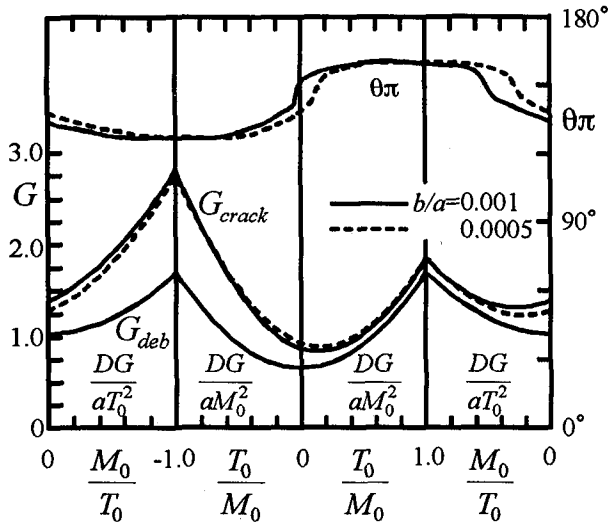


図-4 クラックと剥離のひずみエネルギー解放率 G とクラック発生角度 $\theta\pi$ (固定辺, $\nu=0.25$)

図-3 に示した F_B , F_S の値を式(24)に代入し、クラックの発生角度 $\theta\pi$ を変化させて得られる G_{crack} の最大値、その最大値を与える $\theta\pi$ および式(14)の G_{deb} のグラフを、 $\nu=0.25$ の場合について図-4 に示す。実線、破線はそれぞれ $b/a=0.001, 0.0005$ の場合を表す。左縦軸の G はそれぞれの荷重比に対して無次元化した G_{deb} または G_{crack} (たとえば $\frac{DG_{deb}}{aT_0^2}$, $\frac{DG_{crack}}{aT_0^2}$ など) を示し、 D は曲げ剛さである。

横軸の荷重の比は、 M_0/T_0 または T_0/M_0 によって M_0 , T_0 ともに 0 から正負の無限大の大きさに対応する。右縦軸に示すクラック発生角度 $\theta\pi$ は、いずれの場合も M_0 と T_0 の変化によって $127^\circ \sim 160^\circ$ の範囲で変化している。 b/a により $\theta\pi$ に少し違いが生じている。 b/a の違いによって、 G_{crack} の値に大きな差は見られないが、 $|M_0| > |T_0|$ の範囲ではクラック長の短い $b/a=0.0005$ のときの方が大きく、 $|M_0| < |T_0|$ では逆の傾向が見られる。

ここで、剥離やクラックの発生条件について考察する。エネルギー解放率で表される剥離発生の破壊靱性値、およびクラック発生の破壊靱性値を、それぞれ $(G_{deb})_{CR}$ および $(G_{crack})_{CR}$ とする。 G_{deb} と $(G_{deb})_{CR}$ および G_{crack} と $(G_{crack})_{CR}$ の大小関係により、生ずる破壊現象は、以下の4つの場合が考えられる⁷⁾。

- (i) $G_{deb} < (G_{deb})_{CR}$ かつ $G_{crack} < (G_{crack})_{CR}$ の場合、剥離も、クラックも発生しない。
- (ii) $G_{deb} > (G_{deb})_{CR}$ かつ $G_{crack} < (G_{crack})_{CR}$ の場合、剥離は生じるが、クラックは発生しない。
- (iii) $G_{deb} < (G_{deb})_{CR}$ かつ $G_{crack} > (G_{crack})_{CR}$ の場合、剥離は生じないが、クラックは発生する。
- (iv) $G_{deb} > (G_{deb})_{CR}$ かつ $G_{crack} > (G_{crack})_{CR}$ の場合、剥離も、クラックも発生する可能性がある。

しかし(iv)の場合実際には、どちらか一方の破壊が生ずると思われるので、その判断が必要となる。そのためら

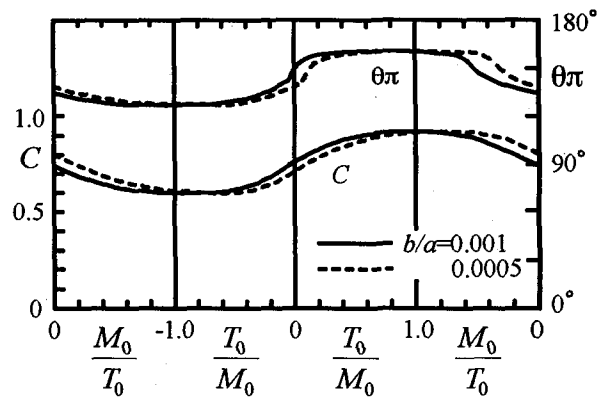


図-5 クラックと剥離のひずみエネルギー解放率の比 C とクラック発生角度 $\theta\pi$ (固定辺, $\nu=0.25$)

に、エネルギー解放率の比 $C=G_{deb}/G_{crack}$ と、それぞれの破壊靱性値の比 $C_0=(G_{deb})_{CR}/(G_{crack})_{CR}$ の大小関係を比べることによって、どちらの現象が生ずるかが決定される。すなわち、 $C > C_0$ のとき、つまり $\frac{G_{deb}}{(G_{deb})_{CR}} > \frac{G_{crack}}{(G_{crack})_{CR}}$ となって剥離が生じ、 $C < C_0$ のときにはクラックが発生する。

この(iv)の場合について、以下に詳しく述べる。

式(14)と(24)より、 G_{deb} と G_{crack} の比 C は、次式で得られる。

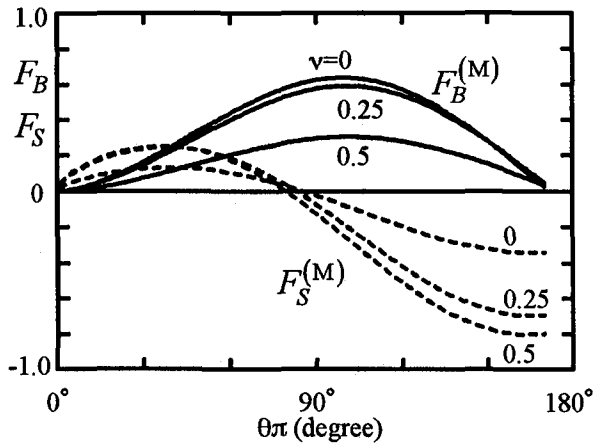
$$C = \frac{G_{deb}}{G_{crack}} = \frac{(3+\nu)^2 \left\{ \pi^2 + (\ln \kappa)^2 \right\} \left\{ \left(\frac{M_0}{1+\nu} \right)^2 + T_0^2 \right\}}{16\pi^2 \left\{ \left(M_0 F_B^{(M)} + T_0 F_B^{(T)} \right)^2 + \left(M_0 F_S^{(M)} + T_0 F_S^{(T)} \right)^2 \right\}} \quad (25)$$

式(25)のグラフを、Poisson 比 $\nu=0.25$ の場合について図-5 に示す。図-5 において、 C_0 の値が曲線 C よりも上にある場合にはクラックが発生し、逆に下にある場合には剥離が生じる。

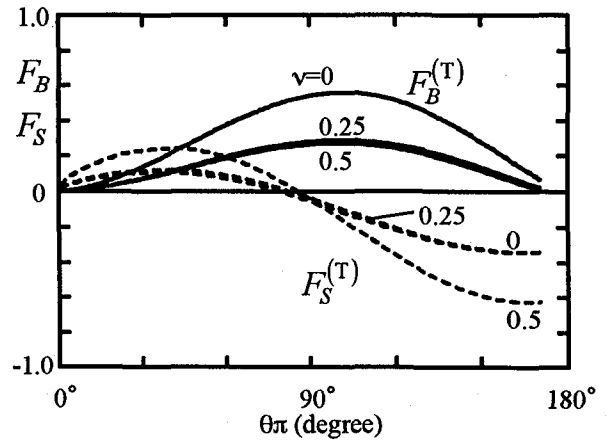
C の最大値は、 $b/a=0.001$ のとき $T_0/M_0=0.95$, $b/a=0.0005$ のとき $M_0/T_0=0.75$ でいずれも $C_{max}=0.920$ をとり、このときが固定端からの剥離がもっとも生じやすい荷重条件となる。逆に $b/a=0.001$ のとき $T_0/M_0=-0.95$, $b/a=0.0005$ のとき $T_0/M_0=-0.65$ でいずれも最小値 $C_{min}=0.599$ となり、クラックが最も発生しやすい。

全体的には、 M_0 と T_0 の作用方向が同符号のときに剥離が生じやすい傾向(C の値が大きい)を示すが、このときクラックが発生する場合には、固定辺に近い角度($\theta\pi$ が大きい)で発生する。逆に M_0 と T_0 が異符号のときにはクラックが発生しやすい傾向にあり、クラックが発生する場合は固定辺から離れた角度($\theta\pi$ が小さい)で発生する。

つぎに、最初に剥離が生じ進展中の、クラック発生の可能性について考える。剥離の進展によって固定辺の長



(a) 一様曲げモーメント M_0 , $b/a=0$



(b) 集中ねじりモーメント T , $b/a=0$

図-6 クラック発生角度 $\theta\pi$ と無次元化した応力拡大係数 F_B, F_S (単純支持辺)

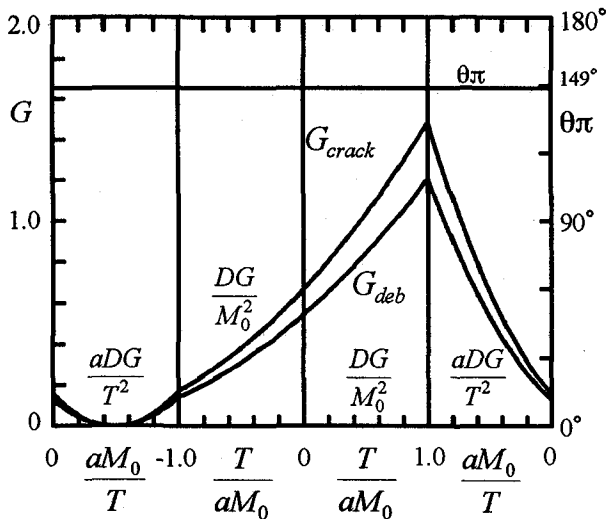


図-7 クラックと剥離のひずみエネルギー解放率 G とクラック発生角度 $\theta\pi$ (単純支持辺, $\nu=0.25$)

さ a が小さくなると、式(14), (24)により G_{crack} と G_{deb} は、いずれも a に比例して減少することがわかる。したがって剥離が生じた場合には、 G_{deb} が減少して $G_{deb} < (G_{deb})_{CR}$ となった時点で、剥離が停止する。この時点でクラックの発生の有無に関しては、(ii)の場合、 a の減少によって G_{crack} も減少するため、クラックは発生しない。すなわち(ii)から(iii)の状態にはならない。また(iv)の場合には、式(25)で示したとおり、 C の値は a に無関係であるため、 $C > C_0$ の関係は保たれ、 G_{deb} が $(G_{deb})_{CR}$ より小さくなる前に G_{crack} が $(G_{crack})_{CR}$ より小さくなる。したがって一旦剥離が生じたとき、剥離の進展中または停止後、クラックに分岐することは考えられない。

クラックが発生した後の挙動については、本論文の問題と別の問題になり、ここでは扱わない。

4.2 単純支持辺の場合

先の固定辺の問題の場合とは異なり、単純支持端近傍

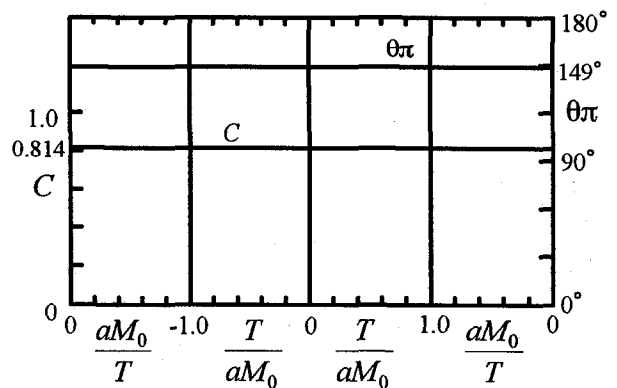


図-8 クラックと剥離のひずみエネルギー解放率の比 C とクラック発生角度 $\theta\pi$ (単純支持辺, $\nu=0.25$)

の応力成分と、クラック先端近傍の応力成分は、いずれも特異点からの距離に対して -0.5 乗のオーダーの特異性を示す。したがって、クラック長さ b が極めて短くなり、クラック先端近傍での特異性と単純支持端の特異性が互いに影響し合っても、両者の特異性のオーダーが一致するため、 $b/a \rightarrow 0$ のとき、式(26a)で無次元化した応力拡大係数は一定値に収束する。

式(8)と(15)または(16)から得られる、次式で無次元化した $b/a=0$ での応力拡大係数 F_B, F_S を図-6 に示す。

$$F_B^{(M)} + iF_S^{(M)} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{k_B^{(M)} + ik_S^{(M)}}{M_0 \sqrt{a}}; \quad (26a)$$

$$F_B^{(T)} + iF_S^{(T)} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\sqrt{a}}{T} (k_B^{(T)} + ik_S^{(T)}) \quad (26b)$$

ここに、添字(M), (T)は、それぞれ一様曲げモーメント M_0 , 集中ねじりモーメント T が作用した場合を表す。

M_0 と T が同時に作用し、クラックが発生するときのエネルギー解放率は、固定辺の場合と同様式(9)および(26)により、次式で表せる。

$$G_{crack} = \frac{\pi K a}{D(3+\nu)^2} \left\{ \left(M_0 F_B^{(M)} + \frac{T}{a} F_B^{(T)} \right)^2 + \left(M_0 F_S^{(M)} + \frac{T}{a} F_S^{(T)} \right)^2 \right\} \quad (27)$$

図-6 で示した F_B , F_S の値を式(27)に代入し、クラック発生角度 $\theta\pi$ を変化させて得られた G_{crack} の最大値、最大値を与える $\theta\pi$ および式(22)の G_{deb} のグラフを、 $\nu=0.25$ で任意の荷重比 M_0/T もしくは T/M_0 に対して図-7 に示す。横軸の荷重の比は、 M_0 , T とともに 0 から正負の無限大の大きさに対応する。左縦軸の G は、それぞれの荷重比に対して無次元化した G_{deb} または G_{crack} (たとえば $\frac{aDG_{deb}}{T^2}$,

$\frac{aDG_{crack}}{T^2}$ など)を示している。クラックの発生方向 $\theta\pi$ は、

aM_0/T に関係なく常に $\theta\pi=149^\circ$ で一定である。 $aM_0/T=-0.49$ 付近で $G_{crack} \rightarrow 0$, $G_{deb} \rightarrow 0$ となっており、このときの荷重条件では、応力関数の単純支持端での特異性を示す項が、 M_0 と T で互いに打ち消されている。

剥離やクラックの発生条件について、エネルギー解放率で表される剥離の破壊靱性値 $(G_{deb})_{CR}$ と G_{deb} の関係、およびクラックの発生の破壊靱性値 $(G_{crack})_{CR}$ と G_{crack} の関係により、先の固定辺の場合の(i)~(iv)と同じことが考えられる。(iv)の場合のクラックと剥離のいずれもが発生する可能性があるときには、次式(28)で表される C と、 $C_0=(G_{deb})_{CR}/(G_{crack})_{CR}$ の大きさを比べることによって、どちらの現象が生ずるか決定できる。

$$C = \frac{G_{deb}}{G_{crack}} = \frac{(3+\nu)^2}{16(1+\nu)^2} \cdot \frac{\left\{ M_0 + \frac{4(1+\nu)T}{\pi(3+\nu)a} \right\}^2}{\left(M_0 F_B^{(M)} + \frac{T}{a} F_B^{(T)} \right)^2 + \left(M_0 F_S^{(M)} + \frac{T}{a} F_S^{(T)} \right)^2} \quad (28)$$

すなわち、 $C > C_0$ のときには剥離が生じ、 $C < C_0$ のときにはクラックが発生する。

式(28)のグラフを、Poisson 比 $\nu=0.25$ の場合について図-8 に示す。 C の値は荷重の変化によらない常に一定な直線で得られ、 $C=0.814$ となる。これは、任意の $\theta\pi$ に対して得られる応力拡大係数に対して、

$$\frac{4(1+\nu)}{\pi(3+\nu)} = \frac{F_B^{(T)}}{F_B^{(M)}} = \frac{F_S^{(T)}}{F_S^{(M)}} \quad (29)$$

なる関係が成り立つため、式(28)は最終的に荷重条件には無関係な次式で表される。

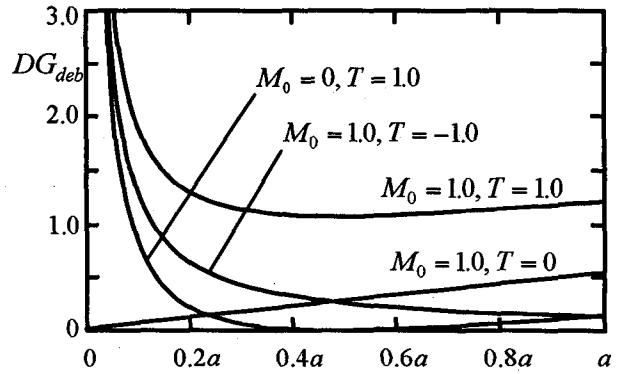


図-9 最初に剥離が発生し進展するときのひずみエネルギー解放率 G の変化 (単純支持辺, $\nu=0.25$)

$$C = \frac{(3+\nu)^2}{16(1+\nu)^2 \left(F_B^{(M)^2} + F_S^{(M)^2} \right)} \quad (30)$$

(ii)あるいは(iv)の場合の、最初に剥離が生じた場合について考察する。剥離が進展して単純支持辺の長さ a が変わるとき、式(22)で得られる G_{deb} のグラフを $\nu=0.25$ で、いくつかの代表的な荷重について図-9 に示す。 $M_0=1.0$, $T=0$ のとき、 a の減少とともに G_{deb} も直線的に減少しており、 $G_{deb} < (G_{deb})_{CR}$ の条件になった時点で剥離が停止する。 $M_0=1.0$, $T=1.0$ あるいは $M_0=0$, $T=1.0$ のとき、 $a=0.49$ 付近で G_{deb} が極小値をもっているため、 $G_{deb} < (G_{deb})_{CR}$ の条件を満足する場合が存在すれば、そこで剥離が停止する。これらに対して $M_0=1.0$, $T=-1.0$ のときは、 a が減少するにしたがって G_{deb} は単純増加しているため、一旦剥離が発生した場合には、停止することなく剥離が進行し、破断に到る。一方、この間のクラックの発生に関して考察する。単純支持辺の長さ a が変わるとき G_{crack} の変化は、式(28)からわかるように $G_{crack} = G_{deb}/C$ で表される。 C の値は、図-8、式(30)からわかるように一定値である。したがって、図-9 の G_{deb} の値を $1/C(=1.22)$ 倍した値として G_{crack} の図が得られる。つまり式(30)で示したとおり、荷重によらず $C = G_{deb}/G_{crack} = 0.814$ と一定で、 $C < C_0$ の状態は変わることはない。一旦剥離が生じたときには、(ii),(iv)いずれの場合も、進展中の剥離からクラックに分岐する可能性は考えられない。

一旦クラックが発生した後の挙動については、固定辺と同様、ここでは扱わない。

5. まとめ

面外曲げを受ける半無限板で、境界の一部を固定あるいは単純支持の条件によって変位拘束される場合、その変位拘束の一端を起点として生ずるクラックの方向およびクラックと剥離の分岐問題を、荷重条件を考慮して解析した。

固定辺の問題では、剥離先端の応力の強さが厳密な解

として式(13)で得られ、さらに応力拡大係数や剥離先端の応力の強さを用いて、クラックや剥離が発生するときのエネルギー解放率を式(24), (14)で示した。また、単純支持の場合には、剥離先端の応力の強さ、クラックおよび剥離発生時のエネルギー解放率を、それぞれ式(21), (27), (22)で導いた。クラックはエネルギー解放率が最大となる角度に発生するとするクライテリオンを用いたとき、この角度は固定辺の場合、荷重条件によって $\theta\pi=127\sim 160^\circ$ 、単純支持境界の場合は荷重条件によらず 149° となる。このときのエネルギー解放率とエネルギー解放率で表される破壊靱性値とを比較して、クラックと剥離のどちらが発生するかを考察した。さらに両方の現象が同時に生ずる可能性のあるときには、それぞれのエネルギー解放率の比と破壊靱性値との比の大小関係によって生ずる破壊現象を考察した。一旦剥離が生じた場合、拘束条件や荷重条件によって、剥離が停止する場合と停止しない場合の両方の可能性があるが、剥離進展中、あるいは停止した時点で、クラックが発生する可能性は考えられないことを示した。単純支持条件を与える場合、荷重の組み合わせでクラックや剥離発生によるエネルギー解放率の大きさは変化するが、これらの比は荷重条件によらず一定であることを式(30)で示した。

クラックおよび剥離発生時のクライテリオンとして、ひずみエネルギー解放率を用いた。クラック発生に関して、微小クラック発生直後の値を用い、またクラック発生方向は、エネルギー解放率最大の方角をとるというクライテリオンを用いた。このクライテリオンに従わない材料

については、エネルギー解放率のクライテリオンの代わりに、その材料のクライテリオンを用いて、本論文と同様に議論が行える。

参考文献

- 1) Fisher, J. W. : *Fatigue and Fracture in Steel Bridges*, Wiley-Interscience, 1984.
- 2) Hasebe, N. and Inohara, S. : Stress Analysis of a Semi-Infinite Plate with an Oblique Edge Crack, *Ingenieur Archiv* 49, pp.51-62, 1980.
- 3) Hasebe, N. : Mixed Boundary Value Problem of Plate with Crack, *J. Engrg. Mech.*, Vol.110, No.1, pp.37-48, 1984.
- 4) Hasebe, N., Tsutsui, S. and Nakamura, T. : Debondings at a Semielliptic Rigid Inclusion on the Rim of a Half Plane, *J. Appl. Mech.*, Vol.55, pp.574-579, 1988.
- 5) Hasebe, N., Miwa, M. and Nakamura, T. : Second Mixed-Boundary-Value Problem for Thin-Plate Bending, *J. Engrg. Mech.*, Vol.119, No.2, pp.211-224, 1993.
- 6) Hasebe, N., Nakamura, T. and Ito, Y. : Analysis of a Mixed Boundary Value Problem for a Thin Plate, *J. Appl. Mech.*, Vol.61, pp.555-559, 1994.
- 7) 三輪昌弘、長谷部宣男、中島将貴、中村卓次 : 曲げ・ねじりを受ける薄板の変位拘束端に生ずるクラックと剥離の分岐問題、土木学会論文集Ⅱ, (1995. 10 掲載予定).

(1995年9月18日受付)